Časopis pro pěstování matematiky

Vladimír Mahel

Sextiky invariantní vzhledem ke kvadratickým inversím s třemi body hlavními

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 3, 284--298

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117160`

SEXTIKY INVARIANTNÍ VZHLEDEM KE KVADRATICKÝM INVERSÍM S TŘEMI BODY HLAVNÍMI

VLADIMÍR MAHEL, Praha.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT:513.617.2

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

V této práci je provedeno vyšetřování křivek šestého stupně, invariantních vůči kvadratické inversi s třemi body hlavními a jsou ukázány některé vlastnosti sextik, reprodukovaných více inversemi se společnými body a přímkami hlavními.

1. Pod pojmem inverse budeme v této práci rozumět vždy jen inversi s třemi body hlavními. Při volbě souřadnicového systému tak, že střed inverse je v bodě O_3 a druhé dva hlavní body v bodech O_1 a O_2, je tato inverse dána rovnicemi

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varrho x_1'x_2' \quad (\varrho \neq 0) . \tag{1}$$

Leží-li ještě jednotkový bod na základní kuželosečce inverse, mají rovnice (1) tvar

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2' . \tag{2}$$

Základní kuželosečka těchto inversí má tvar

$$x_3^2 - \varrho x_1x_2 = 0 , \quad \text{resp.} \quad x_3^2 - x_1x_2 = 0 . \tag{3a, 3b}$$

Leží-li střed inverse v souř. bodě O_1 (resp. O_2), druhé dva hlavní body v bodech O_2 a O_3 (resp. O_1 a O_3) a jednotkový bod na základní kuželosečce, mají rovnice inverse tvar

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2'x_3' : x_1'x_2' : x_1'x_3' , \tag{4}$$

resp.

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_2' : x_1'x_3' : x_2'x_3' . \tag{5}$$

Rovnice sextiky budeme v dalším užívat ve tvaru:

$$\left.\begin{aligned} &x_3^6a_{00} + x_3^5(a_{10}x_1 + a_{11}x_2) + x_3^4(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\ &+ x_3^3(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) + \\ &+ x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ &+ x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^3x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^3 + a_{54}x_1x_2^4 + a_{55}x_2^5) + \\ &+ a_{60}x_1^6 + a_{61}x_1^5x_2 + a_{62}x_1^4x_2^2 + a_{63}x_1^3x_2^3 + a_{64}x_1^2x_2^4 + a_{65}x_1x_2^5 + a_{66}x_2^6 = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Při vyšetřování sextik, reprodukovaných inversí, budeme vycházet z těchto vět:

Věta 1. *Nerozložitelné křivce f stupně n-tého, která má v hlavním bodě O_i bod h_i-násobný ($i = 1, 2, 3$), odpovídá inversí* (1) *křivka, která obsahuje nerozložitelnou součást F stupně $2n - h - h_2 - h_3$. Pro F je bod O_1 bodem $(n - h_1 - h_3)$-násobným, O_2 bodem $(n - h_2 - h_3)$-násobným a bod O_3 bodem $(n - h^1 - h_2)$-násobným.*

Věta 2. *Tečny inversní křivky ve středu inverse* (1) *jsou přímky, jimiž se z tohoto bodu promítají průsečíky křivky dané s protilehlou hlavní přímkou; tečny inversní křivky v hlavním bodě O_i ($i = 1, 2$) jsou přímky, které odpovídají přímkám, jimiž se z bodu O_j ($j = 1, 2, i \neq j$) promítají průsečíky křivky dané s protilehlou hlavní přímkou.*

Věta 3. *Leží-li singulární bod křivky mimo hlavní trojstran, odpovídá mu v inversi bod singulární o stejné násobnosti.*

Důkazy všech těchto tří vět dostaneme ihned specialisací obdobných vět pro obecnou kvadratickou transformaci. (Viz na př. BYDŽOVSKÝ: Úvod do algebraické geometrie, str. 618, věty a) až e).)

