ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 81 * PRAHA, 31. V. 1956 * ČÍSLO 2

ČLÁNKY

PŘÍSPĚVEK K AFINNÍ GEOMETRII PLOCH

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

(Došlo dne 22. ledna 1955.) DT : 513.621

Účelem předloženého článku, který navazuje na dřívější práci autorovu: *Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin* (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. *75*, 1950, str. 179—209),*) je zavést pro plochu v rovném trojrozměrném afinním prostoru vhodnou normalisaci afinního normálního vektoru a to takovou, aby důležité relace v metrické geometrii ploch, jako Frenetovy formule, měly svou analogii v geometrii afinní. Jádrem theoretické části práce je zavedení dvou základních afinních tensorů, které jsou nezávislé na volbě faktoru tečného vektoru plochy. Pomocí těchto tensorů se dojde k formulím analogickým Frenetovým formulím pro plochu v metrice. Stručná diskuse méně známého druhého afinního tensoru ploch, označeného v práci symbolem L^c_a, vede k určité afinní klasifikaci ploch. Několik vět a hlavně příklady v II. části práce zdůvodňují geometrický význam theoretických výsledků.

Není žádnou obtíží zobecnit následující úvahy pro nadplochy v rovném nebo zakřiveném ekvivoluminárním n-rozměrném prostoru. Tensorová metoda v dalším používaná tuto cestu ukazuje.

Část I

1. Úvodní poznámky. V afinoeuklidovském prostoru E_3 o souřadnicích x^α ($\alpha = 1, 2, 3$) budiž definována plocha X_2 parametrickými rovnicemi

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)\,, \quad \alpha = 1, 2, 3;\ a = 1, 2 \tag{1,1}$$

v určité dvojrozměrné oblasti Ω parametrů η^1, η^2, při čemž předpokládáme:

*) Tato práce bude v dalším v poznámkách pod čarou citována pro stručnost pod symbolem (A).

a) funkce $x^\alpha(\eta^a)$ mají spojité parciální derivace v Ω nejméně čtvrtého řádu;

b) hodnost matice z elementů $B^\alpha_a \equiv \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \eta^a}$ je v každém bodě oblasti Ω rovna dvěma;

c) hodnost tensoru

$$h_{ab} \equiv B^\alpha_a \partial_b t_\alpha \text{ [1]} \tag{1,2}$$

v oblasti Ω je dvě.

Za těchto předpokladů je možno definovat v každém bodě oblasti Ω tensor h^{ab} kontragredientní k tensoru h_{ab}, tedy takto:

$$h^{ac}h_{cb} = \delta^a_b \quad \left(\delta^a_b = \begin{cases} 0 \text{ pro } a \neq b \\ 1 \text{ pro } a = b \end{cases}\right). \tag{1,3}$$

Je-li t_α tečným vektorem plochy X_2, potom nenulový vektor $^*t_\alpha$ je rovněž tečným vektorem této plochy tehdy a jen tehdy, platí-li

$$^*t_\alpha = Pt_\alpha\,, \tag{1,4}$$

kde $P = P(\eta^a)$ je nenulový skalár plochy X_2.

Konexi v X_2 o koeficientech $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$ takto definovaných

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} = h^{cd}(\partial_d t_\alpha)\, \partial_a B^\alpha_b \tag{1,5}$$

nazýváme vrozenou konexí plochy X_2 při volbě t_α tečného vektoru.[2]

Riemannovskou konexí z tensoru h_{ab} při určité volbě t_α tečného vektoru v X_2 nazýváme konexi o koeficientech

$$\begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} = \tfrac{1}{2} h^{cd}(\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab})\,.\text{[3]} \tag{1,6}$$

Jak konexe (1,5), tak konexe (1,6) závisí na tom, jaké řešení t_α rovnic $B^\alpha_a t_\alpha = 0$ jsme si zvolili, čili, jak stručně říkáme, závisí na transformačním vztahu (1,4).[4]

Vektor v X_2 o složkách M_a takto definovaných

$$M_a = \frac{1}{2}\left(\begin{Bmatrix} c \\ ac \end{Bmatrix} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ac}\right) \text{[5]} \tag{1,7}$$

má tyto vlastnosti:

1. při transformaci (1,4) platí:

$$^*M_a = M_a + \frac{1}{P}\,\partial_a P \text{ [5]} \quad \left(\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \eta^a}\right), \tag{1,8$_a$}$$

---

[1]) Zde t_α je tečným vektorem variety A_2, tedy nějaké nenulové řešení rovnic $B^\alpha_a t_\alpha = 0$, $a = 1, 2$. Snadno nahlédneme, že hodnost tensoru h_{ab} nezávisí na volbě nenulového faktoru tečného vektoru t_α.

[2]) (A), str. 185, definice 5.

[3]) (A), str. 192, formule (4,3).

[4]) (A), str. 194, (4,10), (4,11).

[5]) (A), str. 192, (4,5); str. 195, (4,12); str. 205, věta (7,1).

2. jest gradientem v X_2, to jest:

$$\partial_{[a}M_{b]} = 0 \,.^{5)} \tag{1,8)$_b$}$$

V důsledku vztahu $(1,8)_b$ jest výraz $M_b \, \mathrm{d}\eta^b$ totálním diferenciálem funkce proměnných η^a v definičním oboru Ω plochy X_2.

Je-li $M(\eta^a)$ jedna z funkcí té vlastnosti, že platí $\partial_a M = M_a$, potom všechny funkce této vlastnosti jsou tvaru

$$\overline{M} = M + c\,, \qquad (1,9)$$

kde c je libovolná konstanta.

Lemma 1,1. *Vektor T_α takto definovaný*

$$T_\alpha = e^{-M} t_\alpha \qquad (1,10)$$

má tyto vlastnosti:

a) *je tečným vektorem plochy X_2;*

b) *při transformaci* (1,4) *platí*

$$^*T_\alpha = \varepsilon T_\alpha\,, \qquad (1,10)_a$$

kde ε = signum P.

c) *Vyjdeme-li místo od funkce M od funkce $\overline{M}$, při čemž platí* (1,9), *pak je*

$$\overline{T}_\alpha = e^{-c} T_\alpha\,. \qquad (1,10)$$

Důkaz. Tvrzení a), c) jsou evidentní. Podle $(1,8)_a$ je $^*M = M + \log |P|$ [6]) a tedy $e^{-M^*} = e^{-M} \,.\, |P|^{-1}$. Odtud, z (1,4) a (1,10) plyne pak ihned tvrzení b) naší pomocné věty.

Poznámka 1,1. Vztahy $(1,10)_a$, $(1,10)_b$ nám říkají, že vektor T_α je celým postupem, kterým jsme k jeho konstrukci došli, definován až na nenulový konstantní faktor. Proto při dalším studiu stačí uvažovat „transformační“ vztah:

$$'T_\alpha = c T_\alpha\,, \quad c \neq 0 \text{ je konstanta}\,. \qquad (1,11)$$

Poznámka 1,2. V dalším budeme vždy jako tečný vektor variety X_2 brát tečný vektor T_α. Abychom tento fakt zdůvodnili v matematické symbolice, budeme veličiny při této volbě T_α tečného vektoru označovat velkými písmeny. Bude tedy na př.:

$$H_{ab} \equiv B_a^\alpha \partial_b T_\alpha\,; \qquad (1,12)$$

H^{ab} je pak tensor kontragredientní k tensoru H_{ab}.

Věta 1,1. *Vrozená konexe v X_2 o koeficientech*

$$\Lambda_{ab}^c \equiv H^{cd} (\partial_d T_\alpha)\, \partial_a B_b^\alpha \qquad (1,13)$$

je nezávislá na transformaci (1,4).

---

[6]) Za funkci, jejímž totálním dif. je $\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial \eta^a}\mathrm{d}\eta^a$, bereme funkci $\log |P|$ přímo, nikoliv $\log |P| +$ konst.

