REFERÁTY

PLOŠNÝ INTEGRÁL

(Vlastní referát o přednášce, proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 3. října 1955.)

Buď A omezená měřitelná část E_m (m přirozené); buď v vektorová funkce o složkách $v_1, \ldots, v_m$, kde v_i jsou polynomy (v m proměnných). Potom je zřejmě

$$\int_A \operatorname{div} v(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{m} \int_A \frac{\partial v_i(z)}{\partial z_i}\, \mathrm{d}z;$$

dále můžeme psát (je-li $m > 1$) podle Fubiniovy věty na př.

$$\int_A \frac{\partial v_m(z)}{\partial z_m}\, \mathrm{d}z = \int_{E_{m-1}} \left(\int_{A_x^m} \frac{\partial v_m(x, y)}{\partial z_m}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,,$$

kde A_x^m je množina všech $y \in E_1$, pro něž $[x, y] \in A$. Předpokládejme dále, že množina A má tuto vlastnost:

(V_m) *Pro skoro všechna $x \in E_{m-1}$ existuje celé nezáporné číslo r a čísla $a_1 < b_1 < \ldots < a_r < b_r$ tak, že míra množiny $(A_x^m - G) \cup (G - A_x^m)$, kde $G = \bigcup_{j=1}^{r} (a_j, b_j)$, je rovna nule a že platí $\int_{E_{m-1}} \varphi_m(x)\, \mathrm{d}x < \infty$, kde $\varphi_m(x) = r$.*

Nyní je zřejmě

$$\int_A \frac{\partial v_m(z)}{\partial z_m}\, \mathrm{d}z = \int_{E_{m-1}} \left[\sum_{j=1}^{r} (v_m(x, b_j) - v_m(x, a_j)) \right] \mathrm{d}x.$$

Dá se však očekávat, že poslední výraz bude mít smysl i v jiných případech, než když v_m je polynom. Především si všimněme, že body $[x, a_j]$, $[x, b_j]$ leží na hranici H množiny A. Buď tedy f omezená borelovská funkce na množině H. (Borelovské funkce jsou — zhruba řečeno — ty funkce, k nimž dospějeme postupnými limitními přechody, vycházejíce od spojitých funkcí.) Je-li $|f(x)| \leqq C$ ($x \in H$), je $\left| \sum_{j=1}^{r} (f(x, b_j) - f(x, a_j)) \right| \leqq 2Cr = 2C\varphi_m(x)$ pro skoro všechna $x \in E_{m-1}$. Lze dokázat, že funkce

$$\sum_{j=1}^{r} (f(x, b_j) - f(x, a_j)) = g(x) \tag{1}$$

je měřitelná; protože $\int_{E_{m-1}} \varphi_m(x)\, \mathrm{d}x < \infty$, konverguje též $\int_{E_{m-1}} g(x)\, \mathrm{d}x$. Vidíme tedy:

Jestliže omezená měřitelná množina $A \subset E_m$ $(m > 1)$ má vlastnost (V_m), můžeme na systému všech omezených borelovských funkcí f na hranici množiny A definovat funkcionál P_m předpisem

$$P_m(A, f) = P_m(f) = \int_{E_{m-1}} g(x)\, dx\,,$$

kde funkce g je určena vztahem (1).

Index m můžeme zřejmě (po provedení příslušných změn) nahradit kterýmkoli z indexů $1, \ldots, m - 1$. Nechť nyní má omezená měřitelná množina A všechny vlastnosti $(V_1), \ldots, (V_m)$. Potom můžeme na systému všech omezených borelovských vektorů (t. j. vektorových funkcí $v = [v_1, \ldots, v_m]$, kde $v_1, \ldots, v_m$ jsou omezené borelovské funkce) na hranici H množiny A utvořit funkcionál

$$P(v) = \sum_{i=1}^{m} P_i(v_i)\,.$$

Dále se dá ukázat, že existuje konečná míra p na systému všech borelovských množin $B \subset H$ a jednotkový borelovský vektor ν na množině H tak, že pro každý omezený borelovský vektor v na H platí

$$P(v) = \int_H v \,.\, \nu \, dp$$

($v \,.\, \nu$ je ovšem skalární součin). Vidíme, že funkcionál P můžeme skutečně nazvat plošným integrálem (podle plošné míry p ve směru vnější normály ν).

