Zdeněk Vančura
Pláště kongruence koulí

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 3, 317--327

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117162

PLÁŠTĚ KONGRUENCE KOULÍ

ZDENĚK VANČURA, Praha.

(Došlo dne 13. října 1954.) DT:513.717

Tato práce jedná o pláštích kongruence koulí. Vedle odvození rovnic těchto plášťů uvádí a dokazuje tuto jejich vlastnost: Je-li plášť kongruence koulí plocha, jest tečná rovina této plochy v ohnisku F příslušná ohnisková rovina f.

I. Úvahy přípravné.

Uvažujme kongruenci L-koulí

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}}), \tag{1}$$

kde $\mathbf{p}$ označuje L-kouli o hexasférických souřadnicích $p_1(u), p_2(u), \ldots, p_6(u)$.

Buď $u^a = u^a(t)$ $(a = \mathrm{I}, \mathrm{II})$ libovolná kanálová plocha v kongruenci (1). Potom množina společných plošných elementů pevné L-koule $t = t_0$ a L-koulí $\mathbf{r}$, pro něž $\mathbf{v}(t_0) \cdot \mathbf{r} = 0$, kde $\mathbf{v} = v^a \mathbf{p}_a = \dfrac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t} \mathbf{p}_a$, je Ch-korelace kanálové plochy $\dfrac{\mathrm{d}u^{\mathrm{I}}}{v^{\mathrm{I}}} = \dfrac{\mathrm{d}u^{\mathrm{II}}}{v^{\mathrm{II}}} = \mathrm{d}t$ na zkoumané L-kouli $t = t_0$. Tuto Ch-korelaci budeme nazývati *elementární plochou* dané kanálové plochy v kongruenci (1) a značiti $\mathbf{v}$ nebo v^a.

Roviny elementárních ploch na pevné kouli $\mathbf{p}$ kongruence (1) tvoří svazek (projektivní se svazkem elementárních ploch), jehož osa má s koulí $\mathbf{p}$ dva reálné různé body společné právě tehdy, když

$$A_2 > 0, \ (A_2 = a_{\mathrm{I\,I}} a_{\mathrm{II\,II}} - a_{\mathrm{I\,II}}^2, \quad a_{ij} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^j} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j). \tag{[1]}$$

Předpokládejme $A_2 > 0$ a uvažujme kongruenci (1) jen v takové oblasti, kde $p_5 \cdot p_6 \neq 0$. Jelikož používáme homogenních souřadnic, můžeme položiti $p_5 = 1$. Tedy v uvažované oblasti (definiční) bude kongruence (1) obsahovati pouze reálné koule.[1])

[1]) Všude dále uvažujeme kongruenci (1) jen v té oblasti, ve které jsou splněny uvedené předpoklady. Mluvíme potom stručně o kongruenci koulí (1). (Pouze ve větě II nepožadujeme nutně $p_5 = 1$.)

Definice 1. *Všechny elementární plochy podél koule* $\mathbf{p}$ *(dané kongruence koulí) mají společné právě dva reálné plošné elementy. Body (roviny), které jsou součástí zmíněných plošných elementů, budeme označovati jako ohniska* F_h *(ohniskové roviny* f_h*)* $(h = 1, 2)$ *koule* $\mathbf{p}$ *(dané kongruence koulí).* [2][2])

Platí věty:

I. *Buď* $\mathbf{p}$ *koule kongruence koulí* (1). *Potom všechny kanálové plochy v kongruenci* (1), *proložené koulí* $\mathbf{p}$, *mají v ohnisku* F_h *koule* $\mathbf{p}$ *společnou tečnou rovinu* f_h. [2][3])

Důkaz. Kanálová plocha (proložená koulí $\mathbf{p}$ kongruence (1)) jest obálkou jednoparametrického množství koulí $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$. Kružnice, tvořená body Ch-korelace (uvažované kanálové plochy) na kouli $\mathbf{p}$ je identická s hlavní křivkou uvažované kanálové plochy (na kouli $\mathbf{p}$). Roviny Ch-korelace jsou tečné roviny uvažované kanálové plochy v bodech zmíněné hlavní křivky. Tedy všechny kanálové plochy v kongruenci (1), proložené koulí $\mathbf{p}$, mají v bodě F_h společnou tečnou rovinu f_h.

