Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 2, 247--248

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117179`

ÚLOHY A PROBLÉMY

Navazujeme na hlídku úloh a problémů, započatou v Časopise pro pěstování matematiky v roč. *79* (1954). Prosíme čtenáře, aby řešení úloh a problémů jakož i dotazy na literaturu, která se k jednotlivým problémům vztahuje, zasílali opět redakci, nebo aby navázali styk přímo s autory uveřejněných úloh.

Dále žádáme naše čtenáře, aby nám hojně zasílali úlohy a problémy vhodné pro tuto hlídku.

Redakce.

1. Dokažte bez použití theorie Lebesgueova integrálu tuto větu:

Buďte f, g konečné funkce v intervalu $(0, 1)$; funkce g nechť je spojitá, funkce f nechť má primitivní funkci a nechť je nezáporná. Potom funkce $f \,.\, g$ má primitivní funkci.

Poznámka. Z vět o Lebesgueově integrálu plyne naše tvrzení ihned takto: Pro každé $x \in (0, 1)$ existuje Lebesgueův integrál $\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = H(x)$ a platí (jak se snadno zjistí) $H'(x) = f(x)\, g(x)$.

Jan Mařík, Praha.

2. Dokažte elementárními prostředky, že platí tato věta:

Nechť funkce f má (vlastní) Riemannův integrál v intervalu $\langle c, d\rangle$. Nechť funkce φ má spojitou derivaci v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $c \leqq \varphi(t) \leqq d$ pro každé $t \in \langle a, b\rangle$. Potom existuje Riemannův integrál $\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$ a rovná se $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, \mathrm{d}x$.

Poznámka. Důkaz lze provést dosti jednoduše pomocí některých ne zcela triviálních vět z theorie reálných funkcí.

Jan Mařík, Praha.

3. Rozhodněte, zda platí tato věta:

Buďte G, H otevřené konvexní množiny v obyčejném trojrozměrném (event. n-rozměrném) prostoru. Množina H buď omezená a nechť $\bar{H} \subset G$. Nechť funkce f má omezené spojité (resp. omezené) derivace prvního řádu na množině $G - \bar{H}$. Potom je funkce f stejnoměrně spojitá (na $G - \bar{H}$).

Poznámka. Z názoru se zdá být jasné, že funkci f lze spojitě rozšířit na hranici množiny H; odtud by stejnoměrná spojitost snadno vyplynula.

Jan Mařík, Praha.

4. Nechť F je distribuční funkce (t. j. neklesající zprava spojitá funkce na $(-\infty, +\infty)$, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$), nechť

$$\int x \, \mathrm{d}F(x) = 0 \, , \quad \int x^2 \, \mathrm{d}F(x) = 1 \, .$$

Definujme posloupnost distribučních funkcí $F_1, F_2, \ldots$ takto:

$$F_1 = F \quad \text{a} \quad F_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \int F_{n-1}(x - z) \, \mathrm{d}F_{n-1}(z) \, .$$

Položme

$$\varepsilon_n = \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |F_n(x) - \Phi(x)| \, ,$$

kde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \, .$$

Je známo z počtu pravděpodobnosti, že $\varepsilon_n \to 0$ a pro některá speciální F jsou známy i bližší odhady čísel ε_n (viz FELLER: On the Normal Approximations to the Binomial Distribution, Annals of Mathematical Statistics, vol. *16* (1945), pp. 319—329). Protože pro mnohé důležité funkce F jsou tabelovány funkce F_n (a je tedy možné určit ε_n) pro některá n, bylo by zajímavé blíže studovat povahu konvergence ε_n k nule; zejména ukázat, za jakých předpokladů $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \geq \ldots$

Poznámka. Analytickou formulaci lze nahradit pravděpodobnostní formulací takto. Budiž $\xi_1, \xi_2, \ldots$ posloupnost nezávislých náhodných proměnných se stejnou distribucí danou distribuční funkcí F. Nechť

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, .$$

nechť G_n je distribuční funkce náhodné proměnné η_n, nechť

$$\delta_n = \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |G_n(x) - \Phi(x)| \, ,$$

Opět $\delta_n \to 0$ a je užitečné blíže zkoumat povahu této konvergence a zejména zjistit předpoklady, za nichž $\delta_n \searrow 0$. Poznamenejme, že obě formulace nejsou ekvivalentní a že druhá verse je zobecněním první. ε_n je totiž vybraná posloupnost z δ_n, $\varepsilon_1 = \delta_1$, $\varepsilon_2 = \delta_2$, $\varepsilon_3 = \delta_4$, $\varepsilon_4 = \delta_8, \ldots$; zdá se, že z počátku by bylo lehčí studovat pouze posloupnost ε_n.

Nejsou mi známy žádné podmínky pro monotonii posloupnosti ε_n, resp. δ_n, a dokonce mi nejsou známy ani příklady na splnění resp. nesplnění požadavku monotonie.

Václav Fabian, Praha.