Jan Mařík; Štefan Schwarz

Ještě o kvadratických polynomech nabývajících mnoha prvočíselných hodnot

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 2, 241–243

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117192`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

JEŠTĚ O KVADRATICKÝCH POLYNOMECH NABÝVAJÍCÍCH MNOHA PRVOČÍSELNÝCH HODNOT

JAN MAŘÍK, Praha a ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Došlo dne 14. září 1955.) DT : 512.31

V článku je ukázáno, jak autoři přišli na nesprávnost tvrzení, že polynom $x^2 - x + 72491$ nabývá prvočíselných hodnot pro $x = 1, 2, \ldots, 11000$ (viz [3], str. 168).

V článku [6] je citována věta (totiž věta 3 z [5]), podle níž polynom $x^2 - x + p$ nabývá prvočíselných hodnot pro $x = 1, 2, \ldots, p - 1$, jakmile nabývá prvočíselných hodnot pro všechna přirozená x, pro něž je $x^2 - x \leqq \frac{p-1}{3}$. Je-li tento předpoklad splněn, je číslo p ovšem také prvočíslem. Snadno se zjistí, že mezi taková p patří čísla 2, 3, 5, 11, 17, 41. Dále je v [6] uvedeno: „*Lze-li věřit tabulkám, je takovým číslem též* 72491...“ a čtenář je odkázán na práci [3]. Aniž však tabulky kontrolujeme, můžeme zjistit, že zde není cosi v pořádku. Věta 3 v [5] totiž plyne z věty 2 téže práce; věta 2 pak říká toto: *Buď p přirozené číslo; buď C okruh (racionálních) celých čísel. Nechť číslo s vyhovuje rovnici $s^2 - s + p = 0$. Potom v okruhu $C[s]$*[1]) *platí věta o jednoznačném rozkladu v prvočinitele, právě když polynom $x^2 - x + p$ nabývá hodnot rovných jedné nebo nějakému prvočíslu pro všechna přirozená x, splňující vztah $x^2 - x \leqq \frac{p-1}{3}$.*

V takovém případě je tedy kvadratické těleso $R(\sqrt{d})$, kde R je těleso racionálních čísel a kde $d = 1 - 4p$, jednoduché (viz [7], kap. IV a VIII). Čísla 1, 2, 3, 5, 11, 17, 41 vedou ke kvadratickým tělesům $R(\sqrt{d})$, kde $d = -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$; mimo to je známo, že též tělesa $R(\sqrt{-1})$, $R(\sqrt{-2})$ jsou jednoduchá. Kdyby též číslo 72491 mělo uvedenou vlastnost, bylo by také těleso $R(\sqrt{-289963})$ jednoduché. Avšak otázka nalezení všech jednoduchých imaginárních kvadratických těles tvoří starý problém, který je částečně — i když dosud ne úplně — rozřešen. Je totiž známo, že mimo uve-

[1]) $C[s]$ vznikne „okruhovou“ adjunkcí čísla s k okruhu C; $C[s]$ je tedy množina všech $a + bs$, kde $a, b \in C$.

daných 9 těles (pro $d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$) může existovat nejvýš jedno takové těleso (viz [7], str. 194). (To zatím ještě nedává spor.) Dále je však dokázáno (viz [2][2])): Existuje-li jednoduché kvadratické těleso $R(\sqrt{d})$, kde $d < -163$,[3]) pak je $d < -15 \cdot 10^5$; to je ovšem spor. (Podle [4] není $R(\sqrt{d})$ jednoduché dokonce pro žádné d, kde $-5 \cdot 10^9 < d < -163$.)

Snadno se zjistí, že chyba je v článku [3]. Hua totiž píše (na str. 168), že polynom $x^2 - x + 72491$ nabývá prvočíselných hodnot pro $x = 0, 1, \ldots, 11000$, a odvolává se přitom na práci [1]. V této práci je však pouze zjišťováno, kolik prvočísel je mezi čísly $f(0), \ldots, f(r)$, kde $f(x) = x^2 + x + 72491$[4]) a kde r je postupně $1000, 2000, \ldots, 11000$. Na př. podle [1] mezi čísly $f(0), \ldots, f(5000)$ je 2441 prvočísel, mezi čísly $f(0), \ldots, f(11000)$ je 4923 prvočísel. Čísla $f(0), \ldots, f(10999)$ nejsou tedy vesměs prvočísly, jak chybně cituje Hua. Dokonce ani číslo $f(0) = 72491$ samo není prvočíslem; zřejmě je 72491 součinem čísel 71 1021.

Konečně snad stojí za zmínku, že Huovo ne rávné tvrzení je uvedeno též v [8], str. 25, př. II.

LITERATURA

[1] *N. G. W. H. Beeger:* Report on some calculations of prime numbers, Nieuw archief voor wiskunde, XX, *48—50* (1940).

[2] *L. E. Dickson:* On the negative discriminants for which there is a single class of positive primitive binary quadratic forms, Bull. Amer. Math. Soc. (2), *17* (1911), 534—537.

[3] *Хуа-Ло-Кен:* Аддитивная теория простых чисел, Труды математического института имени В. А. Стеклова, XXII, 1947.

[4] *D. H. Lehmer:* On imaginary quadratic fields whose class number is unity, Bull. Amer. Math. Soc. (2), *39* (1933), 360.

[5] *J. Mařík:* Nutrá a postačující podmínka, aby v jistých okruzích celých čísel nereálných kvadratických těles platil jednoznačný rozklad v prvočinitele, Časopis pro pěst. mat. a fys., *74* (1950), seš. 3, str. 164.

[6] *J. Mařík:* O kvadratických polynomech, které nabývají mnoha prvočíselných hodnot, Časopis pro pěst. mat., *78* (1953), str. 57.

[7] *Š. Schwarz:* Algebraické čísla, JČMF, Kruh, sväzok 16, Praha 1950.

[8] Matematika pro III. tř. gymnasií, Státní nakladatelství učebnic, Praha 1951.

[2]) V práci [2] je též dokázána věta 2 z článku [5].

[3]) Rozumí se ovšem: d celé bez čtvercových dělitelů.

[4]) Je ovšem jedno, vyšetřujeme-li polynom $f(x)$ nebo polynom $x^2 - x + 72491$, protože $f(x - 1) = x^2 - x + 72491$.

Резюме

ЕЩЕ О КВАДРАТНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ, ПРИНИМАЮЩИХ МНОГО ЗНАЧЕНИЙ В ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага, и ШТЕФАН ШВАРЦ (Štefan Schwarz), Братислава.

(Поступило в редакцию 14. IX. 1955 г.)

В статье показано, как авторы раскрыли ошибочность утверждения, что значениями многочлена $x^2 - x + 72491$ для $x = 1, 2, \ldots, 11000$ являются простые числа (см. [3], стр. 168).

Zusammenfassung

NOCH EINMAL ÜBER QUADRATISCHE POLYNOME, DIE VIELE PRIMZAHLWERTE ANNEHMEN

JAN MAŘÍK, Praha u. ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Eingelangt 14. IX. 1955.)

In [3], Seite 168, wird behauptet, dass sämtliche Zahlen $x^2 - x + 72491$, wo $x = 1, 2, \ldots, 11000$, Primzahlen sind. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass aus einigen bekannten zahlentheoretischen Sätzen die Unrichtigkeit dieser Behauptung folgt.