Věta 4. *Nutná podmínka pro to, aby nerozložitelná křivka stupně n-tého byla invariantní vůči inversi, jest: pro n sudé je střed inverse pro křivku bodem o sudé násobnosti, pro n liché bodem o liché násobnosti a druhé dva hlavní body jsou pro křivku body o stejné násobnosti.*

Důkaz. Mějme nerozložitelnou invariantní křivku n-tého stupně a nechť střed inverse (1) je pro křivku bodem h_3-násobným. Každý paprsek inverse protíná danou křivku ve středu inverse (v násobnosti h_3), v párech odpovídajících si bodů a případně v bodech samodružných, ležících na základní kuželosečce. Kdyby výraz $(n - h_3)$ byl číslo liché znamenalo by to, že na každém paprsku inverse leží jeden samodružný bod inverse, který je zároveň bodem křivky. To by ale znamenalo, že zákl. kuželosečka by měla s křivkou víc než $2n$ bodů společných, a tedy by proti předpokladu byla součástí křivky. Je tedy $(n - h_3)$ číslo sudé.

Druhé tvrzení plyne z věty 1: Je-li bod O_i ($i = 1, 2$) na dané křivce h_i-násobný, je na křivce inversní $(n - h_i - h_3)$-násobný, čili pro invariantní křivku platí:

$$h_i = \tfrac{1}{2}(n - h_3)\,, \quad (i = 1, 2)\,. \tag{7}$$

Už na základě vět 1—4 můžeme říci, že se inversí mohou reprodukovat pouze sextiky

A) s bodem čtyřnásobným ve středu inverse a s obyčejnými body v druhých dvou bodech hlavních (budeme je nazývat sextiky skupiny A),

B) mající ve všech třech bodech hlavních body dvojnásobné (sextiky skupiny B) a

C) sextiky, na nichž střed inverse neleží a v druhých dvou hlavních bodech jsou body trojnásobné (sextiky skupiny C).

2. V tomto odstavci si najdeme podmínky pro koeficienty rovnic invariantních křivek ve všech těchto třech případech.

Věta 5. *Nerozložitelná sextika skupiny* A *se reprodukuje inversí* (2) *tehdy a jen tehdy, když platí:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } a_{00} = a_{10} = a_{11} = a_{20} = a_{21} = a_{21} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{60} = a_{66} = 0 \\ \text{(při čemž alespoň jedno z čísel } a_{4i} \ (i = 1, 2, \ldots, 4) \text{ je různé od nuly)}\,, \end{array}\right\} \quad (8a)$$

$$\text{b) } a_{61} = a_{40}\,, \quad a_{62} = a_{41}\,, \quad a_{63} = a_{42}\,, \quad a_{64} = a_{43}\,, \quad a_{65} = a_{44}\,. \qquad (8b)$$

Důkaz. Podmínky (8a) vyjadřují polohu sextiky vzhledem k souř. systému. Rovnice sextiky při této volbě souř. systému tedy zní:

$$\begin{aligned} f \equiv x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ + x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^3x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^3 + a_{54}x_1x_2^4 + a_{55}x_2^5) + \\ + x_1x_2(a_{61}x_1^4 + a_{62}x_1^3x_2 + a_{63}x_1^2x_2^2 + a_{64}x_1x_2^3 + a_{65}x_2^4) = 0\,. \end{aligned}$$

Provedeme-li na tuto rovnici transformaci (2), dostaneme po vynechání faktoru $x_0x_2x_4^3$ (a po vynechání čárek) rovnici

$$\begin{aligned} F \equiv x_1x_2(x_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ + x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^3x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^3 + a_{54}x^1x_2^4 + a_{55}x_2^5) + \\ + x_3^2\,(a_{61}x_1^4 + a_{62}x_1^3x_2 + a_{63}x_1^2x_2^2 + a_{64}x_1x_2^3 + a_{64}x_2^4) = 0 \end{aligned}$$

porovnáním koeficientů obou rovnic $f \equiv kF$ dostáváme podmínky reprodukce ve tvaru:

$$\begin{array}{lcl} a_{40} = ka_{61}\,, & & a_{61} = ka_{40}\,, \\ a_{41} = ka_{62}\,, & a_{5i} = ka_{5i}\,, & a_{62} = ka_{41}\,, \\ a_{42} = ka_{63}\,, & (i = 1, 2, \ldots, 5)\,, & a_{63} = ka_{42}\,, \\ a_{43} = ka_{64}\,, & & a_{64} = ka_{43}\,, \\ a_{44} = ka_{65}\,, & & a_{65} = ka_{44} \end{array}$$

a z nich určíme číselný faktor k:

Kdyby všechna $a_{5i} = 0$, pak by existovalo řešení $k = \pm 1$; v tom případě však by sextika byla rozložitelná (faktor $x_3^2 \pm x_1x_2$). Je tedy aspoň jedno z těchto čísel různé od nuly a z této rovnice pak plyne $k = 1$ a tím je dokázána nutnost podmínek (8b).

Postačitelnost podmínek se ukáže přímým obrácením tohoto postupu.

Sextika skupiny A, reprodukovaná inversí (2) má tedy rovnici:

$$\left.\begin{aligned} (x_3^2 + x_1x_2)(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ + x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^5x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^2 + a_{54}x_1x_2^4 + a_{55}x_2^5) = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Věta 6. *Nerozložitelná sextika skupiny* B *se reprodukuje inversí* (2) *tehdy a jen tehdy, když platí:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ a_{00} = a_{10} = a_{11} = a_{50} = a_{55} = a_{60} = a_{61} = a_{65} = a_{66} = 0 \\ \text{(při čemž vždy aspoň jedno číslo v každé z trojic} \\ a_{20}, a_{21}, a_{22};\ a_{40}, a_{51}, a_{62};\ a_{44}, a_{54}, a_{64} \text{ je různé od nuly)}, \end{array}\right\} \qquad (10\text{a})$$

$$\text{b)}\quad \left.\begin{array}{llll} a_{51} = a_{30}, & a_{53} = a_{32}, & a_{62} = a_{20}, & \\ & & & a_{64} = a_{22}. \\ a_{52} = a_{31}, & a_{54} = a_{33}, & a_{63} = a_{21}, & \end{array}\right\} \qquad (10\text{b})$$

Věta 6a. *Nerozložitelná sextika skupiny* B *se reprodukuje inversí* (4) *tehdy a jen tehdy, když platí podmínky* (10a) *a podmínky:*

$$\left.\begin{array}{llll} a_{30} = a_{21}, & a_{41} = a_{32}, & a_{52} = a_{43}, & \\ & & & a_{63} = a_{54}. \\ a_{40} = a_{22}, & a_{51} = a_{33}, & a_{62} = a_{44}, & \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Věta 6b. *Nerozložitelná sextika skupiny* B *se reprodukuje inversí* (5) *tehdy a jen tehdy, když platí podmínky* (10a) *a podmínky:*

$$\left.\begin{array}{llll} a_{33} = a_{21}, & a_{44} = a_{20}, & a_{54} = a_{30}, & \\ & & & a_{64} = a_{40}. \\ a_{43} = a_{31}, & a_{53} = a_{41}, & a_{63} = a_{51}, & \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Věta 7. *Nerozložitelná sextika skupiny* C *se reprodukuje inversí* (2) *tehdy a jen tehdy, když platí:*

$$\begin{array}{l} \text{a)}\ a_{00} \neq 0,\quad a_{40} = a_{44} = a_{50} = a_{51} = a_{54} = a_{55} = a_{60} = a_{61} = a_{62} = \\ \qquad = a_{64} = a_{65} = a_{66} = 0, \end{array} \qquad (13\text{a})$$

$$\text{b)}\quad \left.\begin{array}{lll} a_{41} = a_{20}, & a_{43} = a_{22}, & a_{53} = a_{11}, \\ a_{42} = a_{21}, & a_{52} = a_{10}, & a_{63} = a_{00}. \end{array}\right\} \qquad (13\text{b})$$

D ů k a z y vět 6, 6a, 6b a 7 jsou analogické důkazu věty 5.

