

Rudolf Výborný

O slabé konvergenci v prostorech lokálně stejnoměrně konvexních

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 3, 352--353

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117195>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

RŮZNÉ

O SLABÉ KONVERGENCI V PROSTORECH LOKÁLNĚ  
STEJNOMĚRNĚ KONVEXNÍCH

RUDOLF VÝBORNÝ, Praha

(Došlo dne 19. ledna 1956.)

DT: 513.8

Ve své práci [1] zavedl A. R. LOVAGLIA pojem lokálně stejnoměrně konvexního Banachova prostoru, udal příklad prostoru, který je lokálně stejnoměrně konvexní, ale není stejnoměrně konvexní a studoval prostory isomorfní s lokálně stejnoměrně konvexním prostorem. V této poznámce přeneseme na prostory lokálně stejnoměrně konvexní větu dobře známou z prostoru  $L_p$  [2].

Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Budeme říkat, že prvek  $x \in X$  leží na povrchu jednotkové koule, jestliže  $\|x\| = 1$ .

**Definice.** Řekneme, že prostor  $X$  je lokálně stejnoměrně konvexní, jestliže ke každému  $x_0$ , které leží na povrchu jednotkové koule, a ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$  s touto vlastností: Jestliže  $x$  leží na povrchu jednotkové koule a

$$\|x - x_0\| \geq \varepsilon, \quad \text{potom} \quad \left\| \frac{x + x_0}{2} \right\| < 1 - \delta(\varepsilon, x_0).$$

**Věta.** *Nechť  $X$  je lokálně stejnoměrně konvexní lineární normovaný prostor. Nechť  $x_n$  konverguje k  $x$  slabě a  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ . Potom  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ .*

**Důkaz.** Je-li  $\|x\| = 0$ , není co dokazovat. Nechť  $\|x\| \neq 0$ , potom  $\|x_n\| > 0$  od jistého  $n$  počínaje; bez újmy na obecnosti mohu předpokládat, že  $\|x_n\| > 0$  pro  $n = 1, 2, \dots$  Položme

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \quad \text{a} \quad y = \frac{x}{\|x\|}.$$

Potom  $y_n \rightarrow y$  slabě a  $\|y_n\| = \|y\| = 1$ . Nechť není pravda, že  $y_n$  konverguje k  $y$  v normě, potom existuje  $\varepsilon_0 > 0$  a posloupnost  $\{y_{n_i}\}$  tak, že

$$\|y_{n_i} - y\| \geq \varepsilon_0.$$

Označme  $f$  takový funkcionál, pro nějž  $\|f\| = 1$ ,  $f(y) = 1$ , potom je

$$\|\frac{1}{2}y_{n_i} + \frac{1}{2}y\| < 1 - \delta(\varepsilon_0, y);$$

odtud

$$\frac{1}{2}f(y_{n_i}) + \frac{1}{2}f(y) < 1 - \delta(\varepsilon_0, y),$$

takže

$$f(y_{n_i}) < 1 - 2\delta(\varepsilon_0, y),$$

což jest spor.

Tedy  $\|y_n - y\| \rightarrow 0$  a proto  $x_n = \|x_n\| y_n$  konvergují v normě k  $y$   $\|x\| = x$ ,  
c. b. d.

*Závěrem chtěl bych poděkovat kandidátům matematických věd J. KURZWEILOVI a V. PRÁKOVI za přátelskou radu, kterou mně poskytli.*

#### LITERATURA

- [1] *A. R. Lovaglia*: Locally uniformly convex Banach spaces. Transactions of the Amer. Math. Soc. 78 (1955), 225—239.
- [2] *S. Banach*: Théorie des opérations linéaires. Monografie matematyczne, Warszawa 1932.