Časopis pro pěstování matematiky

Vlastimil Dlab

O endomorfismech Abelových grup

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 2, 249--252

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117181

REFERÁTY

Referát o přednáškách prof. WLADYSLAWA ORLICZE, konaných v matematické obci pražské dne 10. 10. 1955 a dne 17. 10. 1955.

Přednášející podal přehled o dosavadních výsledcích o Saksových prostorech (viz W. ORLICZ, Linear Operations in Saks' spaces I, Studia Mathematica *11* (1950), část II, Studia Math. *15* (1955)). Zabýval se problémem struktury Saksových prostorů, vyjádřením lineárních funkcionálů (J. MUSELIAK-W. ORLICZ, Linear functionals on the space of functions continuous in an open interval, Studia Math, *16*), otázkami spojitosti lineárních operací a posloupnostmi lineárních operací. Konečně uvedl aplikace této theorie m. j. na theorii sčitatelnosti (kromě výše uvedených prací viz též A. ALEXIEWICZ-W. ORLICZ, On summability of double sequences, Annales Polonici Math. *2* (1955) a na theorii orthogonálních řad (W. ORLICZ, On the convergence of functionals..., Studia Math. *13* (1953), W. ORLICZ, Sur la Convergence uniforme des developpements orthogonaux, Colloquium Mathematicum *1* (1948)).

Wladyslaw Orlicz, Poznaň.

O ENDOMORFISMECH ABELOVÝCH GRUP

(Referát o přednášce VLASTIMILA DLABA, přednesené v matematické obci pražské dne 14. listopadu 1955.)

Obsahem přednášky bylo studium struktury okruhu endomorfismů libovolné Abelovy grupy G pomocí struktury okruhu endomorfismů úplných grup a aplikace získaných výsledků na theorii obecných okruhů.

Přednášející v úvodu připomněl některé definice z theorie grup:*)

Grupu, jejíž každý prvek má nekonečný (resp. konečný) řád, nazveme *aperiodickou* (resp. *periodickou*); je-li řád každého prvku mocninou téhož prvočísla p, mluvíme o *p-primární* grupě. Řekneme, že grupa G^* je *úplná*, jestliže rovnice $n \, . \, x = g$, n přirozené číslo, $g \in G^*$, má vždy v G^* řešení. Ke každé grupě G existuje úplná grupa G^*, jež obsahuje G; při tom mezi všemi takovými úplnými grupami existuje minimální úplná grupa $\overline{G}$ až na isomorfismus, který je rozšířením identického automorfismu grupy G, jednoznačně určená; nazveme ji *úplným uzávěrem* grupy G.

Vedle pojmu obyčejné lineární závislosti a pomocí něho odvozeného pojmu hodnosti grupy G (označeno symbolem hod (G)) zavedl přednášející pojem zobecněné hodnosti grupy G (označeno Z-hod (G)) a ukázal přednosti této definice:

Množinu nenulových prvků $\mathfrak{G} = (g_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$, $g_\alpha \in G$, nazveme lineárně Z-nezávislou, jestliže z každé relace

$$k_1 g_{\alpha_1} + k_2 g_{\alpha_2} + \ldots + k_n g_{\alpha_n} = 0, \quad k_i \text{ celá čísla}, \; g_\alpha \in \mathfrak{G},$$

plyne $k_i g_{\alpha_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

*) Grupou rozumí se vždy aditivně psaná Abelova grupa.

Je-li $G_{(p)}$ nenulová p-primární grupa, potom mohutnost maximálního lineárně Z-nezávislého systému v $G_{(p)}$ (která je v tomto případě invariantem grupy) nazveme zobecněnou hodností p-primární grupy $G_{(p)}$; je-li $G_{(p)} = 0$, definujme Z-hod $(G_{(p)}) = 0$. Označíme-li P periodickou část libovolné grupy G a je-li $P = \sum_p P_{(p)}$ její direktní rozklad na p-primární komponenty, nazveme zobecněnou hodností grupy G součet

$$Z\text{-hod } (G) = \text{hod } (G) + \sum_p Z\text{-hod } (P_{(p)}).$$

Zobrazení $\varkappa$ grupy G do grupy H, jež zachovává operaci, nazýváme homomorfismem grupy G do H. Všechny homomorfismy grupy G do H tvoří při známé definici sčítání Abelovu grupu $\mathfrak{K}(G, H)$. Je-li ϱ homomorfismus grupy H do F, můžeme ve známém smyslu mluvit o součinu homomorfismů $\varkappa\varrho$. Je-li $G = H = F$, mluvíme o endomorfismu grupy G; máme tedy definováno sčítání a násobení endomorfismů a při takto definovaných operacích tvoří všechny endomorfismy grupy G okruh $\mathfrak{R}(G)$ s jednotkou.

