Jaroslav Kurzweil

O asymptotických vlastnostech integrálů obyčejných diferenciálních rovnic (Referát o přednášce prof. K. V. Atkinsona)

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 2, 252--255

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117182`

Odtud ovšem snadno vyplývá tvar matic okruhu $\mathfrak{O}_\nu$, je-li specielně grupa A aperiodická (resp. periodická).

V závěru přednášející ukázal užití popsaných výsledků v theorii obecných okruhů. Využil známého Dorrohova vnoření okruhu $\mathfrak{R}$ bez jednotky do okruhu $\mathfrak{R}^*$ s jednotkou, při čemž ukázal, že mezi hodností $\mathfrak{n}$ aditivní grupy okruhu $\mathfrak{R}$ a hodností $\mathfrak{n}^*$ aditivní grupy okruhu $\mathfrak{R}^*$ platí v případě, že hodnost $\mathfrak{n}$ je nekonečná, rovnost $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}$, v případě, že je konečná, vztah $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n} + 1$. Uvědomíme-li si ještě, že každý okruh s jednotkou je isomorfní podokruhu okruhu endomorfismů nějaké grupy, na př. své aditivní grupy, dostáváme řadu výsledků; uveďme aspoň nejdůležitější:

Věta. *Okruh endomorfismů $\mathfrak{R}(G)$ grupy G je isomorfní faktorovému okruhu vhodného podokruhu okruhu matic $\mathfrak{O}_\nu$, popsaného předchozí větou. Je-li G aperiodická, pak je $\mathfrak{R}(G)$ (ve smyslu isomorfismu) podokruhem $\mathfrak{O}_\nu$:*

$$\mathfrak{R}(G) \subset \mathfrak{O}_\nu .$$

Každý okruh endomorfismů může být tedy získán tvořením podokruhů a faktorových okruhů ze známých okruhů matic $\mathfrak{O}_\nu$. Do jaké míry lze toto tvrzení obrátit — t. j. otázka, které jsou to podokruhy či faktorové okruhy, jež jsou okruhy endomorfismů — je zatím otevřeným problémem.

Důležitost popsaného okruhu $\mathfrak{O}_\nu$ je ještě patrnější z následující věty:

Věta. *Budiž $\mathfrak{R}$ libovolný okruh. Potom ve smyslu isomorfismu platí: Buď je $\mathfrak{R}$ podokruhem $\mathfrak{O}_\nu$, nebo existuje podokruh $\mathfrak{O}'_\nu \subset \mathfrak{O}_\nu$ a oboustranný ideál $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{O}'_\nu$, že je*

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{O}'_\nu/\mathfrak{M} .$$

Je-li aditivní grupa daného okruhu $\mathfrak{R}$ aperiodická hodnosti $\mathfrak{n}$, potom ve smyslu isomorfismu platí

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{O}_{\tau^*} ,$$

kde $\mathfrak{O}_{\tau^*}$ je okruh matic $(a_{\alpha\beta})$ typu τ^*, jejichž prvky jsou racionální čísla, při čemž pro pevné α je jen konečný počet $a_{\alpha\beta} \neq 0$ a mohutnost ordinálního čísla τ je rovna $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n} + 1$), je-li $\mathfrak{n}$ nekonečné (resp. konečné). Má-li tedy okruh $\mathfrak{R}$ aperiodickou aditivní grupu konečné hodnosti n, je ve smyslu isomorfismu podokruhem okruhu čtvercových $(n + 1)$-řadých matic, a je-li při tom $\mathfrak{R}$ okruhem s jednotkou, dokonce podokruhem okruhu n-řadých matic nad tělesem racionálních čísel.

Vlastimil Dlab, Praha.

O ASYMPTOTICKÝCH VLASTNOSTECH INTEGRÁLŮ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

(Referát o přednášce prof. K. V. Atkinsona přednesené v matematické obci pražské dne 12. prosince 1955.)

Asymptotická theorie diferenciálních rovnic stojí mezi kvalitativní theorií diferenciálních rovnic a mezi integračními metodami, které hledají přesné řešení. Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) , \quad y = (y_1, \ldots, y_n) , \quad f = (f_1, \ldots, f_n) . \tag{1}$$

V asymptotické theorii diferenciálních rovnic dokazujeme vztahy typu

$$y(t) = z(t) + o(1) ,$$

nebo

$$y(t) = z(t) + o(\|z(t)\|)\,,$$

kde $y(t)$ je libovolné (resp. dané) řešení rovnice (1) a funkce $z(t)$ zpravidla vyhovuje jiné rovnici

$$\frac{dz}{dt} = g(z, t)\,, \tag{2}$$

a tak v asymptotické theorii porovnáváme vlastnosti integrálů rovnic (1) a (2).