Důkaz. Podle poznámky 1,1 stačí ukázat, že veličiny Λ^c_{ab} jsou nezávislé na transformaci (1,4). Z (1,12) plyne podle (1,4):

$$'H_{ab} = cH_{ab}\,, \quad 'H^{ab} = c^{-1}H^{ab}\,. \tag{1,14}$$

Z (1,13), (1,14), (1,8) pak dostaneme:

$$'\Lambda^c_{ab} = 'H^{cd}(\partial_d 'T_\alpha)\,\partial_a B^\alpha_b = H^{cd}(\partial_d T_\alpha)\,\partial_a B^\alpha_b = \Lambda^c_{ab}\,.$$

Poznámka 1,3. Konexe Λ^c_{ab} definovaná v (1,13) je identická s konexí o koeficientech $\Gamma^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab}h^{cd}M_d$, nezávislých na transformaci (1,4).[7]

Definice 1. *Konexi v X_2 o koeficientech Λ^c_{ab}, definovaných v* (1,13), *budeme nazývat konexí indukovanou v ploše X_2. Varietu X_2 opatřenou touto konexí budeme označovat A_2.*

Afinnormální vektor N^ν plochy A_2, vázaný na konexi Λ^c_{ab},[8] je vektor takto definovaný:

$$N^\nu \equiv \tfrac{1}{2}H^{ab}(B^\nu_c\Lambda^c_{ab} - \partial_a B^\nu_b)\,. \tag{1,15}$$

Poznámka 1,4. Vektor N^ν, definovaný v (1,15), budeme v dalším nazývat afinnormálním vektorem variety A_2. Přímku jdoucí bodem plochy A_2 o směru N^ν v tomto bodě nazýváme afinní normálou plochy A_2.

Věta 1,2. *Při transformaci* (1,11) *jest*

$$'N^\nu = c^{-1}N^\nu\,. \tag{1,16}$$

Důkaz plyne bezprostředně z (1,15), (1,14) a věty 1,1.

Věta 1,3. *Pro afinnormální vektor N^ν platí:*

$$N^\nu T_\nu = 1\,, \quad N^\nu \partial_a T_\nu = 0 \tag{1,17}$$

nezávisle na transformaci (1,11).

Důkaz provádět nebudeme.[9] Vztahy (1,17) se dají snadno ověřit z definice vektorů T_ν, N^ν a definice indukované konexe Λ^c_{ab}.

2. Frenetovy formule pro plochu A_2 v E_3. Zvolíme-li indexy a, b pevně ($a, b \in 1, 2$), potom vzhledem k lineární nezávislosti vektorů B^α_1, B^α_2, N^α můžeme psát vektor $\partial_a B^\nu_b$ jako lineární kombinaci vektorů B^α_1, B^α_2, N^α, tedy

$$\partial_a B^\alpha_b = \Pi^c_{ab}B^\alpha_c + w_{ab}N^\alpha\,.$$

Snadným výpočtem[10] nalezneme pro koeficienty této lineární kombinace

$$\Pi^c_{ab} = \Lambda^c_{ab}\,, \quad w_{ab} = -\,H_{ab}\,.$$

Platí tedy pro každé $a, b = 1, 2$:

$$\partial_a B^\alpha_b = \Lambda^c_{ab}B^\alpha_c - H_{ab}N^\alpha\,. \tag{1,18}$$

---

[7]) (A), str. 206, věta (7,4).
[8]) T. j. vázaný ve smyslu afinní indukce. Viz (A), str. 187, kap. 3.
[9]) Viz též (A), str. 206, 207, věta (7,4).
[10]) (A), str. 184, formule (2,6).

Podobně můžeme (při pevném indexu $a \in 1, 2$) vektor $\partial_a N^\alpha$ psát jako lineární kombinaci vektorů B_1^α, B_2^α, N^α, tedy

$$\partial_a N^\alpha = B_c^\alpha L_a^c + u_a N^\alpha .$$

Násobením této relace vektorem T_α (a sečtením přes $\alpha = 1, 2, 3$) dostaneme $u_a = T_\alpha \partial_a N^\alpha$, neboť $B_c^\alpha T_\alpha = 0$. Podle (1,17) je však

$$T_\alpha \partial_a N^\alpha = - N^\alpha \partial_a T_\alpha = 0 .$$

Tedy $u_a = 0$; máme tak

$$\partial_a N^\alpha = B_c^\alpha L_a^c . \tag{1,19}$$

Násobíme-li (1,19) veličinou $\partial_b T_\alpha$, dostaneme podle (1,12)

$$(\partial_b T_\alpha)\, \partial_a N^\alpha = H_{cb} L_a^c ;$$

odtud plyne ihned

$$L_a^c = H^{cb}(\partial_b T_\alpha)\, \partial_a N^\alpha . \tag{1,20}$$

Při transformaci (1,11) platí pro elementy L_a^c, jak snadno plyne z (1,20), (1,11), (1,14),

$$'L_a^c = c^{-1} L_a^c . \tag{1,21}$$

Z (1,20) je ihned patrno, že elementy L_a^c jsou složky tensoru v A_2.

Vztahy (1,18) a (1,20) jsou analogické známým vztahům z metrické geometrie ploch v obyčejném prostoru. Nazveme je zde, jak je tomu analogicky v metrice, *Frenetovými formulemi pro plochu A_2 v E_3.*

Definice 2. *Tensor H_{ab} nazýváme prvým afinním tensorem, tensor L_a^c druhým afinním tensorem plochy A_2 v E_3.*

3. Afinní tensory plochy. Veličina v A_2 o složkách E_{ab} takto definovaných

$$E_{ab} \equiv L_a^c H_{bc} \tag{1,22}$$

je zřejmě tensorem v A_2. Tensor E_{ab} má pro afinní geometrii ploch význam pro některé své vlastnosti, které vyslovíme v dalších větách.

Věta 1,4. *Tensor E_{ab} je symetrický.*

Důkaz. Z (1,20) a definičních rovnic (1,22) plyne pro tensor E_{ab} přepis:

$$E_{ab} = (\partial_b T_\alpha)\, \partial_a N^\alpha . \tag{1,23}$$

Je však podle (1,17)

$$0 = \partial_a(N^\alpha \partial_b T_\alpha) = (\partial_a N^\alpha)\, \partial_b T_\alpha + N^\alpha \partial_a \partial_b T_\alpha ,$$

tedy $E_{ab} = - N^\alpha \partial_a \partial_b T_\alpha$, z čehož vyplývá $E_{[ab]} = - N^\alpha \partial_{[a} \partial_{b]} t_\alpha = 0$.[12])

Věta 1,5. *Tensor E_{ab} je nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru, t. j. na transformaci* (1,4).

[11]) Mějme na paměti, že předpokládáme hodnost tensoru h_{ab} a tedy též H_{ab} rovnou dvěma.

[12]) Je totiž $\partial_{[a} \partial_{b]} T_\alpha = 0$ vzhledem k záměnnosti příslušných parciálních derivací.

Důkaz. Podle poznámky 1,1 stačí k důkazu tvrzení věty dokázat nezávislost tensoru E_{ab} na transformaci (1,11). Podle (1,22), (1,14), (1,21) dostaneme

$$'E_{ab} = 'L_a^{d'}H_{db} = c^{-1}\, cL_a^d H_{db} = E_{ab}\,.$$

Věta 1,6. *Pro tensory H_{ab}, L_a^c platí:*

$$R_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d} = 2L_{[a}^d H_{b]c}\,, \qquad (1{,}24)_a$$

$$\nabla_{[a}H_{b]c} = 0\,, \qquad (1{,}24)_b$$

$$\nabla_{[a}L_{b]}^c = 0\,, \qquad (1{,}24)_c$$

kde $R_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d}$ je tensor křivosti příslušný konexi Λ_{ab}^c v A_2 a ∇_a je symbol kovariantní derivace příslušný téže konexi.

Důkaz. Vztahy $(1{,}24)_{a,b}$ vyplývají z rovnic (1,18), vztahy $(1{,}24)_c$ z rovnic (1,19) jako podmínky integrability příslušného systému rovnic.[13])

Poznámka 1,5. Vztahy $(1{,}24)_{a,b,c}$ jsou Gauss-Codazziho rovnice známé z metrické geometrie. Rovnice $(1{,}24)_a$ nám dává jiné vyjádření tensoru L_a^c než je uvedeno v (1,20). Vynásobením rovnic (1,24) tensorem H^{bc} a sečtením přes indexy b, c dostaneme ihned přepis $L_a^d = H^{bc}R_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d}$, z kterého plyne pro tensor E_{ab} definovaný v (1,22) $E_{ab} = R_{aec}^{\cdot\cdot\cdot d}H^{ec}H_{db}$.