K tomu, aby přednášející popsal vztah mezi okruhem endomorfismů grupy G a okruhy endomorfismů úplných grup, zavedl ještě definici *přímo* (resp. *homomorfně*) *indukovaného endomorfismu* a *přímého* (resp. *homomorfního*) *rozšíření endomorfismu*:

Je-li H podgrupou G a ε endomorfismem grupy G, řekneme, že ε indukuje přímo (resp. homomorfně) endomorfismus ε′ grupy H (resp. ε grupy G/H), jestliže parciální zobrazení grupy H určené zobrazením ε (resp. zobrazení tříd grupy G* mod *H určené zobrazením ε) je endomorfismem ε′ v H (resp. ε* v G/H).*

V obdobném smyslu definujeme přímé (resp. homomorfní) rozšíření endomorfismu ε' podgrupy $H \subset G$ (resp. ε^* grupy G/H) na grupu G.

V okruhu endomorfismů $\mathfrak{R}(G)$ nejprve přednášející upozornil na tři množiny endomorfismů, určených grupou G a nějakou její podgrupou $H \subset G$:

(I) na podokruh $\mathfrak{R}(G; H) \subset \mathfrak{R}(G)$ těch endomorfismů ε, pro něž je $H\varepsilon \subset H$,

(II) na oboustranný ideál $\mathfrak{M}(G, H) \subset \mathfrak{R}(G; H)$ těch endomorfismů ε, pro něž platí $H\varepsilon = 0$ a

(III) na oboustranný ideál $\mathfrak{N}(G, H) \subset \mathfrak{R}(G; H)$ všech endomorfismů ε, pro které je $G\varepsilon \subset H$.

Pomocí nich určil základní vztahy mezi okruhem endomorfismů grupy G, okruhem endomorfismů její podgrupy $H \subset G$ a faktorové grupy G/H. Jelikož každá grupa G je isomorfní faktorové grupě nějaké volné grupy U, $G \cong U/N$, obdržíme snadno výsledek

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(U; N)/\mathfrak{N}(U, N) .$$

Konstrukcí úplné grupy G^0, $G^0 \supset \overline{G} \supset G$, potom získáme obdobný vztah mezi okruhy endomorfismů grup G a G^0

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(G^0, G)/\mathfrak{M}(G^0, G) .$$

Přednášející naznačil ještě důkaz některých vlastností úplného uzávěru $\overline{G}$ grupy G, potřebných k dalším úvahám:

(I) je-li $\overline{g} \neq 0$, $\overline{g} \in \overline{G}$, potom existuje přirozené číslo n, že $n\overline{g} \neq 0$, $n\overline{g} \in G$;

(II) je-li G aperiodická (resp. periodická), je $\overline{G}$ aperiodická (resp. periodická);

(III) hod (G) = hod $(\overline{G})$;

(IV) Z-hod (G) = Z-hod $(\overline{G})$;

(V) je-li $G = \sum_{\alpha\in\Delta} G_\alpha$, je $\overline{G} = \sum_{\alpha\in\Delta} \overline{G}_\alpha$.

Pomocí těchto vlastností odvodil větu a ukázal na příkladech nemožnost jejího zostření:

Věta. *Okruh endomorfismů $\mathfrak{R}(G)$ grupy G je isomorfní faktorovému okruhu podokruhu* *všech endomorfismů ε^* úplného obalu $\overline{G}$, pro něž je $G\bar{\varepsilon} \subset G$, podle ideálu těch endomorfismů $\bar{\varepsilon}^*$, pro které platí $G\varepsilon^* = 0$:*

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(\overline{G}; G)/\mathfrak{M}(\overline{G}, G) .$$

Je-li speciálně G aperiodická, potom $\mathfrak{M}(\overline{G}, G) = (0)$.