Ze způsobu, jakým jsme došli k funkcionálu P, je ihned vidět:

Jestliže funkce $v_1, \ldots, v_m$ mají spojité derivace 1. řádu v okolí množiny $\bar{A}$, pak pro vektorovou funkci $v = [v_1, \ldots, v_m]$ platí

$$\int_A \operatorname{div} v(z)\, dz = \int_H v \,.\, \nu \, dp\,. \tag{2}$$

Buď nyní $\mathfrak{A}$ systém všech množin $A \subset E_m$, které jsou omezené měřitelné a které mají vlastnosti $V_1, \ldots, V_m$. Vidíme, že ke každému $A \in \mathfrak{A}$ existuje konečná míra p a jednotkový vektor ν tak, že platí (2). Systém $\mathfrak{A}$ byl však sestrojen dosti uměle; přirozenější by bylo vyšetřovat na př. systém $\mathfrak{A}'$ takto definovaný:

Množina A patří do $\mathfrak{A}'$, je-li omezená měřitelná v E_m a existuje-li na hranici H množiny A borelovská míra p a jednotkový borelovský vektor ν tak, že platí (2) pro všechny vektory v, jejichž složky jsou polynomy. Dá se ukázat, že je tím míra p určena jednoznačně a vektor ν „skoro jednoznačně“ (vzhledem k p). Snadno se pak zjistí, že míra p je nutně konečná a že (2) platí pro každý vektor v, jehož složky mají spojité derivace 1. řádu v okolí množiny $\bar{A}$. Můžeme však jít ještě dále.

Všimněme si této věci: Je-li $A \in \mathfrak{A}'$, jsou-li složky vektoru v polynomy a splňuje-li vektor v vztah $\|v(z)\| \leqq 1$ pro každé $z \in A$, platí zřejmě též $\|v(z)\| \leqq 1$ pro každé $z \in H$ a tedy

$$\left|\int_A \operatorname{div} v(z)\, dz\right| = \left|\int_H v \,.\, \nu \, dp\right| \leqq \int_H \|v\| \,.\, \|\nu\| \, dp \leqq p(H)\,.$$

Přiřadíme-li nyní každé omezené měřitelné množině $A \subset E_m$ hodnotu

$$\|A\| = \sup \int_A \operatorname{div} v(z)\, dz$$

(kde v probíhá všechny vektory, jejichž složky jsou polynomy, a kde $\|v(z)\| \leqq 1$ pro každé $z \in A$), vidíme, že pro každé $A \in \mathfrak{A}'$ je $\|A\| \leqq p(H) < \infty$. Utvoříme-li tedy systém $\mathfrak{A}''$ všech omezených měřitelných množin A, pro něž $\|A\| < \infty$, máme vztah

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}''\,.$$

Dá se však ukázat, že všude platí rovnost, t. j. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''$. Při důkaze vztahu $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'$

hrají důležitou roli některé věty z funkcionální analysy. Míra p, příslušná k množině $A \in \mathfrak{A}''$, splňuje vztah $p(H) = \|A\|$. Můžeme tedy říci, že $\|A\|$ udává pro každou omezenou měřitelnou množinu A plošnou velikost jejího povrchu. Zároveň je vidět, že nelze definovat „rozumný“ plošný integrál přes hranici žádné omezené měřitelné množiny A, která nepatří do $\mathfrak{A}''(= \mathfrak{A})$. Systém $\mathfrak{A}$ je silně „invariantní“; je-li totiž φ regulární zobrazení nějakého okolí množiny $\bar{A}$ $(A \in \mathfrak{A})$, je též $\varphi(A) \in \mathfrak{A}$. Je-li mimo to zobrazení φ prosté, platí „transformační vzorec“

$$P(A, v) = P(\varphi(A), w),$$

kde $w(y) = |D(x)|^{-1} . M(x) . v(x)$; M je funkční matice zobrazení φ, D je její determinant, $M(x) . v(x)$ je maticový součin (vektor $v(x)$ pokládáme za sloupec), $y = \varphi(x)$.