Rovnice sextiky skupiny B, reprodukované inversí (2), má tedy tvar:

$$\left.\begin{array}{r} (x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\ + x_3(x_3^2 + x_1x_2)(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) + \\ + x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) = 0. \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Rovnice sextiky skupiny C, invariantní vůči téže inversi, vypadá takto:

$$\left.\begin{array}{r} (x_3^6 + x_1^3x_2^3)\, a_{00} + x_3(x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{10}x_1 + a_{11}x_2) + \\ + x_3^2(x_3^2 + x_1x_2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\ + x_3^3(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) = 0. \end{array}\right\} \qquad (15)$$

3. Zajímejme se nyní o možnost reprodukce sextiky více inversemi se společnými hlavními body. Musíme uvažovat dvě možnosti:

1. inverse mají společný střed inverse a hlavní trojstran, ale mají různé základní kuželosečky;

2. inverse mají sice společný hlavní trojstran, ale středy inversí nejsou totožné (střed jedné inverse leží v některém z druhých dvou hlavních bodů druhé inverse).

Věta 8. *Nerozložitelná sextika skupiny* A *se nereprodukuje víc inversemi s týmž středem inverse a s týmiž klavními body.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje nerozložitelná sextika skupiny A, invariantní současně vůči inversi (2) a vůči inversi (1), kde předpokládáme $\varrho \neq 0, \varrho \neq 1$; provedeme-li na sextiku (9) tuto druhou transformaci, dostaneme porovnáním koeficientů (po vynechání čárek a faktoru $x_1x_2x_3^4$) podmínky:

$$a_{4i} = ka_{4i}\,, \qquad a_{5j} = k\varrho a_{5j}\,, \qquad a_{4i} = k\varrho^2 a_{4i}\,,$$
$$(i = 0, 1, \ldots, 4)\,, \quad (j = 0, 1, \ldots, 5)\,, \quad (i = 0, 1, \ldots, 4)\,.$$

Nemá-li se křivka rozpadnout, jsou tyto podmínky splnitelné pouze tak, že $k = 1$, $\varrho = 1$, což je ale spor s předpokladem.

Věta 9. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* B *byla reprodukována více inversemi se společným středem a společnými body hlavními, jest:*

a) tyto inverse jsou dvě a je-li jedna z nich tvaru:

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2'\,, \tag{2}$$

je druhá tvaru:

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : -x_1'x_2'\,; \tag{16}$$

b) splnění podmínek (10) *a podmínek:*

$$a_{30} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0\,. \tag{17}$$

Důkaz. Sextika skupiny B invariantní vůči (2) má rovnici (14); provedeme-li na tuto rovnici transformaci (1) s předpokladem $\varrho \neq 0$ a $\varrho \neq 1$, dostaneme (po vynechání čárek a faktoru $x_1^2x_2^2x_3^2$) porovnáním koeficientů:

$$a_{2i} = ka_{2i}\,, \qquad a_{3j} = k\varrho a_{3j}\,, \qquad a_{4k} = k\varrho^2 a_{4k}\,,$$
$$a_{2i} = k\varrho^4 a_{2i}\,, \qquad a_{3j} = k\varrho^3 a_{3j}\,,$$
$$(i = 0, 1, 2)\,, \quad (j = 0, 1, \ldots, 3)\,, \quad (k = 0, 1, \ldots, 4)\,.$$

Tyto podmínky jsou splnitelné — aniž se křivka rozpadne — pouze tak, že $k = 1$, a buďto je aspoň jedno z čísel a_{3j} různé od nuly a pak nutně $\varrho = 1$, nebo jsou všechna a_{3j} rovna nule a pak také existuje řešení $\varrho = -1$.

Postačitelnost těchto podmínek se ukáže obrácením tohoto postupu.

Některé vlastnosti sextik, reprodukovaných těmito dvěma inversemi budou ukázány v následujícím odstavci.