Tím se objevila souvislost okruhu $\mathfrak{R}(G)$ s okruhy endomorfismů úplných grup a nutnost studia těchto okruhů. Jelikož každá úplná grupa A je direktním součtem aditivních grup racionálních čísel R a Prüferových grup $G(p^\infty)$ typu p^∞ vzhledem k různým prvočíslům p, je obecný tvar grupy A

$$A = \sum_{0 \leq \alpha_{(0)} < \tau_{(0)}} R_{\alpha_{(0)}} + \sum_{0 \leq \alpha_{(1)} < \tau_{(1)}} G_{\alpha_{(1)}}(p_1^\infty) + \ldots + \sum_{0 \leq \alpha_{(n)} < \tau_{(n)}} G_{\alpha_{(n)}}(p_n^\infty) + \ldots, \tag{1}$$

$p_1 < p_2 < \ldots$ všechna prvočísla.

Je tedy účelné nejprve obecně studovat okruh endomorfismů direktního součtu grup

$$G = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} G_\alpha .$$

Popis okruhu endomorfismů tohoto direktního součtu podal přednášející větou, která je zobecněním věty Kiškiny. Zatím co Kiškina se omezovala při studiu okruhu endomorfismů direktního součtu grup na konečný direktní součet, zobecnil přednášející její výsledek zavedením nového pojmu zobecněného průniku na nekonečný direktní součet.

Zobecněným průnikem systému $(K_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ podgrup $K_\alpha \subset G$ v grupě G

$$\overline{\bigcap_{\alpha \in \Delta}} K_\alpha = D$$

nazveme podgrupu $D \subset G$, která se skládá z těch prvků, které až na konečný počet indexů α leží ve všech podgrupách K_α. Zmíněná věta potom zní:

Věta. *Buďiž $G = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} G_\alpha$. Označme $\overline{\mathfrak{D}}_\tau$ množinu všech čtvercových matic $(\varkappa_{\alpha\beta})$ typu τ, kde $\varkappa_{\alpha\beta}$ je homomorfismus grupy G_α do grupy G_β (pro $\alpha = \beta$ se zřejmě jedná o endomorfismus grupy G_α), při čemž pro pevné α $(0 \leqq \alpha < \tau)$ splňují jádra $K_{\alpha\beta} \subset G_\alpha$ homomorfismů $\varkappa_{\alpha\beta}$ vztah*

$$\overline{\bigcap_{0 \leq \beta < \tau}} K_{\alpha\beta} = G_\alpha . \tag{2}$$

Potom tato množina s maticovým sčítáním a násobením tvoří okruh a je

$$\mathfrak{R}(G) \cong \overline{\mathfrak{D}}_\tau .$$

V dalším vyšetřil přednášející ještě grupy homomorfismů grupy R do R, $G(p^\infty)$ do $G(q^\infty)$ $(p = q, p \neq q)$ a R do $G(p^\infty)$ a uvedl isomorfní representaci těchto grup pomocí grup racionálních a p-adických čísel. Při tom odvodil pro tato čísla podmínky, plynoucí ze vztahu (2); výsledek možno pak formulovat větou:

Věta. *Buďiž A úplná grupa tvaru (1). Potom její okruh endomorfismů $\mathfrak{R}(A)$ je isomorfní okruhu $\mathfrak{D}_\nu$ čtvercových matic $A = (a_{\alpha\beta})$ typu $\nu = \tau_{(0)} + \tau_{(1)} + \ldots + \tau_{(n)} + \ldots$,* kde

pro $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$, $0 \leqq \beta < \tau_{(0)}$ je $a_{\alpha\beta}$ racionální číslo,

pro $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$, $\tau_{(i-1)} < \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ je $a_{\alpha\beta}$ p_i-adické číslo,

pro $\tau_{(i-1)} < \alpha < \tau_{(i)}$, $\tau_{(i-1)} < \beta < \tau_{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots)$ je $a_{\alpha\beta}$ celé p_i-adické číslo a ostatní $a_{\alpha\beta} = 0$, s obyčejným maticovým sčítáním a násobením.

Při tom pro pevné α, $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$ je mezi $a_{\alpha\beta}$ pouze konečný počet nenulových racionálních čísel, konečný počet necelých p_i-adických čísel $(i = 1, 2, \ldots)$ a pro $\tau_{(i-1)} < \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots$ pevné) jakož i pro pevné $\alpha > \tau_{(0)}$ mají všechna p_i-adická čísla až na konečný počet ve známé representaci pomocí nekonečných posloupností pro libovolné přirozené číslo m_0 prvních m_0 složek nulových.