Hodnost tensoru E_{ab} je zřejmě rovna hodnosti tensoru L_a^c.

4. Případ. $L_a^c = 0$. Nechť pro varietu A_2 v E_3 platí v každém bodě jejího definičního oboru

$$L_a^c = 0 \quad \text{pro} \quad c, a = 1, 2\,. \qquad (1{,}25)$$

Věta 1,7. *Pro plochu A_2 v E_3 s vlastností* (1,25) *tvoří afinní normály o směru N^ν svazek rovnoběžných přímek.*

Důkaz. Z (1,19) plyne za platnosti (1,25) ihned $N^\nu = v^\nu$, kde v^ν je konstantní vektor.

Věta 1,8. *Pro plochu A_2 v E_3 s vlastností* (1,25) *je každá geodetika*[14]) *křivkou rovinnou. Rovina, v níž geodetika leží, je určena afinní normálou plochy a tečnou geodetiky* (*v libovolném jejím bodě*).

Důkaz. Nechť $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a(t))$ jsou rovnice geodetiky plochy A_2. Zaveďme označení

$$\underset{1}{v^\alpha} \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\,, \quad \underset{2}{v^\alpha} = \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2}\,, \quad \underset{3}{v^\alpha} = \frac{\mathrm{d}^3x^\alpha}{\mathrm{d}t^3}\,, \quad \underset{1}{v^c} = \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t}\,.$$

Potom je

$$\underset{1}{v^\alpha} = B_a^\alpha v^a\,, \quad \underset{2}{v^\alpha} = (\partial_b B_a^\alpha)\, \underset{1}{v^a}\underset{1}{v^b} + B_c^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, v^c =$$

$$= B_c^\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{1}{v^c} + \Lambda_{ab}^c\underset{1}{v^a}\underset{1}{v^b}\right) - H_{ab}\underset{1}{v^a}\underset{1}{v^b}N^\alpha\,.^{15)}$$

[13]) Důkaz není zde proveden. Správnost uvedených vztahů vyplývá ihned z práce (A), str. 186, rovnice (2,18), (2,20), (2,21), kde stačí položit $v_a = 0$, $R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = 0$.

[14]) T. j. geodetická křivka při konexi Λ_{ab}^c.

[15]) Zde jsme použili formule (1,18).

Předpokládejme, že je $H_{ab}\underset{1}{v}^a\underset{1}{v}^b \neq 0$. Potom je tedy

$$\underset{2}{v}^\alpha = B^\alpha_c \nabla_t \underset{1}{v}^c - \frac{1}{R} N^\alpha, \quad \left(\frac{1}{R} \equiv H_{ab}\underset{1}{v}^a\underset{1}{v}^b\right). \tag{1,26}$$

Pro afinní geodetiku je však

$$\nabla_t \underset{1}{v}^c = f(t) \underset{1}{v}^c .\text{[16]} \tag{1,27}$$

Podle věty (1,7) je vektor N^ν konstantní podél celé plochy, t. j. $N^\nu = \underset{\circ}{N}^\nu$ (symbol $\underset{\circ}{N}^\nu$ značí afinnormální vektor v některém bodě geodetiky). Můžeme tedy, vzhledem k (1,27), vztah (1,26) přepsat na tvar

$$\underset{2}{v}^\alpha = f(t)\, \underset{1}{v}^\alpha - \underset{\circ}{N}^\alpha \frac{1}{R}. \tag{1,28}$$

Odtud plyne derivováním podle parametru t

$$\underset{3}{v}^\alpha = f'(t)\, \underset{1}{v}^\alpha + f(t)\, \underset{2}{v}^\alpha - \underset{\circ}{N}^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{R}.$$

Dosadíme-li do poslední rovnice za $\underset{\circ}{N}^\alpha$ z rovnice předchozí, dostaneme po úpravě

$$\underset{3}{v}^\alpha = \underset{1}{v}^\alpha \left(f'(t) - R \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R}\right) f(t)\right) + \underset{2}{v}^\alpha \left(f(t) + R \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{R}\right)\right).$$

Odtud je vidět, že vektory $\underset{1}{v}^\alpha$, $\underset{2}{v}^\alpha$, $\underset{3}{v}^\alpha$ jsou lineárně závislé, t. j. křivka je křivkou rovinnou. Z (1,28) pak vyplývá, že rovina křivky obsahuje vektor $\underset{\circ}{N}^\alpha$.

Vynechaný případ, t. j. kdy $H_{ab}\underset{1}{v}^a\underset{1}{v}^b = 0$, je jednoduchý. V tomto případě je křivka jednak asymptotikou, jednak geodetikou (podle předpokladu); je tedy též geodetikou v E_3. Je tedy přímkou, což je opět rovinná čára. Tím je věta dokázána.

Poznámka 1,6. Plochou kvadratickou s vlastností (1,25) je paraboloid. Tento případ s příkladem jiné (nekvadratické) plochy, pro kterou platí (1,25), bude probrán v části II.

5. Případ, kdy hodnost tensoru L^c_a je rovna jedné. Uvažujme nyní takové plochy A_2 v E_3, pro které je $L^1_1 L^2_2 - L^2_1 L^1_2 = 0$, avšak aspoň jeden element L^c_a je od nuly různý.

Věta 1,9. *Nechť pro plochu A_2 v E_3 je hodnost tensoru L^c_a rovna jedné v celém definičním oboru této plochy. Potom každým bodem plochy prochází právě jedna křivka té vlastnosti, že podél této křivky jsou afinní normály plochy rovnoběžné.*

[16]) T. j. existuje taková funkce $f(t)$, že platí (1,27). Relace (1,27) je vlastně definicí afinní geodetiky.

Důkaz. Z předpokladu věty plyne existence takového vektoru $v^a(\eta^1, \eta^2)$ v bodech plochy, že platí

$$L_a^c v^a = 0\,.^{17)} \tag{1,29}$$

Řešením diferenciálních rovnic $\dfrac{d\eta^1}{dt} = v^1$, $\dfrac{d\eta^2}{dt} = v^2$ je pak křivka určena jednoznačně počátečními podmínkami, t. j. bodem na ploše (platí totiž, jak plyne z předpokladů v odst. 1, podmínky Cauchyova existenčního teorému). Nechť $\eta^a = \eta^a(t)$ je rovnice hledané křivky. Z rovnice (1,19) plyne pak podle (1,29):

$$\frac{d\eta^a}{dt}\,\partial_a N^\alpha = B_c^\alpha L_a^c v^a = 0\,,$$

t. j. $\dfrac{d}{dt} N^\alpha = 0$, tedy $N^\alpha = \overset{\circ}{N}{}^\alpha$ ($\overset{\circ}{N}{}^\alpha$ afinnormální vektor v libovolném bodě této křivky). Tím je věta dokázána.

Poznámka 1,7. Příklad plochy tohoto typu je uveden v části II.

6. Plochy středové.

Definice 3. *Plochy v E_3, pro které afinní normály procházejí pevným bodem, nazveme plochami středovými.*

Z vět odstavců 5, 4 plyne, že existují-li takové plochy, potom pro tyto plochy musí být nutně $L_1^1 L_2^2 - L_1^2 L_2^1 \neq 0$.

Předpokládejme tedy, že existuje v E_3 plocha A_2[18]) s vlastnostmi

a) $L_1^1 L_2^2 - L_1^2 L_2^1 \neq 0$,

b) afinní normály procházejí pevným bodem $\xi_0^\varkappa$.

Potom můžeme psát

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a) \equiv \xi_0^\varkappa + \sigma N^\alpha\,, \quad \sigma \neq 0\,, \tag{1,29}$$

kde $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)$ jsou parametrické rovnice plochy; $\sigma(\eta^a)$ je skalár dosud neurčený. Z (1,29) pak plyne podle (1,19):

$$B_a^\alpha = \sigma N^\alpha + \sigma B_c^\alpha L_a^c \quad \left(\sigma_a \equiv \frac{\partial}{\partial\eta^a}\,\sigma\right),$$

t. j.

$$B_c^\alpha(\delta_a^c - \sigma L_a^c) = \sigma_a N^\alpha = 0\,;$$

Odtud vzhledem k lineární nezávislosti vektoru B_1^α, B_2^α, N^α plyne

$$\sigma_a = 0, \quad \delta_a^c - \sigma L_a^c = 0$$

---

[17]) Jde tedy o systém dvou lineárních homog. rovnic pro dvě neznámé v^1, v^2, při čemž hodnost determinantu soustavy je jedna.