Nejjednodušší je „theorie poruch“ pro rovnici

$$\dot{y} = 0\,. \tag{3}$$

Rovnici (3) srovnáváme s rovnicí

$$\dot{y} = Ay\,, \quad A = \{a_{i,k}(t)\} \tag{4}$$

a klademe otázku: *Jaké podmínky musí splňovat matice A, aby každý integrál $y(t) \neq 0$ rovnice* (4) *měl konečnou limitu $y(\infty) \neq 0$ pro $t \to \infty$?*

Snadno lze dokázat, že postačující podmínka je $\int^{\infty} \|A\|\, dt < \infty$, kde $\|A\| = \sum_{i,k} |a_{i,k}(t)|$.

Jinou cestu k odpovědi na položenou otázku nabízí tato úvaha: Platí-li $A(t_1)\, A(t_2) = A(t_2)\, A(t_1)$ pro libovolná čísla t_1, t_2, potom rovnice (4) má integrál

$$y(t) = y(0)\,.\,\exp\{\int_0^t A(u)\, du\}\,.\text{[1]}$$

Existuje-li nevlastní integrál $\int_t^{\infty} A(u)\, du = B(t)$ a platí-li $A(t)\, B(t) = B(t)\, A(t)$, potom rovnice (4) má obecný integrál

$$y(t) = \exp\{B(t)\}\,.\,c\,,$$

kde vektor c je integrační konstanta; zřejmě pak existuje $y(\infty) = c$. Limita $y(\infty)$ existuje také tehdy, nahradíme-li předpoklad, že matice $A(t)$ a $B(t)$ jsou komutativní, předpokladem, že matice $A(t)$ a $B(t)$ jsou asymptoticky komutativní, t. j., že platí

$$\int^{\infty} \|A(t)\, B(t) - B(t)\, A(t)\|\, dt < \infty\,.$$

Odtud snadno přejdeme k jinému případu: Nechť konstantní matice A_0 má pouze imaginární charakteristická čísla, navzájem různá. Porovnávejme rovnice

$$\dot{y} = A_0 y\,, \tag{5}$$

$$\dot{y} = (A_0 + A)\, y\,, \quad A = A(t)\,. \tag{6}$$

Substitucí $z = \exp\{-A_0 t\}\,.\,y$ rovnice (5) a (6) přejdou v rovnice

$$\dot{z} = 0\,, \tag{7}$$

$$\dot{z} = \exp\{-A_0 t\}\,.\,A\,.\,\exp\{A_0 t\}\,.\,z\,. \tag{8}$$

Dospíváme k výsledku: *Integrály rovnice* (5) *a* (6) *jsou si asymptoticky rovny, je-li splněna jedna ze tří podmínek*

1. $\int^{\infty} \|A\|\, dt < \infty\,,$ (9)

[1]) $\exp\{C\}$ znamená matici $I + \frac{1}{1!}C + \frac{1}{2!}C^2 + \ldots$

2. $\int^{\infty} \|\exp\{-A_0 t\} A(t) \exp\{A_0 t\}\| \, dt < \infty$, (10)

3. *integrál* $\int_t^{\infty} \exp\{-A_0 u\} A(u) \exp\{A_0 u\} \, du = D(t)$ (11)

konverguje a matice $\exp\{-A_0 t\} A(t) \exp\{A_0 t\}$ *a* $D(t)$ *jsou asymptoticky komutativní.*

Obraťme se k oscilatorickým rovnicím 2. řádu. Pro integrály rovnice

$$\ddot{y} + (1 + g(t))\, y = 0 , \quad g(t) \underset{t \to \infty}{\to} 0 , \tag{12}$$

(zde $n = 1$, y je reálné číslo), platí asymptotický vzorec

$$y = A \cos \left(\int_0^t \sqrt{1 + g(u)} \, du + B\right) + o(1) , \tag{13}$$

je-li splněna jedna z těchto tří podmínek:

1. $\int^{\infty} |g(t)| \, dt < \infty$, (14)
2. konvergují integrály

$$\int^{\infty} g(t) \, dt , \quad I_1(t) = \int_t^{\infty} g(u) \cos 2u \, du , \quad I_2(t) = \int_t^{\infty} g(u) \sin 2u \, du , \tag{15}$$

$$\int^{\infty} |g(t)| \, |I_1(t)| \, dt , \quad \int^{\infty} |g(t)| \, |I_2(t)| \, dt ,$$