K platnosti vztahu (2) jsme předpokládali, že složky vektoru v mají spojité derivace v okolí množiny $\bar{A}$. Tento předpoklad můžeme zeslabit na př. tímto způsobem:

Buď f funkce, definovaná v okolí G množiny $\bar{A}$ $(A \in \mathfrak{A})$. Buď v spojitý vektor na množině G. Nechť pro každou krychli[1]) $K \subset G$ platí

$$\int_K f(x)\,\mathrm{d}x = P(K, v)\,. \tag{3}$$

Potom platí též

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = P(A, v)\,. \tag{4}$$

Má-li omezená množina A tu vlastnost, že funkce proměnné ε

$$\frac{\text{míra } \Omega(H, \varepsilon)}{\varepsilon}$$

(kde $\Omega(H, \varepsilon)$ je ε-ové okolí hranice H množiny A) je omezená pro $0 < \varepsilon < 1$, platí $A \in \mathfrak{A}$ a vztah (4) je správný, jestliže vektor v je spojitý na množině $\bar{A}$, jestliže platí (3) pro každou krychli K, ležící uvnitř A, a jestliže integrál $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje (ve smyslu Lebesgueově).

V konkretních případech je nezbytné umět vyjádřit plošný integrál $P(A, v)$ „klasickým způsobem“, t. j. v parametrickém tvaru. K tomu zavedeme tuto definici:

Řekneme, že φ je A-přípustné zobrazení množiny G, je-li $A \subset E_m$, G otevřená v E_{m-1}, má-li zobrazení φ na množině G spojité derivace 1. řádu a je-li splněna tato podmínka: Buď w^φ vnější součin vektorů $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_{m-1}}$. Pak ke každému bodu $t_0 \in G$ existuje okolí U bodu t_0 a kladné číslo ε tak, že pro každé $t \in U$ a každé $\delta \in (0, \varepsilon)$ platí

$$\varphi(t) + \delta w^\varphi(t) \text{ non} \in A\,,$$
$$\varphi(t) - \delta w^\varphi(t) \in A\,.$$

Platí nyní tato věta:

Nechť $A \in \mathfrak{A}$. Buď φ_n A-přípustné zobrazení množiny G_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Nechť $\varphi_n(G_n) \cap \cap\, \varphi_q(G_q) = \emptyset$ pro $n \neq q$; nechť $p(H - \bigcup_n \varphi_n(G_n)) = 0$.[2]) Potom pro každou omezenou borelovskou funkci f na množině H platí

$$\int_H f\,\mathrm{d}p = \sum_n \int_{G_n} f(\varphi_n(t))\, \|w^{\varphi_n}(t)\|\,\mathrm{d}t\,;$$

[1]) Krychlí rozumíme kartézský součin m uzavřených omezených nezvrhlých intervalů stejné délky.

[2]) H je hranice množiny A, p a v jsou příslušná míra a jednotkový vektor.

pro skoro všechna $t \in G_n$ *platí*

$$\nu(\varphi_n(t)) = \frac{w^{\varphi_n}(t)}{\|w^{\varphi_n}(t)\|} \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

(Vztah $p\ (B) = 0$ je splněn na př. tehdy, jestliže B je borelovská část H a jestliže všech m průmětů množiny B má $m - 1$ — rozměrnou míru 0).

Nakonec se přednášející zmínil o tom, že tato theorie dává některé netriviální výsledky i pro $m = 2$.

Jan Mařík, Praha.