V dalším budeme ještě potřebovat podmínky, analogické podmínkám věty 9, pro jinou volbu souř. systému:

Věta 9a. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* B *byla reprodukována více inversemi se společným středem a společnými body hlavními, jest:*

a) tyto inverse jsou dvě a je-li jedna z nich tvaru:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \quad x_2'x_3' : x_1'x_2' : x_1'x_3' , \tag{4}$$

je druhá tvaru:

$$x_1 : x_2 : x_3 = - x_2'x_3' : x_1'x_2' : x_1'x_3' ; \tag{18}$$

b) splnění podmínek (10a), (11) *a podmínek:*

$$a_{21} = a_{32} = a_{43} = a_{54} = 0 . \tag{19}$$

Věta 9b. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* B *byla reprodukována více inversemi se spol. středem inverse a společnými body hlavními, jest:*

a) tyto inverse jsou dvě a je-li jedna z nich inverse (5), *je druhá tvaru:*

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_2' : - x_1'x_3' : x_2'x_3' ; \tag{20}$$

b) splnění podmínek (10a), (12) *a podmínek:*

$$a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{51} = 0 . \tag{21}$$

Důkazy vět 9a a 9b jsou naprosto stejné jako důkaz věty 9.

Věta 10. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* C *byla invariantní vůči více inversím se společným středem a společnými body hlavními, jest:*

a) tyto inverse jsou právě tři a je-li jedna z nich inverse (2), *jsou druhé dvě tvaru:*

$$\left.\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varepsilon x_1'x_2' \\ x_1 : x_2 : x_3 &= x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varepsilon^2 x_1'x_2' \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(*kde* ε *je komplexní hodnota třetí odmocniny z 1*);

b) splnění podmínek (13) *a podmínek:*

$$a_{10} = a_{11} = a_{20} = a_{21} = a_{22} = 0 . \tag{23}$$

Důkaz této věty je podobný důkazu věty 9 s tím rozdílem, že vede u nerozložitelné křivky na rovnici $\varrho^3 - 1 = 0$ pro ϱ.

Vlastnosti sextik, reprodukovaných touto trojicí inversí, si ukážeme v odstavci **5**.

Chceme-li se nyní zajímat o sextiky, invariantní vůči dvěma inversím se společným hlavním trojstranem, ale s různými středy, musíme se již omezit pouze na sextiky skupiny B, t. j. mající ve všech třech hlavních bodech body dvojnásobné.

Věta 11. *Nerozložitelná sextika je invariantní současně vůči inversím* (2) *a* (4) *tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny podmínky* (10) *a podmínky:*

$$\left.\begin{aligned} a_{30} = a_{33} = a_{21} , \quad a_{32} &= a_{41} , \quad a_{43} = a_{31} , \\ a_{22} &= a_{40} , \quad a_{44} = a_{20} . \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Důkaz. Proveďme na sextiku (14) transformaci (4); porovnáním koeficientů dostáváme nutné podmínky pro reprodukci:

$$
\begin{array}{llll}
a_{20} = ka_{20}\,, & a_{21} = ka_{30}\,, & a_{40} = ka_{22}\,, & a_{31} = ka_{43}\,, \\
a_{31} = ka_{31}\,, & a_{22} = ka_{40}\,, & a_{41} = ka_{32}\,, & a_{33} = ka_{21}\,, \\
a_{42} = ka_{42}\,, & a_{30} = ka_{21}\,, & a_{43} = ka_{31}\,, & a_{20} = ka_{44}\,, \\
a_{32} = ka_{32}\,, & a_{32} = ka_{41}\,, & a_{44} = ka_{20}\,, & a_{21} = ka_{33}\,. \\
a_{22} = ka_{22}\,, & a_{33} = ka_{30}\,, & a_{30} = ka_{33}\,, &
\end{array}
$$

Kdyby všechny koeficienty v prvém sloupci byly rovny nule, pak křivka je rozložitelná (faktor $x_1 + x_1x_2$); je tedy aspoň jeden z nich různý od nuly a pak $k = 1$ a tím dostáváme podmínky (24).

Postačitelnost se zase ukáže tak, že křivka, jejíž koeficienty splňují podmínky (10) a (24) se provedením transformací (2) a (4) nemění (až na faktor).