Odtud ovšem snadno vyplývá tvar matic okruhu $\mathfrak{O}_\nu$, je-li specielně grupa A aperiodická (resp. periodická).

V závěru přednášející ukázal užití popsaných výsledků v theorii obecných okruhů. Využil známého Dorrohova vnoření okruhu $\mathfrak{R}$ bez jednotky do okruhu $\mathfrak{R}^*$ s jednotkou, při čemž ukázal, že mezi hodností $\mathfrak{n}$ aditivní grupy okruhu $\mathfrak{R}$ a hodností $\mathfrak{n}^*$ aditivní grupy okruhu $\mathfrak{R}^*$ platí v případě, že hodnost $\mathfrak{n}$ je nekonečná, rovnost $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}$, v případě, že je konečná, vztah $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n} + 1$. Uvědomíme-li si ještě, že každý okruh s jednotkou je isomorfní podokruhu okruhu endomorfismů nějaké grupy, na př. své aditivní grupy, dostáváme řadu výsledků; uveďme aspoň nejdůležitější:

Věta. *Okruh endomorfismů $\mathfrak{R}(G)$ grupy G je isomorfní faktorovému okruhu vhodného podokruhu okruhu matic $\mathfrak{O}_\nu$, popsaného předchozí větou. Je-li G aperiodická, pak je $\mathfrak{R}(G)$ (ve smyslu isomorfismu) podokruhem $\mathfrak{O}_\nu$:*

$$\mathfrak{R}(G) \subset \mathfrak{O}_\nu .$$

Každý okruh endomorfismů může být tedy získán tvořením podokruhů a faktorových okruhů ze známých okruhů matic $\mathfrak{O}_\nu$. Do jaké míry lze toto tvrzení obrátit — t. j. otázka, které jsou to podokruhy či faktorové okruhy, jež jsou okruhy endomorfismů — je zatím otevřeným problémem.

Důležitost popsaného okruhu $\mathfrak{O}_\nu$ je ještě patrnější z následující věty:

Věta. *Budiž $\mathfrak{R}$ libovolný okruh. Potom ve smyslu isomorfismu platí: Buď je $\mathfrak{R}$ podokruhem $\mathfrak{O}_\nu$, nebo existuje podokruh $\mathfrak{O}'_\nu \subset \mathfrak{O}_\nu$ a oboustranný ideál $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{O}'_\nu$, že je*

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{O}'_\nu/\mathfrak{M} .$$

Je-li aditivní grupa daného okruhu $\mathfrak{R}$ aperiodická hodnosti $\mathfrak{n}$, potom ve smyslu isomorfismu platí

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{O}_{\tau^*} ,$$

kde $\mathfrak{O}_{\tau^*}$ je okruh matic $(a_{\alpha\beta})$ typu τ^*, jejichž prvky jsou racionální čísla, při čemž pro pevné α je jen konečný počet $a_{\alpha\beta} \neq 0$ a mohutnost ordinálního čísla τ je rovna $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n} + 1$), je-li $\mathfrak{n}$ nekonečné (resp. konečné). Má-li tedy okruh $\mathfrak{R}$ aperiodickou aditivní grupu konečné hodnosti n, je ve smyslu isomorfismu podokruhem okruhu čtvercových $(n + 1)$-řadých matic, a je-li při tom $\mathfrak{R}$ okruhem s jednotkou, dokonce podokruhem okruhu n-řadých matic nad tělesem racionálních čísel.

Vlastimil Dlab, Praha.

O ASYMPTOTICKÝCH VLASTNOSTECH INTEGRÁLŮ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

(Referát o přednášce prof. K. V. Atkinsona přednesené v matematické obci pražské dne 12. prosince 1955.)

Asymptotická theorie diferenciálních rovnic stojí mezi kvalitativní theorií diferenciálních rovnic a mezi integračními metodami, které hledají přesné řešení. Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) , \quad y = (y_1, \ldots, y_n) , \quad f = (f_1, \ldots, f_n) . \tag{1}$$

V asymptotické theorii diferenciálních rovnic dokazujeme vztahy typu

$$y(t) = z(t) + o(1) ,$$