[18]) Pro kterou platí předpoklady odst. 1.

a tedy

$$\sigma = \text{konst}\,, \quad L_a^c = \frac{1}{\sigma}\,\delta_a^c\,,$$

$$\sigma = \text{konst} \neq 0\,, \quad L_1^1 = L_2^2 = \frac{1}{\sigma}\,, \quad L_1^2 = L_2^1 = 0\,.$$

Vyslovme nyní tuto větu:

Věta 1,10. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby plocha A_2 v E_3*[19]*) byla plochou středovou, jest:*

$$L_1^1 = L_2^2 = c\,, \quad L_1^2 = L_2^1 = 0 \quad (c \neq 0 \text{ je konstanta})\,. \tag{1,30}$$

Důkaz. Nutnost podmínky věty byla již v úvahách vět předcházejících ověřena.

Pro důkaz postačitelnosti podmínky věty předpokládejme, že pro plochu A_2 v E_3 platí (1,30).

Položme pak $\xi^\alpha = x^\alpha(\eta^a) - \frac{1}{c} N^\alpha$. Odtud plyne:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^a} = B_a^\alpha - \frac{1}{c}\,\partial_a N^\alpha = B_a^\alpha - \frac{1}{c}\,B_b^\alpha L_a^b = B_a^\alpha - B_b^\alpha \delta_a^b = 0\,,$$

t. j. $\xi^\alpha = \underset{0}{\xi}{}^\alpha$ je pevný bod v E_3. Pak můžeme psát:

$$x^\alpha(\eta^a) = \underset{0}{\xi}{}^\alpha + \frac{1}{c}\,N^\alpha\,, \tag{1,31}$$

odkud je zřejmé, že afinní normály procházejí bodem $\underset{0}{\xi}{}^\alpha$.

Věta 1,11. *Průsek středové plochy A_2 v E_3 s libovolnou rovinou obsahující bod plochy a afinní normálu plochy v tomto bodě je křivkou geodetickou v A_2*[20]*).*

Důkaz. Budiž $x^\alpha(\eta^a)$ libovolný bod dané plochy, N^α pak afinní normála v tomto bodě, $\underset{0}{\xi}{}^\alpha$ bod společný všem afinním normálám. Potom rovnici libovolné roviny jdoucí bodem $\underset{0}{\xi}{}^\alpha$ můžeme psát ve tvaru:

$$A_\alpha(X^\alpha - \underset{0}{\xi}{}^\alpha) = 0\,, \tag{1,32}$$

kde A_α, $\alpha = 1, 2, 3$ jsou konstanty ne vesměs rovné nule. Podmínka, že rovina (1,32) obsahuje afinní normálu bodu $x^\alpha(\eta^a)$, vede ke vztahu (podle (1,31))

$$A_\alpha N^\alpha = 0\,, \tag{1,33}$$

což je implicitní vztah mezi proměnnými η^a. Relací (1,33), tedy uvažovaným vztahem mezi proměnnými η^a, je v okolí uvažovaného bodu definována regu-

[19]) Pro kterou platí předpoklady odstavce 1.

[20]) T. j. geodetikou při konexi Λ_{ab}^c.

lární křivka.[21]) Nechť tato křivka, jakožto varieta v A_2, je popsána rovnicemi $\eta^a = \eta^a(t)$. Rovnice této křivky, uvažované jako varieta v E_3, jsou pak

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a(t)) . \tag{1,34}$$

Označíme-li $\underset{1}{v^a} \doteq \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}$ tečný vektor v souřadnicích plochy a v^α tečný vektor křivky (1,34) v E_3, pak je

$$\underset{1}{v^\alpha} = B^\alpha_a \underset{1}{v^a} . \tag{1,35}$$

Derivováním podle parametru t dostaneme z (1,33) $A_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N^\alpha = A_\alpha(\partial_a N^\alpha) \underset{1}{v^a} = 0$ a tedy podle (1,19), (1,30), (1,35) $A_\alpha B^\alpha_b L^b_a \underset{1}{v^a} = c A_\alpha B^\alpha_a \underset{1}{v^a} = c A_\alpha \underset{1}{v^\alpha} = 0$.

Tedy:

$$A_\alpha \underset{1}{v^\alpha} = A_\alpha B^\alpha_a \underset{1}{v^a} = 0 . \tag{1,35*}$$

Odtud plyne dalším derivováním podle t, přihlédneme-li k (1,18), (1,33),

$$A_\alpha \underset{2}{v^\alpha} = A_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B^\alpha_a \underset{1}{v^a} = A_\alpha (B^\alpha_d \Lambda^d_{ab} \underset{1}{v^a} \underset{1}{v^b} - H_{ab} \underset{1}{v^a} \underset{1}{v^b} N^\alpha + B^\alpha_d \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underset{1}{v^d}) = 0 ;$$

tedy

$$A_\alpha B^\alpha_d \nabla_t \underset{1}{v^d} = 0 , \tag{1,36}$$

kde ∇_t je symbol absolutní derivace příslušný konexi Λ^c_{ab} v A_2. Na vztah (1,36) spolu se vztahem (1,35)* se můžeme dívat jako na systém dvou rovnic pro dvě neznámé: $A_\alpha B^\alpha_a$, $a = 1, 2$. Poněvadž vektor $A_\alpha B^\alpha_d$ je nenulový, plyne odtud ihned existence takové funkce $f(t)$, že platí $\nabla_t \underset{1}{v^d} = f(t) \underset{1}{v^d}$, což značí, že křivka je geodetickou v A_2 při konexi Λ^c_{ab}. Tím je věta dokázána.

6. Hlavní směry tensoru L^c_a. Směr vektoru v^a (v bodě plochy A_2), pro který platí vztah

$$L^a_c v^c = \varrho v^a , \tag{1,37}$$

kde ϱ je skalár v A_2, nazýváme *směrem hlavním tensoru* L^a_c. Existuje-li v bodě plochy vektor v^a (nenulový) s vlastností (1,37), potom skalár ϱ musí nutně vyhovovat rovnici

$$\begin{vmatrix} L^1_1 - \varrho & L^2_1 \\ L^1_2 & L^2_2 - \varrho \end{vmatrix} = 0 , \tag{1,38}$$

což je rovnice druhého stupně pro skalár ϱ. Tato rovnice rozepsána podle mocnin ϱ dává kvadratickou rovnici v ϱ s absolutním členem rovným $L^1_1 L^2_2 - L^2_1 L^1_2$, t. j. rovným determinantu z tensoru L^c_a.

[21]) Pro funkci $A_\alpha N^\alpha(\eta^a)$ je $\partial_a(A_\alpha N^\alpha) = A_\alpha \partial_a N^\alpha = A_\alpha B^\alpha_b L^b_a = A_\alpha B^\alpha_b c \delta^b_a = c A_\alpha B^\alpha_b$. Kdyby bylo $A_\alpha B^\alpha_b = 0$, plynulo by odtud, že $A_\alpha = \varphi \,.\, T_\alpha$, t. j. rovina (1,32) by byla tečnou rovinou plochy v uvažovaném bodě, což není pravda.

Podle věty o implicit. funkcích je vztahem (1,33) definována lokálně funkce buď $\eta^1 = \eta^1(\eta^2)$ nebo $\eta^2 = \eta^2(\eta^1)$ se spojitými derivacemi až do řádu čtvrtého. Poslední tvrzení plyne z předpokl. odst. 1.

Předpokládejme, že rovnice (1,38) má nenulový reálný kořen ϱ.[22]) Potom platí:

Věta 1,12. *Vektor A^α takto definovaný*

$$A^\alpha \equiv \frac{1}{\varrho} N^\alpha \,, \tag{1,39}$$

kde ϱ je nenulovým řešením (reálným) rovnice (1,38) *a N^α afinnormální vektor plochy, je nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru, t. j. na transformaci* (1,4).