II. Buď $\mathbf{p}$ *koule kongruence koulí* (1). *Potom rovina libovolné elementární plochy* v^c *v kongruenci* (1) *má v pravoúhlých kartézských souřadnicích* x_1, x_2, x_3 *(ve kterých má kongruence koulí rovnice* (1)) *rovnici*

$$\begin{vmatrix} p_1, & v_1 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} p_2, & v_2 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} p_3, & v_3 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_3 + 2^{-1} \begin{vmatrix} p_4, & v_4 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} = 0 \,, \tag{2}$$

kde

$$v_i = v^c \frac{\partial p_i}{\partial u^c} \,. \qquad [2][4])$$

Důkaz. Jelikož $\mathbf{p}$ je koule (kongruence (1)), jest $p_5 \neq 0$. Buďtež (L-koule) $\mathbf{r}$ body Ch-korelace plochy $\mathbf{v} = v^a \mathbf{p}_a$ na kouli $\mathbf{p}$. Potom platí:

$$\mathbf{r} \,.\, \mathbf{r} = 0 \,, \quad r_6 = 0 \,, \quad \mathbf{r} \,.\, \mathbf{p} = 0 \,, \quad \mathbf{r} \,.\, \mathbf{v} = 0 \,.$$

Položme $r_5 = 1$ (což zřejmě můžeme učiniti). Rozepsáním třetí a čtvrté rovnice (z předešlého řádku) dostáváme:

$$r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3 + 2^{-1}(r_4 p_5 + p_4) = 0 \,,$$
$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + 2^{-1}(r_4 v_5 + v_4) = 0 \,.$$

Vynásobme prvou rovnici výrazem v_5, druhou výrazem $-p_5$ a rovnice takto vzniklé sečtěme. Jelikož pro pravoúhlé kartézské souřadnice x_1, x_2, x_3 bodu $\mathbf{r}$ $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)$ platí, vzhledem k předpokladu $r_5 = 1$, $x_i = r_i$ $(i = 1, 2, 3)$, dostáváme výše zmíněným sečtením pro rovinu elementární plochy $\mathbf{v} = v^a \mathbf{p}_a$ rovnici:

$$\begin{vmatrix} p_1, & v_1 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} p_2, & v_2 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} p_3, & v_3 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_3 + 2^{-1} \begin{vmatrix} p_4, & v_4 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

[2]) Rozlišení ohnisek (na první a druhá) viz poznámka 1 za důkazem věty 1.

[3]) [4]) Jelikož důkazy těchto dvou vět nejsou v práci [2] otištěny, uvádíme je zde.

Definice 2. *Geometrické místo ohnisek F_h ($h = 1, 2$) koulí kongruence* (1) *se nazývá h-tý plášť kongruence* (1). [2]

II. Pláště kongruence koulí.

Buďtež x, y, z pravoúhlé kartézské souřadnice, x_1, x_2, x_3, x_4 příslušné homogenní kartézské souřadnice. Uvažujme h-tý plášť kongruence koulí $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ (rovnice vztažené k soustavě souřadnicové x, y, z) v takové oblasti, v níž body

$$A = (d_{24}, -d_{14}, 0, 2d_{12}),\; B = (d_{23}, -d_{13}, d_{12}, 0)\,, \tag{3}$$

kde

$$d_{ij} = 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{I}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{I}}} \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{II}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{II}}} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

existují a jsou od sebe různé. Buď dále

$$k(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - p_4x_4^2 - 2p_1x_1x_4 - 2p_2x_2x_4 - 2p_3x_3x_4\,. \tag{5}$$

Potom platí:

Věta 1. *h-tý plášť* ($h = 1, 2$) *kongruence koulí* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ *má v homogenních kartézských souřadnicích* x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) *rovnice*

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_h d_{24} + \mu_h d_{23}\,, & x_2 &= -\lambda_h d_{14} - \mu_h d_{13}\,, \\ x_3 &= \mu_h d_{12}\,, & x_4 &= 2\lambda_h d_{12}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

při čemž pro λ_h, μ_h *platí*

$$k(\lambda_h A + \mu_h B) = 0\,, \quad \mu_1 : \lambda_1 \neq \mu_2 : \lambda_2\,. \tag{7}$$

Důkaz. Ohniska F_h ($h = 1, 2$) koule $\mathfrak{p}$ (dané kongruence) jsou průsečné body osy svazku rovin všech elementárních ploch (podél koule $\mathfrak{p}$) s koulí $\mathfrak{p}$. Tuto osu stanovíme jako průsečnici rovin elementárních ploch $v^c = (1, 0)$ a $'v^c = (0, 1)$. Potom vzhledem k větě II odstavce I jest osa svazku určena těmito rovnicemi:

$$\begin{aligned} 2\,\frac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{I}}}\,x_1 + 2\,\frac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{I}}}\,x_2 + 2\,\frac{\partial p_3}{\partial u^{\mathrm{I}}}\,x_3 + \frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}}\,x_4 = 0\,, \\ 2\,\frac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{II}}}\,x_1 + 2\,\frac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{II}}}\,x_2 + 2\,\frac{\partial p_3}{\partial u^{\mathrm{II}}}\,x_3 + \frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{II}}}\,x_4 = 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Potom, vzhledem k předpokladům uvedeným před větou 1 a vzhledem k rovnicím (8), má osa svazku s rovinou $x_3 = 0$ právě jeden společný bod A a s nevlastní rovinou $x_4 = 0$ právě jeden společný bod B (viz (3)), při čemž $A \neq B$. Můžeme tedy ohniska F_h ($h = 1, 2$) vyjádřiti ve tvaru

$$F_h = \lambda_h A + \mu_h B\,, \tag{9}$$

při čemž pro λ_h, μ_h platí (7), je-li $k(X) = 0$ rovnice koule $\mathfrak{p}$ (v souřadnicích x_1, x_2, x_3, x_4). Jak snadno plyne z definice hexasférických souřadnic koule $\mathfrak{p}$ [1], jest $k(X) = 0$, kde $k(X)$ je definováno v (5), rovnice koule $\mathfrak{p}$. Rozepíšeme-li symbolickou rovnici (9) (používajíce (3)), dostaneme na základě poznámky 1*) rovnice (6).

Poznámka 1. Ohnisko, přiřazené (nezávisle na $u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}}$) jednomu kořenu rovnice (7), označujeme jako první ohnisko F_1; ohnisko, přiřazené zbývajícímu kořenu rovnice (7), označujeme jako druhé ohnisko F_2. Vzhledem k předpokladům jest $\mu_1 : \lambda_1 \neq \mu_2 : \lambda_2$.

Poznámka 2. Rovnici (7) můžeme rozepsati takto:

$$k(A)\, \lambda_h^2 + k(B)\, \mu_h^2 + k(AB)\, \lambda_h \mu_h = 0\,, \tag{10}$$

kde $k(A)$ resp. $k(B)$ dostaneme z $k(X)$, položíme-li $X = A$ resp. $X = B$. Je-li $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, jest $k(AB) = 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - - p_4a_4b_4 - p_1(a_1b_4 + a_4b_1) - p_2(a_2b_4 + a_4b_2) - p_3(a_3b_4 + a_4b_3))$.