Věta 12. *Sextika, reprodukovaná inversemi* (2) *a* (4) *je současně invariantní vůči třetí inversi, která má střed ve zbývajícím vrcholu společného hlavního trojstranu a druhé dva hlavní body ve středech prvých dvou inversí.*

D**ůkaz** je jednoduchý. Podmínky pro reprodukci sextiky z věty 11 jsou identické s podmínkami věty 6b pro reprodukci sextiky inversí (5).

Sextika, reprodukovaná inversemi (2), (4) a (5) má rovnici:

$$
\left.
\begin{array}{r}
(x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\
+ x_3(x_3^2 + x_1x_2)(a_{21}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{21}x_2^3) + \\
+ x_3^2(a_{22}x_1^4 + a_{32}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{31}x_1x_2^3 + a_{20}x_2^4) = 0\,.
\end{array}
\right\} \tag{25}
$$

Vlastnosti této křivky jsou vyšetřovány v odstavci 6.

Hledáme-li maximální počet inversí se společnými hlavními body reprodukující sextiky, jsou nyní myslitelné kombinace inversí z vět 9 a 12, t. j. ke každé z inversí (2), (4) a (5) může existovat právě jedna inverse další podle věty 9 (resp. 9a, resp. 9b). Extrémní případ reprodukce sextiky šesti inversemi je vyšetřován v posledním odstavci.

4. Ve větě 9 byly odvozeny nutné a postačující podmínky pro reprodukci sextiky dvěma inversemi. Všimněme si nyní blíže tohoto případu.

Věta 13. *Inverse*

$$
\begin{array}{l}
T_1 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2' \\
T_2 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : -x_1'x_2'
\end{array}
$$

spolu s kolineací

$$
K \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : -x_3' \tag{26}
$$

a spolu s identitou tvoří komutativní grupu.

D**ůkaz** se provede skládáním těchto transformací a přezkoušením tabulky této grupy:

	J	T_1	T_2	K
J	J	T_1	T_2	K
T_1	T_1	J	K	T_2
T_2	T_2	K	J	T_1
K	K	T_2	T_1	J

(27)

Rovnice sextiky, reprodukované touto grupou transformací, zní:

$$\left.\begin{aligned}(x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\ + x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) = 0\,.\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Věta 14. *Libovolnému bodu M, který neleží na hlavních přímkách a zákl. kuželosečkách obou inversí, přiřazují transformace grupy další tři body (různé navzájem i různé od bodu M). Tato čtyřbodová skupina má tu vlastnost, že kterémukoliv bodu této skupiny odpovídá v kterékoliv transformaci grupy zase bod této skupiny.*

Důkaz. Mějme bod $M(a_1; a_2; a_3)$, pro jehož souřadnice nechť platí $a_1a_2a_3 \neq 0$, $a_3^2 \neq \pm a_1a_2$. V T_1 bodu M odpovídá bod $M_1(a_1a_3; a_2a_3; a_1a_2)$, v T_2 bod $M_2(a_1a_3; a_2a_3; -a_1a_2)$ a v K bod $M_3(a_1; a_2; -a_3)$. Z tabulky grupy je nyní vidět, že podrobíme-li kterýkoliv bod této čtveřice kterékoliv transformaci grupy, dostaneme zase bod skupiny. Tyto čtyři body leží ovšem v jedné přímce, procházející společným středem obou inversí i kolineace.

Věta 15. *Nechť bod M' leží na zákl. kuželosečce jedné inverse (nikoliv v bodě hlavním). Pak transformace grupy (27) (s výjimkou identity a té inverse, v níž je M' samodružný) přiřazují bodu M' jako bod odpovídající M_2' druhý průsečík paprsku inverse bodu M' s toutéž základní kuželosečkou. Volba obyčejných dvojnásobných bodů sextiky v dvojici bodů M' a M_2' je ekvivalentní dvěma lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Důkaz. Nechť pro souřadnice bodu M' platí $a_1a_2a_3 \neq 0$, $a_3^2 - a_1a_2 = 0$; pak souřadnice bodu M' můžeme psát ve tvaru $M'(a_1^2; a_3^2; a_1a_3)$; podle označení z předchozí věty platí $M' = M_1'$ a $M_2' = M_3'$, což je právě průsečík paprsku inverse bodu M' s kuželosečkou $x_3^2 - x_1x_2 = 0$. Tento pár bodů mohl by splynout pouze v bodě hlavním a to je předpokladem vyloučeno. Obdobně by se důkaz provedl pro bod na druhé zákl. kuželosečce. Tvrzení o počtu podmínek pro určení křivky se dokáže tak, že dosadíme souřadnice bodu M' do rovnice křivky a do jejích prvých parc. derivací. Dá se pak ukázat, že tato soustava 4 homog. lin. rovnic pro koeficienty křivky má hodnost právě 2. Bod M_2' musí pak být pro křivku rovněž bodem dvojnásobným podle věty 3.