3. funkce $g(t)$ má derivaci $\dot{g}(t)$, $\int^{\infty} |\dot{g}|(t)| \, dt < \infty$. (16)

Dosah podmínky (15) si ujasníme, položíme-li

$$g(t) = \frac{\cos kt}{t^{\alpha}} , \quad \alpha > \frac{1}{2} , \quad k \neq 0, \pm 2 .$$

Podmínka (15) je splněna a pro integrály dif. rovnice

$$\ddot{y} = \left(1 + \frac{\cos kt}{t^{\alpha}}\right) y = 0$$

dostáváme asymptotický vzorec

$$y = A \cos (t + C) + o(1) .$$

Je-li však $\alpha = \frac{1}{2}$, podmínka (15) splněna není a pro integrály diferenciální rovnice

$$\ddot{y} + \left(1 + \frac{\cos kt}{t^{\frac{1}{2}}}\right) y = 0 , \quad k \neq 0, \pm 1, \pm 2 \tag{17}$$

platí asymptotický vzorec

$$y = A \cos (t + \tfrac{1}{2}(k^2 - 4)^{-1} \log t + B) + o(1) . \tag{18}$$

Při odvození formule (18) lze použít Floquetovy theorie pro lineární rovnice s periodickými koeficienty. Jestliže v rovnici (17) necháme „zamrznout“ faktor, který se pomalu mění, dostaneme rovnici

$$\ddot{y} + \left(1 + \frac{\cos kt}{\sqrt{T}}\right) y = 0 . \tag{19}$$

Integrály rovnice (19) mají „průměrnou frekvenci". Nechť $N(x, T)$ je počet nulových bodů (libovolně zvoleného) integrálu rovnice (19) na intervalu $0 \leqq t \leqq x$. Limita

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi N(x, T)}{x} = \omega(T)$$

existuje a asymptotické frekvence $\omega(T)$ pro rovnici (19) užijeme jako okamžité frekvence pro rovnici (17). Odvodíme formuli

$$y(t) = A \cos \left(\int_0^t \omega(T) \, \mathrm{d}T + B\right) + o(1)$$

a tak dospějeme ke vzorci (18).

Výsledky platné pro lineární rovnice mají analogie pro quasilineární rovnice. Všimněme si rovnice

$$\ddot{y} + y\left(1 + \frac{y^2}{t^\alpha}\right) = 0\,. \tag{20}$$

Je-li $\alpha > 0$, integrály rovnice (20) jsou omezené (pro $t \to \infty$). Je-li dokonce $\alpha > 1$, potom pro integrály rovnice (20) platí asymptotický vzorec

$$y = A \cos (t + B) + o(1)$$

(což plyne snadno z toho, že $\int_1^\infty \frac{|y^3(t)|}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t < \infty$ pro každý integrál). Je-li však $0 < \alpha \leqq 1$, potom nelineární člen má podstatný vliv. Obdobně jako v případě rovnice (17) rovnici (20) porovnáme s rovnicí

$$\ddot{y} + y\left(1 + \frac{y^2}{(T)^\alpha}\right) = 0\,. \tag{21}$$

Rovnice (21) má vesměs periodická řešení, periody těchto řešení však závisí na amplitudě.[2]) Také pro rovnici (20) lze dokázat formuli

$$y = A \cos \left(\int^t \omega(T) \, \mathrm{d}T + B\right) + o(1)\,,$$

kde $\omega(T)$ je frekvence integrálu rovnice (21); je však třeba určit závislost frekvence na amplitudě. Téže methody lze užít ke studiu značně širší třídy rovnic.

Závěrem se prof. Atkinson zmínil o dosud neřešené otázce, která spočívá ve studiu souvislosti integrálů „podstatně" nelineárních rovnic, na př. rovnic

$$\ddot{y} + y^3 = 0\,,$$

$$\ddot{y} + y^3 + \frac{y^5}{t} = 0\,.$$

Výsledky, které přednesl, dávají nové a významné poznatky o asymptotickém chování integrálů diferenciálních rovnic a mají zvláštní cenu v tom, že zavádějí názorné fysikální pojmy jako frekvence, amplituda, akce, kinetická a potenciální energie a ukazují užitečnost těchto pojmů pro širokou třídu rovnic.

Jaroslav Kurzweil, Praha.

---

[2]) Pro každý integrál rovnice (21) platí $(\dot{y})^2 + y^2 + \frac{y^4}{2(T)^\alpha} = C^2$. Kladnou konstantu C nazýváme amplitudou příslušného integrálu.