Dále platí:

Věta 2. *Je-li h-tý plášť ($h = 1, 2$) kongruence koulí plocha, jest tečná rovina této plochy v ohnisku F_h příslušná ohnisková rovina f_h.*

Důkaz. Buď h-tý plášť kongruence koulí (1) plocha (v jisté oblasti). Buď F_h libovolný regulární bod této plochy; buď to h-té ohnisko koule $\mathfrak{p}(u)$ kongruence (1). Potom $S = (p_1, p_2, p_3)$ je střed koule $\mathfrak{p}(u)$. Umístěme nyní pravoúhlou kartézskou soustavu souřadnicovou (v E_3) tak, že její počátek splyne s ohniskem F_h a osa z s přímkou F_hS. Potom $A = F_h$, a tedy (jelikož $d_{12}(u)$ je spojitá funkce $u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}}$) $d_{12}(u) \neq 0$ nejen na kouli $\mathfrak{p}(u)$, nýbrž i v jistém jejím okolí. Tedy v bodě F_h a v jistém jeho okolí má h-tý plášť kongruence koulí (1) rovnice (6), při čemž

$$d_{12}(u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}}) \neq 0\,. \tag{11}$$

Mimo to, jelikož ohnisko F_h jest vždy vlastní bod, jest v rovnicích (6)

$$\lambda_h(u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}}) \neq 0\,. \tag{12}$$

Vzhledem k (11) a (12) můžeme tedy rovnice h-tého pláště kongruence (1) (v bodě F_h a v jistém jeho okolí) vyjádřiti v nehomogenních kartézských souřadnicích x, y, z takto:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{d_{24}}{d_{12}} + \frac{\mu_h}{\lambda_h}\frac{d_{23}}{d_{12}}\right), \quad y = \frac{-1}{2}\left(\frac{d_{14}}{d_{12}} + \frac{\mu_h}{\lambda_h}\frac{d_{13}}{d_{12}}\right), \quad z = \frac{1}{2}\frac{\mu_h}{\lambda_h}\,. \tag{13}$$

Máme nyní dokázati, že tečná rovina plochy (13) v bodě $F_h = (0, 0, 0)$ je příslušná ohnisková rovina f_h, t. j. rovina jdoucí bodem F_h kolmo k přímce F_hS.

*) Následuje za důkazem.

Zřejmě platí: Tečná rovina plochy (13) v bodě F_h je příslušná ohnisková rovina f_h právě tehdy, když přímka F_hS je kolmá na tečny obou parametrických křivek plochy (13) v bodě F_h.

Dokážeme tedy, že přímka F_hS je kolmá na tečny obou parametrických křivek plochy (13) v bodě F_h.

Provedeme důkaz této věty pro $h = 1$ (pro $h = 2$ se provede, jak uvidíme, úplně stejně).

K vůli stručnosti napíšeme rovnice plochy (13) takto:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{d_{24}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{d_{23}}{d_{12}}\right), \quad y = \frac{-1}{2}\left(\frac{d_{14}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{d_{13}}{d_{12}}\right), \quad z = \frac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda}. \tag{14}$$

Je-li potom

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$$

vektor o souřadnicích

$$u_1 = \frac{\partial x}{\partial u^{\mathrm{I}}}, \quad u_2 = \frac{\partial y}{\partial u^{\mathrm{I}}}, \quad u_3 = \frac{\partial z}{\partial u^{\mathrm{I}}}$$

resp. vektor o souřadnicích

$$v_1 = \frac{\partial x}{\partial u^{\mathrm{II}}}, \quad v_2 = \frac{\partial y}{\partial u^{\mathrm{II}}}, \quad v_3 = \frac{\partial z}{\partial u^{\mathrm{II}}}$$

a $\mathbf{W} = (w_1, w_2, w_3)$ vektor, jehož umístění jest dvojice bodů S, F_h, máme dokázat, že (v F_h) jest:

$$\mathbf{U} \,.\, \mathbf{W} = 0\,; \tag{15}$$

$$\mathbf{V} \,.\, \mathbf{W} = 0\,. \tag{16}$$

Provedeme nejdříve důkaz (15). Vzhledem k výše popsanému umístění pravoúhlé kartézské soustavy souřadnicové jest v F_h:

$$w_1 = w_2 = 0\,, \quad w_3 \neq 0\,. \tag{17}$$

Tedy dokázat (15) znamená dokázat, že v bodě $F_h = (0, 0, 0)$ $(h = 1)$ jest

$$u_3 = \frac{\partial z}{\partial u^{\mathrm{I}}} = 0\,. \tag{18}$$

Podle definice $\mathbf{W}$ jest

$$w_1 = x - p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{d_{24}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{d_{23}}{d_{12}} - 2p_1\right) = \frac{1}{2d_{12}}\left(d_{24} + \frac{\mu}{\lambda}\,d_{23} - 2d_{12}p_1\right),$$

$$w_2 = y - p_2 = \frac{-1}{2}\left(\frac{d_{14}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{d_{13}}{d_{12}} + 2p_2\right) = \frac{-1}{2d_{12}}\left(d_{14} + \frac{\mu}{\lambda}\,d_{13} + 2d_{12}p_2\right),$$

$$w_3 = z - p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda} - 2p_3\right) = \frac{1}{2d_{12}}\left(\frac{\mu}{\lambda}\,d_{12} - 2d_{12}p_3\right).$$

V bodě $F_\lambda = (0, 0, 0)$ jest tedy vzhledem k (17):

$$d_{24} + \frac{\mu}{\lambda} d_{23} - 2d_{12}p_1 = 0 ; \tag{19}$$

$$d_{14} + \frac{\mu}{\lambda} d_{13} + 2d_{12}p_2 = 0 . \tag{20}$$

Vzhledem ke (14) jest

$$u_3 = \frac{\partial z}{\partial u^{\mathrm{I}}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{I}}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right), \tag{21}$$

kde vzhledem k (10) a (12) pro $\frac{\mu}{\lambda}$ platí

$$k(B) \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + k(AB) \frac{\mu}{\lambda} + k(A) = 0 . \tag{22}$$

Parciální derivací rovnice (22) podle u^{I} dostáváme:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial k(B)}{\partial u^{\mathrm{I}}} + 2k(B) \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{I}}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial k(AB)}{\partial u^{\mathrm{I}}} + k(AB) \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{I}}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}} = 0 ,$$

$$\left[2k(B) \frac{\mu}{\lambda} + k(AB)\right] \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{I}}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial k(B)}{\partial u^{\mathrm{I}}} - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\partial k(AB)}{\partial u^{\mathrm{I}}} - \frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}} ,$$

z čehož, za předpokladu

$$2k(B) \frac{\mu}{\lambda} + k(AB) \neq 0 , \tag{23}$$

dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{I}}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{- \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial k(B)}{\partial u^{\mathrm{I}}} - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\partial k(AB)}{\partial u^{\mathrm{I}}} - \frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}}}{2k(B) \frac{\mu}{\lambda} + k(AB)} . \tag{24}$$

Vzhledem k poznámce 2 za důkazem věty 1 jest:

$$\begin{aligned} k(A) &= d_{24}^2 + d_{14}^2 - 4p_4 d_{12}^2 - 4p_1 d_{12} d_{24} + 4p_2 d_{12} d_{14} , \\ k(B) &= d_{23}^2 + d_{13}^2 + d_{12}^2 , \\ k(AB) &= 2d_{23}d_{24} + 2d_{13}d_{14} - 4p_1 d_{12} d_{13} + 4p_2 d_{12} d_{13} - 4p_3 d_{12}^2 . \end{aligned}$$

Dosadíme-li ze (24) do (21), dostáváme:

$$u_3 = - \frac{1}{2} \frac{1}{2k(B) \frac{\mu}{\lambda} + k(AB)} \left[\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial k(B)}{\partial u^{\mathrm{I}}} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\partial k(AB)}{\partial u^{\mathrm{I}}} + \frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}}\right] . \tag{25}$$

