Časopis pro pěstování matematiky

Václav Havel

O jedné větě Kadeřávkově

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 3, 328--330

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117163

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O JEDNÉ VĚTĚ KADEŘÁVKOVĚ

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 10. července 1954.)

DT:513.517

Autor odvozuje analytickými prostředky větu, která úzce souvisí s tímto Kadeřávkovým zobecněním věty Dandelinovy: Buďte μ_1, μ_2 různé kulové plochy, vepsané rotační kuželové ploše $\varkappa$ tak, že jejich průnik s nevrcholovou rovinou ϱ není prázdný. Pak platí $X \epsilon \varrho \cap \varkappa$, právě když součet anebo absolutní hodnota rozdílu délek tečen z X vzhledem k $\mu_1 \cap \varrho$, $\mu_2 \cap \varrho$ je konstantní, při čemž tato konstanta je délka úsečky, kterou vytínají na povrchové přímce plochy $\varkappa$ kružnice $\mu_1 \cap \varkappa$, $\mu_2 \cap \varkappa$.

V jedné své práci[1]) zabýval se prof. Kadeřávek zobecněním některých ohniskových vlastností kuželoseček. Ve větě 6 zmíněné práce zobecňuje přirozeným způsobem větu Dandelinovu. Nejprve zavedeme pomocné označení a pak budeme větu formulovat.

Úmluva 1. *Buď k kružnice v rovině ϱ, B bod roviny ϱ, který neleží uvnitř k a konečně T bod dotyku na tečně, vedené z B ke k. Pak označme $\overline{Bk} = \overline{BT}$.*

Věta 1. *Buďte dány: rotační kuželová plocha $\varkappa$, nevrcholová rovina ϱ a různé kulové plochy μ_1, μ_2, vepsané ploše $\varkappa$ tak, že $k_i = \mu_i \cap \varrho \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$. Označme dále c délku úsečky, kterou vytínají obě kružnice $\varkappa \cap \mu_1$, $\varkappa \cap \mu_2$ na povrchové přímce plochy $\varkappa$. Pak bod X patří do průniku $\varkappa \cap \varrho$, právě když platí některá z rovnic*

$$|\overline{Xk_1} \pm \overline{Xk_2}| = c\,. \tag{1}$$

Argumentace při důkazu nutné podmínky je obdobná jako při větě Dandelinově. V práci[1]) není výslovně dokázána postačující podmínka:

Je-li $X \epsilon \varrho$ a platí-li některá z rovnic (1), pak $X \epsilon \varkappa \cap \varrho$. Buď tedy X bod roviny ϱ, pro nějž platí některá z rovnic (1). Pak $\overline{Xk_i}$ je délka tečny z X k μ_i $(i = 1, 2)$. Sestrojíme-li rovinu σ, obsahující osu plochy $\varkappa$ a bod X, pak platí

$$|\overline{X(\mu_1 \cap \sigma)} \pm \overline{X(\mu_2 \cap \sigma)}| = c\,.$$

Průnik $\varkappa \cap \sigma$ tvoří povrchové přímky t_1, t_2. Zřejmě platí

$$c = \overline{(\mu_1 \cap t_1)\,(\mu_2 \cap t_1)}\,,$$

[1]) O fokálních kružnicích kuželoseček, Čas. pěst. mat. fys. XLVI (1917).

a tedy při vhodném označení je $X \in t_1$. (Připomeňme, že délka vnější společné tečny je různá od délky vnitřní společné tečny dvou kružnic.) Podmínka je dokázána.

Úmluva 2. *Buďte dány kladné konstanty c, m a nezáporné konstanty r_1, r_2. Označme*[2] $k_1 = (x^2 + y^2 = r_1^2)$, $k_2 = ((x - m)^2 + y^2 = r_2^2)$. *Dále buď* $X = (x, y)$ *bod a v nezáporný parametr; při tom nechť platí*

$$\overline{Xk_1} = v\,, \quad \overline{Xk_2} = |c \pm v|\,.$$

Nechť je splněna úmluva. Potom platí rovnice

$$x^2 + y^2 = r_1^2 + v^2\,, \quad (x - m)^2 + y^2 = r_2^2 + (c \pm v)^2\,. \tag{2}$$