Na základě těchto dvou pomocných vět můžeme vyslovit větu o singulárních bodech reprodukovaných sextik:

Věta 16. *Nerozložitelné sextiky reprodukované grupou (27) mají pouze body dvojnásobné. Mají-li pouze obyčejné body dvojnásobné, mohou být pouze rodu 7, 5, 3 a 1. U těchto sextik leží všechny body dvojnásobné na zákl. kuželosečkách obou inversí.*

Důkaz. Sextika invariantní vůči grupě (27) má v hlavních bodech body dvojnásobné (a je tedy rodu nejvýše 7). Kdyby tato sextika měla ještě další bod singulární aspoň trojnásobný, musela by mít podle vět 14 a 15 ještě jeden (nebo tři) body sing. o stejné násobnosti, a pak paprsek inverse, na němž tyto body leží, by měl s křivkou nejméně 8 průsečíků společných a tedy by křivka byla rozložitelná. Kdyby měla sextika bod dvojnásobný ve čtveřici bodů z věty 14, měl by zase paprsek inverse 10 průsečíků s křivkou. Mohou tedy u nerozložitelné sextiky další body dvojnásobné tvořit pouze dvojice bodů z věty 15 nebo může ležet jeden bod dvojnásobný na ose kolineace **K**. V tomto případě by však podle věty 2 nebyl ve středu inverse obyčejný bod dvojnásobný.

Přitom u sextiky rodu 1 leží dva páry dvojnásobných bodů (kromě bodů hlavních) na jedné zákl. kuželosečce, kdežto třetí pár leží na zákl. kuželosečce druhé inverse. Přesto však těchto 6 bodů má zvláštní polohu:

Věta 17. *U sextiky rodu* 1 *z předchozí věty leží* 6 *bodů dvojnásobných* (*kromě bodů hlavních*) *na jisté kuželosečce.*

Důkaz. Nechť dva páry dvojnásobných bodů leží na zákl. kuželosečce $x_3^2 - x_1x_2 = 0$, t. j. jejich souřadnice mají tvar:

$$M(a_1^2;\, a_3^2;\, a_1a_3)\,,\quad M'(a_1^2;\, a_3^2;\, -a_1a_3)\,,\quad (a_1a_3 \neq 0)$$
$$N(b_1^2;\, b_3^2;\, b_1b_3)\,,\quad N'(b_1^2;\, b_3^2;\, -b_1b_3)\,,\quad (b_1b_3 \neq 0)\,;$$

třetí pár bodů nechť leží na druhé zákl. kuželosečce $x_3^2 + x_1x_2 = 0$, takže jejich souřadnice jsou

$$P(c_1^2;\, -c_3^2;\, c_1c_3)\,,\quad P'(a_1^2;\, -c_3^2;\, -c_1c_3)\,,\quad (c_1c_3 \neq 0)\,,$$

při čemž předpokládáme, že P neleží na spojnicích MM', NN'. Pak determinant

$$\begin{vmatrix} a_1^4 & a_3^4 & a_1^2a_3^2 & -a_1^3a_3 & -a_1a_3^3 & a_1^2a_3^2 \\ a_1^4 & a_3^4 & a_1^2a_3^2 & a_1^3a_3 & a_1a_3^3 & a_1^2a_3^2 \\ b_1^4 & b_3^4 & b_1^2b_3^2 & -b_1^3b_3 & -b_1b_3^3 & b_1^2b_3^2 \\ b_1^4 & b_3^4 & b_1^2b_3^2 & b_1^3b_3 & b_1b_3^2 & b_1^2b_3^2 \\ c_1^4 & c_3^4 & c_1^2c_3^2 & c_1^3c_3 & -c_1c_3^3 & -c_1^2c_3^2 \\ c_1^4 & c_3^4 & c_1^2c_3^2 & -c_1^3c_3 & c_1c_3^3 & -c_1^2c_3^2 \end{vmatrix}$$

je nulový, jak se snadno přesvědčíme odečtením sudých řádků od lichých a rozvedením podle prvých tří sloupců pomocí Laplaceovy věty.