V uvažovaném ohnisku $F_\lambda = (0, 0, 0)$ platí (vzhledem ke (14)):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d_{24}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{d_{23}}{d_{12}}\right) = 0 , \quad \frac{-1}{2} \left(\frac{d_{14}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{d_{13}}{d_{12}}\right) = 0 , \quad \frac{1}{2} \frac{\mu}{\lambda} = 0 ,$$

z čehož plyne:

$$\mu = 0\,, \quad d_{14} = 0\,, \quad d_{24} = 0\,. \tag{26}$$

Vzhledem k (11), (19), (20) dostáváme:

$$p_1 = 0\,, \quad p_2 = 0\,. \tag{27}$$

V ohnisku $F_h = (0, 0, 0)$ jest, vzhledem k (17), (26) a vzhledem k vyjádření w_3, $p_3 \neq 0$, a tedy, vzhledem k (26), (27), (11) a k vyjádření $k(AB)$, splněn předpoklad (23). Jest tedy u_3 v ohnisku $F_h = (0, 0, 0)$ dáno rovnicí (25).

Derivujeme-li parciálně $k(A)$ podle u^{I}, dostaneme:

$$\frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}} = 2d_{24}\frac{\partial d_{24}}{\partial u^{\mathrm{I}}} + 2d_{14}\frac{\partial d_{14}}{\partial u^{\mathrm{I}}} - 4d_{12}^2\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} - 8p_4\frac{\partial d_{12}}{\partial u^{\mathrm{I}}} -$$
$$- 4d_{12}d_{24}\frac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{I}}} - 4p_1d_{24}\frac{\partial d_{12}}{\partial u^{\mathrm{I}}} - 4p_1d_{12}\frac{\partial d_{24}}{\partial u^{\mathrm{I}}} +$$
$$+ 4d_{12}d_{14}\frac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{I}}} + 4p_2d_{14}\frac{\partial d_{12}}{\partial u^{\mathrm{I}}} + 4p_2d_{12}\frac{\partial d_{14}}{\partial u^{\mathrm{I}}}\,.$$

V ohnisku $F_h = (0, 0, 0)$ jest vzhledem k (26) a (27)

$$\frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}} = -\,4d_{12}^2\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} - 8p_4\frac{\partial d_{12}}{\partial u^{\mathrm{I}}}\,, \tag{28}$$

a tedy vzhledem k (25), (26) a (28):

$$u_3 = \frac{1}{-\,2p_3d_{12}^2}\left(d_{12}^2\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} + 2p_4\frac{\partial d_{12}}{\partial u^{\mathrm{I}}}\right). \tag{29}$$

V ohnisku $F_h = (0, 0, 0)$ platí dále vzhledem k (26), (27), (22) a (11):

$$k(A) = -\,4p_4d_{12}^2 = 0\,,$$

t. j. (vzhledem k (11))

$$p_4 = 0\,. \tag{30}$$

Vzhledem k (4) a (26) jest v $F_h = (0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{I}}}\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{II}}} - \frac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{II}}}\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} &= 0\,,\\ \frac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{I}}}\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{II}}} - \frac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{II}}}\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} &= 0\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Jelikož (podle (4) a vzhledem k (11))

$$-\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{I}}}, & \dfrac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{II}}} \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{I}}}, & \dfrac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{II}}} \end{vmatrix} = -\,\frac{1}{2}\,d_{12} \neq 0\,,$$

jest vzhledem k (31):

$$\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} = 0\,, \quad \frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{II}}} = 0\,. \tag{32}$$

Z (29), (30) a (32) tedy plyne, že v ohnisku $F_h = (0, 0, 0)$ $(h = 1)$ platí

$$u_3 = 0 \,, \tag{33}$$

a tedy také (15).

Píšeme-li v právě provedeném důkaze (33) všude u^{II} místo u^{I} (vyjma v (31) a (32)) a v_3 místo u_3, dostáváme

$$v_3 = 0 \,, \tag{34}$$

a tedy také (16).