Důkaz. Z (1,38) a z transformačního vztahu (1,21) plyne ihned $'\varrho = c^{-1}\varrho$. Z (1,39) a (1,16) plyne pak ihned tvrzení věty.

Poznámka 1,7. Jestliže $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)$ jsou jako předtím rovnice plochy A_2 v E_3, potom rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a) = x^\alpha(\eta^a) - \frac{1}{\varrho} N^\alpha = x^\alpha(\eta) - A^\alpha \tag{1,40}$$

je popsána určitá varieta v E_3. Tato varieta může být bodem (jak je tomu v případě ploch středových), mohla by představovat křivku nebo plochu v E_3. V dalším uvedeme podmínky, za kterých je rovnicemi (1,40) popsána regulární plocha v E_3. Podrobný rozbor všech možností pro varietu (1,40) prováděti nebudeme.

Věta 1,13. *Nechť pro plochu A_2 v E_3 je $\varrho = \varrho(\eta^a)$ kořenem rovnice* (1,38)[23]) *těchto vlastností:*

a) *ϱ je nenulový jednoduchý kořen rovnice* (1,38),

b) $\varrho_1 L^1_2 \neq \varrho_2(L^1_1 - \varrho)$, *kde* $\varrho_a \equiv \dfrac{\partial}{\partial \eta^a}\varrho$ $(a = 1, 2)$.

Potom rovnicemi (1,40) *je lokálně popsána regulární plocha v E_3.*

Důkaz. Z předpokladů v odst. 1 plyne, že funkce definované v (1,40) mají spojité parciální derivace v uvažovaném oboru proměnných η^a. K tomu, aby rovnicemi (1,40) byla parametricky popsána plocha, stačí, zjistíme-li, že hodnost matice z elementů $C^\alpha_a \equiv \dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^a}$ je rovna dvěma, t. j., že vektory C^α_1, C^α_2 jsou v uvažovaném oboru lineárně nezávislé.

Definujme vektor S_α, $\alpha = 1, 2, 3$ v bodech uvažovaného oboru takto:

$$S_\alpha = \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} C^\beta_1 C^\gamma_2 \,, \tag{1,41}$$

$$\text{kde } \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{jsou-li } \alpha, \beta, \gamma \text{ různé indexy a permutace sudá,} \\ -1, & \text{jsou-li } \alpha, \beta, \gamma \text{ různé indexy a permutace lichá,} \\ 0, & \text{jsou-li aspoň dva indexy stejné.} \end{cases}$$

[22]) Nebudeme se zde zabývat podrobnou diskusí rovnice (1,38). Pomineme rovněž otázku reálnosti řešení této rovnice.

[23]) ϱ reálné.

Dokážeme-li, že za předpokladu věty je vektor S_α nenulový, budeme s důkazem věty hotovi.

Podle (1,40), (1,19) je

$$C_a^\alpha = B_a^\alpha - \frac{1}{\varrho} B_c^\alpha L_a^c + \frac{1}{\varrho^2} \varrho_a N^\alpha \quad \left(\varrho_a \equiv \frac{\partial \varrho}{\partial \eta^a}\right)$$

a tedy po úpravě

$$C_a^\alpha = - \varrho^{-1}(L_a^c - \varrho\delta_a^c) B_c^\alpha + \varrho^{-2}\varrho_a N^\alpha . \tag{1,42}$$

Poněvadž je ϱ jednoduchým kořenem charakteristické rovnice (1,38), je $L_a^c - \varrho\delta_a^c \neq 0$. Kdyby totiž platilo $L^c_a - \varrho\delta_a^c = 0$, potom by bylo $L_1^1 = L_2^2 = \varrho$, $L_1^2 = L_2^1 = 0$ a charakteristická rovnice (1,38) by měla dvojnásobný kořen $\varrho = L_1^1 = L_2^2$. Dosazením z (1,42) do (1,41) dostaneme

$$\begin{aligned} S_\alpha = {} & \varrho^{-2} e_{\alpha\beta\gamma}[(L_1^c - \varrho\delta_1^c) B_c^\beta (L_2^d - \varrho\delta_2^d) B_d^\gamma] - \\ & - \varrho^{-3} e_{\alpha\beta\gamma} B_c^\beta (L_1^c - \varrho\delta_1^c) \varrho_2 N^\gamma - \varrho^{-3} e_{\alpha\beta\gamma} \varrho_1 N^\beta (L_2^c - \delta_2^c) B_c^\gamma + \\ & + \varrho^{-4} e_{\alpha\beta\gamma} \varrho_1 \varrho_2 N^\beta N^\gamma , \end{aligned}$$

což lze přepsat na tvar

$$\begin{aligned} S_\alpha = {} & \varrho^{-2} e_{\alpha\beta\gamma} B_1^\beta B_2^\gamma \begin{vmatrix} L_1^1 - \varrho & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 - \varrho \end{vmatrix} - \varrho^{-3}[\varrho_2(L_1^1 - \varrho) - \varrho_1 L_2^1] \,. \\ & . \, e_{\alpha\beta\gamma} B_1^\beta N^\gamma - \varrho^{-3}[\varrho_2 L_1^2 - \varrho_1(L_2^2 - \varrho)] \, e_{\alpha\beta\gamma} B_2^\beta N^\gamma + \varrho^{-4} \varrho_1 \varrho_2 e_{\alpha\beta\gamma} N^\beta N^\gamma . \end{aligned}$$

Vzhledem k (1,38) a k definici elementů $e_{\alpha\beta\gamma}$ jsou prvý a čtvrtý sčítanec na pravé straně v předchozí rovnici rovny nule. Můžeme tedy psát

$$S_\alpha = a u_\alpha + b v_\alpha , \tag{1,43}$$

kde pro stručnost jsme položili

$$a = - \varrho^{-3}[\varrho_2(L_1^1 - \varrho) - \varrho_1 L_2^1] , \quad b = - \varrho^{-3}[\varrho_2 L_1^2 - \varrho_1(L_2^2 - \varrho)] , \tag{1,43}$$

$$u_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} B_1^\beta N^\gamma , \quad v_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} B_2^\beta N^\gamma . \tag{1,43}$$

Vektory u_α a v_α jsou však lineárně nezávislé.[24]) Kdyby bylo $S_\alpha = 0$, potom by tedy v důsledku lineární nezávislosti vektorů u_α, v_α muselo být (podle $(1,43)_a$) $a = b = 0$. Podle předpokladů věty je však $a \neq 0$. Tedy S_α je vektor nenulový. Odtud plyne — podle dřívější úvahy — tvrzení věty.

---

[24]) Kdyby byly lineárně závislé, pak by existovaly skaláry λ_1, λ_2, ne současně rovné nule v uvažovaných bodech, takové, že by platilo

$$\underset{1}{\lambda} u_\alpha + \underset{2}{\lambda} v_\alpha = \underset{1}{\lambda} e_{\alpha\beta\gamma} B_1^\beta N^\gamma + \underset{2}{\lambda} e_{\alpha\beta\gamma} B_2^\beta N^\gamma = 0 ;$$

odtud vynásobením veličinou B_2^α bychom dostali $- \underset{1}{\lambda} e_{\alpha\beta\gamma} B_1^\alpha B_2^\beta N^\gamma = - \underset{1}{\lambda} [B_1^\alpha B_2^\alpha N^\alpha] = 0$, z čehož by plynulo $\underset{1}{\lambda} = 0$, neboť determinant $[B_1^\alpha B_2^\alpha N^\alpha]$ je různý od nuly. Podobně bychom dostali $\lambda = 0$, což je tedy spor.

Poznámka 1,8. Jak vyplývá z důkazu věty předchozí, bylo možné místo předpokladu b) v této větě zavést předpoklad, že aspoň jeden ze skalárů a, b definovaných v $(1{,}43)_b$ je různý od nuly v uvažovaném oboru. Podrobný rozbor by ukázal, že současné anulování skaláru a, b z $(1{,}43)_b$ by znamenalo, že skalár ϱ by byl funkcí jen jednoho parametru v případě, že parametrické křivky by byly křivkami hlavními, t. j. křivkami, jichž tečné vektory leží v každém bodě uvažovaného oboru v hlavním směru tensoru L_a^c.