Budeme eliminovati parametr v. Odečtením odvodíme rovnici $2mx = m^2 - c^2 + r_1^2 - r_2^2 \pm 2vc$. Dále zavedeme z důvodů stručnosti označení

$$d = m^2 - c^2 + r_1^2 - r_2^2\,. \tag{3}$$

Dostaneme tak rovnici $v^2 = \left(\frac{2mx - d}{2c}\right)^2$. Po dosazení do první z rovnic (2) a po úpravě vychází

$$4(c^2 - m^2)\,x^2 + 4dmx + 4c^2y^2 - 4c^2r_1^2 - d^2 = 0\,. \tag{4}$$

Postup lze obrátit; z rovnic (3), (4) vyplývají tak rovnice (2). Rovnice (4) má diskriminant

$$A = \begin{vmatrix} 4(c^2 - m^2) & 0 & 4dm \\ 0 & 4c^2 & 0 \\ 4dm & 0 & -4c^2r_1^2 - d^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -16(c^2 - m^2)\,c^2(4c^2r_1^2 + d^2) - 16c^2d^2m^2 = -16c^4(4r_1^2(c^2 - m^2) + d^2)\,.$$

Výraz $a = 4r_1^2(c^2 - m^2) + d^2$ lze ještě dále upravit podle (3):

$$a = (c^2 - m^2)^2 + 2(r_1^2 + r_2^2)(c^2 - m^2) + (r_1^2 - r_2^2)^2\,. \tag{5}$$

Po snadném výpočtu plyne, že rovnice $a = 0$ je ekvivalentní s některou z rovnic

$$(c^2 - m^2)_{1,2} = -(r_1 \pm r_2)^2\,, \tag{6}$$

které mají smysl ovšem jen pro $c \leqq m$. Subdeterminant A_{33} je roven výrazu $16c^2(c^2 - m^2)$. Z těchto fakt vyplývá věta, kterou nyní vyslovíme:

Věta 2. *Množina bodů X z úmluvy 2 je kuželosečka k o rovnici* (4). *Je singulární, právě když platí některá z rovnic* (6). *Geometrický význam toho jest, že c je délka společné tečny kružnic k_1, k_2. Je-li k jednoduchá, pak je hyperbolou, parabolou anebo elipsou podle toho, zda platí $c < m$, $c = m$ anebo $c > m$.*

Věnujme se nyní středové kuželosečce k z předešlé věty. Její osy jsou přímky $(y = 0)$, $\left(x = -\frac{dm}{2(c^2 - m^2)}\right)$. Po snadném výpočtu odvodíme, že body

[2]) Závorkou označujeme bodovou množinu, charakterisovanou danou rovnicí.

$\left(\frac{-dm \pm c\sqrt{a}}{2(c^2 - m^2)}, 0\right)$, $\left(-\frac{dm}{2(c^2 - m^2)}, \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{c^2 - m^2}}\right)$ jsou vrcholy. Z toho odvodíme délky poloos: $\frac{c \cdot \sqrt{a}}{2(c^2 - m^2)}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c^2 - m^2}}$. Je-li $c > m$, pak $a > 0$ a z nerovností $\frac{c^2}{(c^2 - m^2)^2} > \frac{1}{c^2 - m^2} \Leftrightarrow m^2 > 0$ vyplývá, že $(y = 0)$ je hlavní osou elipsy k. Nechť tedy platí $c < m$. Nerovnost $a < 0$ platí pak, právě když $(y = 0)$ je hlavní osou. Nerovnost $a > 0$ je ekvivalentní s incidencí

$$m^2 - c^2 \in (\min((r_1 + r_2)^2, (r_1 - r_2)^2), \max((r_1 + r_2)^2, (r_1 - r_2)^2)) . \tag{7}$$

Dosadíme-li $y^2 = r_1^2 - x^2$ (resp. $y^2 = r_2^2 - (x - m)^2$) do rovnice (4), dostaneme po úpravě rovnici $(2x - d)^2 = 0$ (resp. $(2mx - d - 2c)^2 = 0$), která má dvojnásobný kořen. Z toho plyne, že k_i je buď dvojnásob dotyčná kružnice anebo ohnisko vzhledem ke k $(i = 1, 2)$. Shrneme výsledky:

Věta 3. *Kuželosečka k z věty 2 má osu $(y = 0)$, je-li středová, pak má další osu $\left(x = -\frac{dm}{2(c^2 - m^2)}\right)$. Je-li elipsou, pak $(y = 0)$ je hlavní osa. Je-li hyperbolou, pak $(y = 0)$ je hlavní osou právě tehdy, když neplatí (7). Množina k_i je ohnisko, právě když $r_i = 0$; jinak je kružnicí, která má střed na $(y = 0)$ a dvakrát se dotýká kuželosečky k $(i = 1, 2)$.*

Překvapením je, že přímka $(y = 0)$ může být také vedlejší osou hyperboly k.[3]) Tento výsledek nelze totiž odvoditi z věty 1.

[3]) V tomto smyslu je nutno doplnit větu 6 z pojednání[1]).