Tím jsme provedli důkaz věty 2 pro $h = 1$. Jak ihned patrno, jest tento důkaz zároveň důkazem věty 2 pro $h = 2$.

Poznámka 3. Jako příklad kongruence koulí, jejíž oba pláště jsou plochy, uvádíme kongruenci

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\left(x, y, \frac{x^2}{2}, -x^2 - y^2, 1, \frac{x^2}{2}\right), \; x > 0, \; y > 0 \,,$$

kde x, y, z jsou pravoúhlé kartézské souřadnice (viz [2]).

LITERATURA

[1] *V. Hlavatý*: Zur Lie'schen Kugelgeometrie: I. Kanalflächen. Věstník Král. čes. společnosti nauk, Praha 1941.

K Lieově kulové geometrii: II. Kongruence (Elementární vlastnosti). Rozpravy II. třídy České akademie, roč. LI, č. 33.

[2] *Z. Vančura*: Les congruences de Lie-sphères (L-sphères). Spisy přírod. fakulty Karlovy university, č. *194*, str. 20—28, Praha 1950.

Резюме

ФОКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КОНГРУЭНЦИЙ СФЕР

ЗДЕНЕК ВАНЧУРА (Zdeněk Vančura), Прага.

(Поступило в редакцию 13/X 1954 г.)

Под элементарной поверхностью $\boldsymbol{v} = v^a \boldsymbol{p}_a = \dfrac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u^a}$ каналовой поверхности $u^a = u^a(t)$ в конгруэнции сфер $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u^{\text{I}}, u^{\text{II}})$ вдоль фиксированной сферы $t = t_0$ мы понимаем множество поверхностных элементов, общих фиксированной L-сфере $t = t_0$ и L-сферам $\boldsymbol{r}$, для которых имеет место

$\mathbf{v}(t_0) \,.\, \mathbf{r} = 0$. Рассмотрим конгруэнцию сфер $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ в такой области, где $A_2 > 0$ ($A_2 = a_{\mathrm{I\,I}} a_{\mathrm{II\,II}} - a^2_{\mathrm{I\,II}}$, $a_{ij} = \mathbf{p}_i \,.\, \mathbf{p}_j$) [1] и дадим такое определение:

Определение 1. *Все элементарные поверхности вдоль сферы $\mathbf{p}$ конгруэнции сфер $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ имеют в точности два общих (действительных) поверхностных элемента. Точки (плоскости), из которых состоят эти поверхностные элементы, мы назовем фокусами (фокальными плоскостями) сферы $\mathbf{p}$ конгруэнции сфер $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ и обозначим символами F_k (f_k), где $k = 1, 2$.* [2]

Определение 2. *Геометрическое место фокусов F_k ($k = 1, 2$) сфер конгруэнции $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ называется k-той фокальной поверхностью конгруэнции сфер $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$.* [2]

В работе, во-первых, выводятся уравнения фокальных поверхностей конгруэнции сфер $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ (см. теорему 1), во-вторых, рассматривается и доказывается важное геометрическое свойство фокальных поверхностей конгруэнции сфер $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ (см. теорему 2).

Рассмотрим k-тую фокальную поверхность ($k = 1, 2$) конгруэнции сфер $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ в области, в которой существуют две несовпадающие точки

$$A = (d_{24}, \; -d_{14}, \; 0, \; 2d_{12}), \quad B = (d_{23}, \; -d_{13}, \; d_{12}, \; 0) \; ,$$

где

$$d_{ij} = 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{I}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{I}}} \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{II}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{II}}} \end{vmatrix} .$$

Пусть далее

$$s(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - p_4 x_4^2 - 2p_1 x_1 x_4 - 2p_2 x_2 x_4 - 2p_3 x_3 x_4 \; .$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *k-тая фокальная поверхность ($k = 1, 2$) конгруэнции сфер $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ выражается в однородных декартовых координатах x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) уравнениями*

$$x_1 = \lambda_k d_{24} + \mu_k d_{23} \; , \qquad x_2 = -\,(\lambda_k d_{14} + \mu_k d_{13}) \; ,$$
$$x_3 = \mu_k d_{12} \; , \qquad x_4 = 2\lambda_k d_{12} \; ,$$