Věta 1,14. *Plocha z věty* (1,13) *s parametrickým popisem* (1,40) *má tuto vlastnost: Tečná rovina plochy* (1,40) *v jejím bodě* $\xi^\alpha(\eta^a)$ *obsahuje afinní normálu v bodě* $x^\alpha(\eta^a)$ *plochy dané.*[25])

Důkaz. Dokážeme, že tečná rovina plochy (1,40) v jejím bodě ξ^α (η^a) obsahuje afinnormální vektor N^ν původní plochy v jejím bodě x^α (η^a). K tomu stačí dokázat, že determinant $D \equiv [C_1^\varkappa, C_2^\alpha, N^\alpha]$, kde C_a^α $(a = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, 3)$ jsou elementy definované v (1,42), je roven nule. Podle (1,41), $(1{,}43)_a$ můžeme však psát

$$D = S_\alpha N^\alpha = \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} C_1^\beta C_2^\gamma N^\alpha = a u_\alpha N^\alpha + b v_\alpha N^\alpha\,,$$

kde veličiny a, b, u_α, b_α jsou popsány v $(1{,}43)_a$, $(1{,}43)_b$. Z předchozích vztahů a z $(1{,}43)_b$ plyne však ihned $D = 0$, čímž je tvrzení věty dokázáno.

Část II

(Příklady na theorii z části I)

1. Plocha afinních normál prostorové křivky v E_3. Budiž v E_3 dána regulární křivka s parametrickým popisem

$$x^\alpha = x^\alpha(t)\,, \quad t \in (t_1, t_2)\,, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{2,1}$$

při čemž předpokládáme, že

a) funkce $x^\alpha(t)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ mají v (t_1, t_2) spojité derivace řádu nejméně čtvrtého;

b) derivace $\dot{x}^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, 3$ nevymizí současně v žádném bodě intervalu (t_1, t_2);

c) determinant $\left[\dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2}, \dfrac{\mathrm{d}^3x^\alpha}{\mathrm{d}t^3}\right] \neq 0$ v (t_1, t_2).

Afinním obloukem křivky (2,1) nazýváme skalár $\sigma(t)$ takto definovaný

$$\sigma(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \left\{\frac{[\dot{x}^\alpha, \ddot{x}^\alpha, \dddot{x}^\alpha]}{[\dot{x}^\alpha, \ddot{x}^\alpha, \dddot{x}^\alpha]_{t=t_0}}\right\}^{\frac{1}{6}} \mathrm{d}t \text{ [26])} \tag{2,2}$$

[25]) T. j. plochy s parametrickým popisem $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)$.

[26]) *F. Nožička*, Křivka v afinním prostoru a její afinní oblouk. Časopis pro pěstování matematiky, roč. *78* (1953), str. 318, věta 6.

(pro stručnost značí tečky nad symbolem x^α derivace podle parametru t), kde t_0 je nějaká zvolená hodnota z intervalu (t_1, t_2).

Křivku (2,1) můžeme (lokálně) vztáhnout k jejímu afinnímu oblouku (definovaném v (2,2)) jakožto parametru. Parametrické rovnice křivky píšeme pak ve tvaru

$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma)\,. \tag{2,2}$$

Zavedeme-li označení

$$\underset{1}{v}^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma}\,, \quad \underset{2}{v}^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma^2}\,, \quad \underset{3}{v}^\alpha = \frac{\mathrm{d}^3x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma^3}\,, \tag{2,3}$$

potom vektor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\underset{3}{v}^\alpha$ je lineární kombinací vektorů $\underset{1}{v}^\alpha$, $\underset{2}{v}^\alpha$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\underset{3}{v}^\alpha = \underset{1}{\lambda}\underset{2}{v}^\alpha + \underset{2}{\lambda}\underset{1}{v}^\alpha\,, \tag{2,4}$$

kde $\underset{a}{\lambda} = \underset{a}{\lambda}(\sigma)$ jsou veličiny charakteristické pro danou křivku.[27])

Přímku o směru $\underset{2}{v}^\alpha$ v uvažovaném bodě dané křivky nazýváme první afinní normálou, nebo krátce afinní normálou dané křivky v uvažovaném bodě.

Budeme se v dalším zabývat plochou vytvořenou afinními normálami dané křivky, tedy plochou s parametrickým popisem

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\sigma, u) \equiv x^\alpha(\sigma) + u\underset{2}{v}^\alpha\,. \tag{2,5}$$

Označíme-li $B_1^\alpha \equiv \dfrac{\partial\xi^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = \partial_1\xi^\alpha$, $B_2^\alpha = \dfrac{\partial\xi^\alpha}{\partial u} = \partial_2\xi^\alpha$, potom dostaneme z (2,5), (2,3)

$$B_1^\alpha = \underset{1}{v}^\alpha + u\underset{3}{v}^\alpha\,, \quad B_2^\alpha = \underset{2}{v}^\alpha \tag{2,6}$$

a odtud, použijeme-li (2,4),

$$\partial_1 B_1^\alpha = \underset{2}{v}^\alpha + u(\underset{2}{\lambda}\underset{1}{v}^\alpha + \underset{1}{\lambda}\underset{2}{v}^\alpha)\,, \quad \partial_1 B_2^\alpha = \partial_2 B_1^\alpha = \underset{3}{v}^\alpha\,, \quad \partial_2 B_2^\alpha = 0\,. \tag{2,7}$$

Vektor t_α o složkách

$$t_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}B_1^\beta B_2^\gamma = e_{\alpha\beta\gamma}\underset{1}{v}^\beta\underset{2}{v}^\gamma + u e_{\alpha\beta\gamma}\underset{3}{v}^\beta\underset{2}{v}^\gamma \text{ [28])} \tag{2,8}$$

je tečným vektorem plochy (2,5).

Z (2,8), (2,3), (2,4) plyne pak

$$\partial_1 t_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}\underset{1}{v}^\beta\underset{3}{v}^\gamma + u\underset{2}{\lambda}e_{\alpha\beta\gamma}\underset{1}{v}^\beta\underset{2}{v}^\gamma\,, \quad \partial_2 t_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}\underset{3}{v}^\beta\underset{2}{v}^\gamma\,. \tag{2,9}$$

---

[27]) Viz práci citovanou v pozn. 26, str. 317, 318.

[28]) $e_{\alpha\beta\gamma}$ je tensor v E_3 takto definovaný:

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{pro vesměs různé indexy a sudou permutaci,} \\ -1 & \text{pro vesměs různé indexy a lichou permutaci,} \\ 0 & \text{jsou-li aspoň dva indexy stejné.} \end{cases}$$

Z (2,9), (2,6) spočteme pak podle (1,2)

$$h_{11} = B_1^\alpha \partial_1 t_\alpha = u^2 \underset{2}{\lambda} \,.\, [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha] \,,$$
$$h_{12} = h_{21} = B_1^\alpha \partial_2 t_\alpha = -\, [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha] \,, \quad h_{22} = B_2^\alpha \partial_2 t_\alpha = 0 \,. \tag{2,10}$$

Pro plochu (2,5) je tedy determinant z tensoru h_{ab} záporný; tedy konkretně

$$h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = -\, [\underset{1}{v}^\alpha \underset{2}{v}^\alpha \underset{3}{v}^\alpha]^2 \,. \tag{2,11}$$

Pro složky tensoru h^{ab} kontragredientního k tensoru h_{ab} dostaneme:

$$h^{11} = 0 \,, \quad h^{12} = -\, [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-1} \,, \quad h^{22} = -\, u^2 \underset{2}{\lambda} [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-1} \,. \tag{2,12}$$

Z (2,10) plyne vzhledem k (2,4)

$$\partial_1 h_{11} = u^2 \dot{\underset{2}{\lambda}} [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha] \,, \quad \partial_1 h_{12} = \partial_1 h_{21} = 0 \,, \quad \partial_1 h_{22} = 0 \,,$$
$$\partial_2 h_{11} = 2u \underset{2}{\lambda} [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha] \,, \quad \partial_2 h_{12} = \partial_2 h_{21} = 0 \,, \quad \partial_2 h_{22} = 0 \,. \tag{2,13}$$

Z údajů (2,6) až (2,13) můžeme spočítat koeficienty konexí $\mathring{\Gamma}^c_{ab}, \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix}$ definovaných v (1,5), (1,6). Odtud spočteme pak vektor M_a definovaný v (1,7). Podrobný, ale poněkud zdlouhavý výpočet vede k výsledku

$$M_a = \frac{1}{2}\left(\begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} - \mathring{\Gamma}^c_{ab}\right) = 0 \,. \tag{2,14}$$

Vzhledem k (1,10) můžeme tedy položit $T_\alpha = t_\alpha$. Podle (1,17) je afinnormální vektor plochy (2,5) řešením rovnic

$$N^\alpha T_\alpha = 1 \,, \quad N^\alpha \partial_1 T_\alpha = 0 \,, \quad N^\alpha \partial_2 T_\alpha = 0 \,.$$

Řešením těchto rovnic dostaneme pro vektor N^α:

$$N^\alpha = (\underset{3}{v}^\alpha + u \underset{2}{\lambda} \underset{2}{v}^\alpha) \,.\, [\underset{1}{v}^\gamma, \underset{2}{v}^\gamma, \underset{3}{v}^\gamma]^{-1} \,, \tag{2,15}$$

o čemž se snadno dosazením do dřívějších definičních rovnic přesvědčíme.