причем для λ_k, μ_k имеет место

$$s(\lambda_k A + \mu_k B) = 0 \; , \qquad \mu_1 : \lambda_1 \neq \mu_2 : \lambda_2 \; .$$

Теорема 2. *Если k-тая фокальная поверхность ($k = 1, 2$) конгруэнции сфер не вырождается в кривую линию (является действительно поверхностью), то фокальная плоскость f_k касается этой поверхности в фокусе F_k.*

Résumé

LES SURFACES FOCALES DES CONGRUENCES DE SPHÈRES

ZDENĚK VANČURA, Praha.

(Venu le 13 octobre 1954.)

La surface élémentaire $\mathbf{v} = v^a \mathbf{p}_a = \dfrac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^a}$ d'une surface enveloppe de sphères $u^a = u^a(t)$ de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}})$ le long de la sphère $t = t_0$ est par définition l'ensemble des couples focaux, commnuns à la L-sphère $t = t_0$ et aux L-sphères $\mathbf{r}$, où $\mathbf{v}(t_0) \,.\, \mathbf{r} = 0$. On définit (en supposant $A_2 > 0$, $A_2 = a_{\mathrm{I\,I}} a_{\mathrm{II\,II}} - a^2_{\mathrm{I\,II}}$, $a_{ij} = \mathbf{p}_i \,.\, \mathbf{p}_j$) [1]:

Définition 1. *Toutes les surfaces élémentaires le long de la sphère $\mathbf{p}$ d'une congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ ont en commun deux couples focaux. Les éléments des couples focaux sont le point et le plan. On désigne ce point (ce plan) par $F_k(f_k)$ $(k = 1, 2)$ et on l'appelle le foyer (le plan focal) de la sphère $\mathbf{p}$ de la congruence $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$.* [2]

Définition 2. *Le lieu géométrique des foyers F_k $(k = 1, 2)$ des sphères de la congruence $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ s'appelle la $k^{\text{ième}}$ surface focale de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$.* [2]

Ce travail traite des surfaces focales de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$. D'une part on y déduit les équations des surfaces focales de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ (vois théorème 1); d'autre part on y démontre un théorème, concernant une propriété géométrique des surfaces focales de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ (vois théorème 2).

Supposons maintenant la $k^{\text{ième}}$ surface focale $(k = 1, 2)$ de la congruence $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ dans un tel domaine, où $A = (d_{24}, -d_{14}, 0, 2d_{12})$, $B = (d_{23}, -d_{13}, d_{12}, 0)$ sont deux points distincts, où $d_{ij} = 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{I}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{I}}} \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{II}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{II}}} \end{vmatrix}$.

Soit

$$s(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - p_4 x_4^2 - 2p_1 x_1 x_4 - 2p_2 x_2 x_4 - 2p_3 x_3 x_4 \,.$$

On obtient ensuite les théorèmes suivants:

Théorème 1. *La $k^{\text{ième}}$ surface focale $(k = 1, 2)$ de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ a, en coordonnées homogènes cartésiennes x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, les équations suivantes:*

$$x_1 = \lambda_k d_{24} + \mu_k d_{23}\,, \quad x_2 = -(\lambda_k d_{14} + \mu_k d_{13})\,,$$
$$x_3 = \mu_k d_{12}, \qquad x_4 = 2\lambda_k d_{12}\,,$$

où λ_k, μ_k satisfont à l'équation

$$s(\lambda_k A + \mu_k B) = 0\,, \quad \mu_1 : \lambda_1 \neq \mu_2 : \lambda_2\,.$$

Théorème 2. *Si la $k^{\text{ième}}$ surface focale ($k = 1, 2$) de la congruence de sphères $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ est une surface, elle touche le plan focal f_k au foyer F_k.*