Z (2,15) plyne vzhledem k (2,4)

$$\partial_1 N^\alpha = (\underset{2}{\lambda} \underset{1}{v}^\alpha + \underset{1}{\lambda} \underset{2}{v}^\alpha + u \dot{\underset{2}{\lambda}} \underset{2}{v}^\alpha + u \underset{2}{\lambda} \underset{3}{v}^\alpha) \,.\, [\underset{1}{v}^\gamma, \underset{2}{v}^\gamma, \underset{3}{v}^\gamma]^{-1} \,,$$
$$\partial_2 N^\alpha = \underset{2}{\lambda} \underset{2}{v}^\alpha [\underset{1}{v}^\gamma, \underset{2}{v}^\gamma, \underset{3}{v}^\gamma]^{-1} \,. \tag{2,16}$$

Z (2,16) a (2,9) plyne pak pro složky tensoru E_{ab} definovaného v (1,22) resp. (1,23):

$$E_{11} = -\, (\underset{1}{\lambda} + u \dot{\underset{2}{\lambda}} - u^2 \underset{2}{\lambda}^2) \,, \quad E_{12} = E_{21} = -\, \underset{2}{\lambda} \,, \quad E_{22} = 0 \tag{2,17}$$

a tedy

$$E_{11}E_{22} - E_{12}^2 = -\, \underset{2}{\lambda}^2 \leq 0 \,.$$

Poněvadž (jak plyne ze vztahu $T_\alpha \approx t_\alpha$) je $H_{ab} = h_{ab}$ (viz (1,12)), dostaneme pak pro tensor L_a^c podle definice (1,22) a vztahů (2,12) a (2,17)

$$L_a^c = E_{ab}H_{bc} = E_{ab}h^{bc}\,,$$

$$L_1^1 = E_{11}H^{11} + E_{12}H^{12} = \underset{2}{\lambda}[\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-1}\,,$$

$$L_1^2 = E_{11}H^{12} + E_{12}H^{22} = (\underset{1}{\lambda} + u\dot{\underset{2}{\lambda}} - u^2\underset{2}{\lambda}^2 + u^2\underset{2}{\lambda}^2)\cdot[\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-1} = \tag{2,18}$$

$$= (\underset{1}{\lambda} + u\dot{\underset{2}{\lambda}})[\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-1}\,, \quad L_2^1 = E_{21}H^{11} + E_{22}H^{12} = 0\,,$$

$$L_2^2 = E_{21}H^{12} + E_{22}H^{22} = \underset{2}{\lambda}[\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]\,.$$

Je tedy

$$L_1^1 + L_2^2 = 2\underset{2}{\lambda}[\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-1}\,, \quad L_1^1L_2^2 - L_1^2L_2^1 = \underset{2}{\lambda}^2[\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-2}\,. \tag{2,19}$$

Rovnice pro hlavní směry tensoru L_a^c, tedy rovnice (1,37), vede k charakteristické rovnici (viz (1,38))

$$\varrho^2 - 2\varrho\underset{2}{\lambda}[\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-1} + \underset{2}{\lambda}^2[\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-2} = 0\,,$$

která má dvojnásobný kořen

$$\varrho = \underset{2}{\lambda}[\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-1}\,. \tag{2,20}$$

Předpokládejme, že je $\underset{2}{\lambda} \neq 0$. Potom podle (2,15), (2,20), (1,39) je

$$A^\alpha = \frac{1}{\underset{2}{\lambda}}(\underset{3}{v}^\alpha + u\underset{2}{\lambda}\underset{2}{v}^\alpha)\,. \tag{2,21}$$

Definujme ve smyslu (1,40)

$$\xi^\alpha = x^\alpha - A^\alpha = x^\alpha(\sigma) + u\underset{2}{v}^\alpha - \frac{1}{\underset{2}{\lambda}}(\underset{3}{v}^\alpha + u\underset{2}{\lambda}\underset{2}{v}^\alpha)\,,$$

t. j.

$$\xi^\alpha = x^\alpha(\sigma) - \frac{1}{\underset{2}{\lambda}}\underset{3}{v}^\alpha\,. \tag{2,22}$$

Potom je podle (2,4)

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\sigma} = \underset{1}{v}^\alpha - \frac{1}{\underset{2}{\lambda}}(\underset{2}{\lambda}\underset{1}{v}^\alpha + \underset{1}{\lambda}\underset{2}{v}^\alpha) + \dot{\underset{2}{\lambda}}\frac{1}{\underset{2}{\lambda}^2}\underset{3}{v}^\alpha = -\frac{\underset{1}{\lambda}}{\underset{2}{\lambda}}\underset{2}{v}^\alpha + \frac{\dot{\underset{2}{\lambda}}}{\underset{2}{\lambda}^2}\underset{3}{v}^\alpha\,. \tag{2,23}$$

Z výsledků můžeme činiti tento závěr:

Věta 2,1. *Plocha afinních normál prostorové křivky v E_3 má tyto afinní vlastnosti:*

a) *Je-li pro danou křivku $\underset{1}{\lambda} = \underset{2}{\lambda} = 0$, potom afinní normály této plochy tvoří svazek rovnoběžných přímek.*

b) *Je-li* $\underset{2}{\lambda} = 0$, $\underset{1}{\lambda} \neq 0$, *potom hodnost tensoru* L_a^c *je rovna jedné a pro afinní normály této plochy platí věta* (1,9).

c) *Je-li* $\underset{2}{\lambda} \neq 0$ *konstanta*, $\underset{1}{\lambda} = 0$, *potom je hodnost tensoru* L_c^a *rovna dvěma a plocha afinních normál je plochou středovou*,

d) *Ve všech ostatních případech je hodnost tensoru* L_a^c *rovna dvěma a plocha afinních normál má tu vlastnost, že evoluta této plochy, t. j. varieta definovaná obecně rovnicemi* (1,40), *pro plochu afinních normál specielně pak rovnicemi* (2,22), *je prostorovou křivkou.*

Důkaz tvrzení a) plyne z (2,18) a věty (1,7). Dosadíme-li do (2,18) $\underset{2}{\lambda} = 0$, dostaneme $L_1^1 = L_2^1 = L_2^2 = 0$, $L_1^2 = \lambda[\underset{1}{v^\alpha}\underset{1}{v^\alpha}\underset{2}{v^\alpha}\underset{3}{]}^{-1} \neq 0$. Hodnost tensoru L_c^a je tedy jedna a můžeme aplikovat větu (1,9), čímž je ověřeno tvrzení b). Je-li $\underset{2}{\lambda}$ konstanta různá od nuly a $\underset{1}{\lambda} = 0$, potom plyne z (2,23) $\dfrac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s} = 0$ a tedy $\xi^\alpha =$ $=$ konst, což charakterisuje plochy středové. Z (2,22), (2,23) a (2,19) pak plyne zbývající tvrzení d) věty.

Poznámka 2,1. Vlastnost a) z věty (2,1) má plocha afinních normál každé prostorové křivky s parametrickým popisem $x^\alpha = a^\alpha t^3 + b^\alpha t^2 + c^\alpha t + d^\alpha$, kde $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) jsou konstanty, při čemž determinant $[a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha] \neq 0$. Ze všech křivek v E_3 (regulárních) křivky tohoto typu a jen tohoto typu mají vlastnost a) z věty (2,1).

Plocha afinních normál prostorové křivky s parametrickým popisem $x^\alpha =$ $= a^\alpha e^t + b^\alpha e^{-t} + c^\alpha t + d^\alpha$, $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) konstanty, $[a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha] \neq$ $\neq 0$, má vlastnost b) z věty (2,1).

Vlastnost c) z věty (2,1) má na př. plocha afinních normál prostorové křivky s parametrickým popisem

$$x^\alpha = a^\alpha \int e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right) \mathrm{d}t + b^\alpha \int e^{-\frac{t}{2}} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right) \mathrm{d}t + c^\alpha e^t + d^\alpha\,,$$

kde $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) jsou konstanty, $[a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha] \neq 0$.

2. Kvadratické nesingulární plochy v E_3. Parametrickými rovnicemi

$$x = a \sin \vartheta \cos \varphi\,, \quad y = b \sin \vartheta \sin \varphi\,, \quad z = c \cos \vartheta\,, \qquad (2,24)_a$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$, je popsán elipsoid v E_3. Parametrické rovnice

$$x = a \cosh \vartheta \cos \varphi\,, \quad y = b \cosh \vartheta \sin \varphi\,, \quad z = c \sinh \vartheta\,, \qquad (2,24)_b$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, $\vartheta \in (-\infty, \infty)$, představují popis jednodílného hyperboloidu v E_3. Konečně rovnicemi

$$x = a \sinh \vartheta \cos \varphi\,, \quad y = b \sinh \vartheta \sin \varphi\,, \quad z = c \cosh \vartheta\,, \qquad (2,24)_c$$

$\vartheta \in (-\infty, \infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je popsán dvojdílný hyperboloid v E_3.

V uvažovaných případech $(2,24)_{a,b,c}$ jsou a, b, c kladná čísla. Podrobným výpočtem, který zde provádět nebudeme,[29]) vyjde při vhodné normalisaci funkce $M(\eta^a)$ z (1,9) pro afinnormální vektor N^α definovaný v (1,15) v každém z případů $(2,24)_{a,b,c}$: $x^\alpha = N^\alpha$ pro $\alpha = 1, 2, 3$; odtud plyne hned: $\frac{\partial x^\alpha}{\partial \eta^a} \equiv B_a^\alpha = \partial_a N^\alpha$ a tedy podle (I,19) $L_a^c = \delta_a^c$, kde δ_a^c je Kroneckerovo delta.

Podle věty (1,10) jsou tedy uvažované plochy plochami středovými, což je výsledek samozřejmý.

Rovnicemi

$$x = u\,, \quad y = v\,, \quad z = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{p} + \varepsilon\,\frac{v^2}{q}\right), \quad \varepsilon = \pm 1\,, \quad p > 0\,, \quad q > 0$$

(p, q jsou konstanty) je popsán eliptický paraboloid pro $\varepsilon = +1$, hyperboloický paraboloid pro $\varepsilon = -1$. Pro uvažovanou plochu vyjde $N^\alpha = A^\alpha$, kde A^α jsou konstanty ne vesměs rovné nule. Z předchozího a z formule (1,19) vyčteme ihned, že v tomto případě je $L_a^c = 0$.

Všechny uvažované nesingulární kvadriky byly kvadrikami ve speciální poloze. Avšak výsledek $L_a^c - k\delta_a^c = 0$ (k konstanta) je zřejmě nezávislý na afinní transformaci souřadnic v E_3, t. j. na transformaci

$$^*x^\alpha = a_\beta^\alpha x^\beta + c^\alpha\,,$$

kde a_β^α, c^α jsou konstanty, determinant $[a_\beta^\alpha]$ je různý od nuly. Tedy výsledek platí pro nesingulární kvadriky vůbec.

Předchozí výsledky mají pro nesingulární kvadriky tento zajímavý důsledek:

Podle věty (1,11) *jsou křivky na elipsoidu nebo hyperboloidu, které jsou průnikem těchto ploch s libovolnou rovinou jdoucí jejich středem, křivkami geodetickými při afinní konexi* (1,13). *Podle věty* (1,8) *protne rovina, obsahující afinní normálu* (*tedy průměr*) *paraboloidu, v geodetice ve smyslu konexe* (1,13).

ЗАМЕТКА К АФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА (František Nožička), Прага.

(Поступило в редакцию 22/I 1955 г.)

Статья является продолжением ранее опубликованной работы автора *Le vecteur afinnonormal et la connexion de l'hypersuface das l'espace affin,* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, (Журнал для занятий по математике и физике), Prague, № 75, 1950). Подходящей нормализацией

[29]) Viz též *Nožička F.*, K problému afinní normály a indukované konexe nadplochy v afinním prostoru, Časopis pro pěstování matematiky, roč. *79*, č. 2, str. 130—133.

аффиннонормального вектора получаются т. наз. формулы Френэ для поверхности и к уравнениям Гаусса — которые указывают на полную аналогию с соответствующими соотношениями, известными в метрической геометрии Римана. Ядром работы является дискуссия так называемого второго аффинного тензора поверхности, который в работе обозначен через L_a^c. Этот тензор не зависит (если не взирать на отличный от нуля числовой фактор) от выбора касательного вектора. Главные результаты следующие:

Пусть для поверхности A_2 в E_3 (E_3 *есть трехмерное линейное афинное пространство*), *для которой ранг основного афинного тензора* h_{ab} *равен* $n - 1$, *справедливо:*

а) $L_a^c = 0$ *для* $c, a = 1, 2$. *Тогда афинные нормали образуют пучек параллельных прямых;*

б) L_a^c *имеет во всей области, где определена поверхность* A_2, *ранг* 1. *Тогда через каждую точку поверхности* A_2 *проходит в точности одна кривая, обладающая тем свойством, что афинные нормали к поверхности вдоль этой кривой параллельны.*

в) *пусть* $L_a^c = \sigma\delta_a^c$ $(\sigma \neq 0)$ *в каждой точке области, на которой определена поверхность* (δ_a^c — *дельта Кронеккера*). *Тогда* σ *есть постоянная* (*отличная от нуля*), *и аффинные нормали проходят через одну точку.*

Zusammenfassung

EIN BEITRAG ZUR AFFINGEOMETRIE DER FLÄCHE

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

(Eingegangen am 22. Jänner 1955.)

Der vorliegende Artikel knüpft an die frühere Arbeit des Autors *Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Prag 1950, Nr. *75*, an. Durch geeignete affine Normalisation des Tangentialvektors einer Fläche (im linearen affinen Raum) gewinnt man die sogenannten Frenetschen Formeln der Fläche und die Gauss-Codazzischen Gleichungen, die den analogen Beziehungen der metrischen Geometrie entsprechen. Der Kern der Arbeit liegt in der Diskussion des sogenannten zweiten Affintensors, der mit dem Symbol L_a^c bezeichnet wird. Diese Grösse ist (bis auf einen von Null verschiedenen Faktor) von der Wahl des Tangentialvektors unabhängig. Die Hauptresultate lassen sich folgendermassen formulieren:

Es sei in einem linearen affinen Raum von drei Dimensionen eine reguläre Fläche gegeben. Man setzt voraus, dass der Rang des ersten Affintensors h_{ab} gleich $n - 1$ sei.

a) Es sei $L_a^c = 0$ für $c, a = 1, 2$ im ganzen Definitionsbereich der Fläche. Dann bilden die Geraden in der Richtung der Affinnormalvektoren einen Band von parallelen Geraden.

b) L_a^c hat den Rang eins im ganzen Definitionsbereich der Fläche. Dann existiert in jedem Punkt der Fläche eine und nur eine Kurve mit der Eigenschaft, dass entlang dieser Kurve die Affinnormalvektoren parallel sind.

c) Es sei $L_a^c = \sigma\delta_a^c$ ($\sigma \neq 0$) im ganzen Definitionsbereich der Fläche (δ_a^c ist das Kroneckersche Delta). Dann ist σ konstant und es existiert ein gewisser Punkt im Raum, durch den die Geraden in Richtung der Affinnormalvektoren durchgehen.