Věta 18. *Paprsek inverse protíná reprodukovanou sextiku v bodech po dvou harmonicky sdružených* (*vzhledem ke středu inverse a průsečíku paprsku inverse s hlavní přímkou, neprocházející středem inverse*). *Tečny křivky v párech odpovídajících si bodů se protínají na hlavní přímce, neprocházející středem inverse.*

Důkaz této věty plyne ihned z toho, že kolineace (26) je involutorní perspektivní kolineace se středem ve středu obou inversí a s osou kolineace v hlavní přímce, neprocházející středem. Viz na př. J. Vojtěch: Rovinné sextiky invariantní při periodických kolineacích (Věstník Král. české společnosti nauk, 1913).

5. V tomto odstavci si uvedeme věty, obdobné větám předchozího odstavce, pro sextiky skupiny C, reprodukované trojicí inversí (2) a (22). Důkazy nebudeme provádět, protože jsou rovněž obdobné.

Věta 19. *Inverse*

$$T_1 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \ \ x_1'x_2' \,,$$
$$T_2 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \ \varepsilon x_1'x_2' \,,$$
$$T_3 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varepsilon^2 x_1'x_2' \,,$$

(kde ε, ε^2 jsou kompl. sdružené hodnoty $\sqrt[3]{1}$), spolu s kolineacemi

$$K_1 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : \varepsilon^2 x_3' \,,$$
$$K_2 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : \varepsilon x_3'$$

a spolu s identitou tvoří grupu.

Tabulka této grupy vypadá takto:

	J	T_1	T_2	T_3	K_1	K_2
J	J	T_1	T_2	T_3	K_1	K_2
T_1	T_1	J	K_1	K_2	T_2	T_3
T_2	T_2	K_2	J	K_1	T_3	T_1
T_3	T_3	K_1	K_2	J	T_1	T_2
K_1	K_1	T_3	T_1	T_2	K_2	J
K_2	K_2	T_2	T_3	T_1	J	K_1

(29)

Rovnice sextiky, reprodukované touto grupou, zní:

$$x_3^6 a_{00} + x_3^3(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) + x_1^3x_2^3a_{00} = 0 \,. \tag{30}$$

Věta 20. *Libovolnému bodu M, který neleží na hlavních přímkách a zákl. kuželosečkách inversí, přiřazují transformace grupy* (29) *dalších pět bodů* (*různých navzájem i od bodu M*); *tato šestibodová skupina má tu vlastnost, že kterémukoliv bodu této skupiny odpovídá v kterékoliv transformaci grupy zase bod této skupiny.*

Věta 21. *Nechť bod M leží na zákl. kuželosečce jedné inverse* (*nikoliv v bodě hlavním*). *Pak transformace grupy* (29) (*s výjimkou identity a inverse, v níž je M samodružný*) *přiřazují bodu M jako body odpovídající vždy jeden z průsečíků paprsku inverse bodu M s druhými dvěma zákl. kuželosečkami. Volba obyčejných dvojnásobných bodů sextiky* (30) *v této trojici bodů je ekvivalentní dvěma lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Věta 22. *Nerozložitelné sextiky invariantní vůči grupě* (29) *mající dva obyčejné body trojnásobné v bodech hlavních* (*nikoliv ve středu inversí*) *mohou být pouze rodu* 4 *nebo* 1. (*V tomto případě další tři body dvojnásobné leží v trojici bodů z předchozí věty.*)

Důkazy vět 20—22 jsou anologické důkazu vět 14—16.

6. Ve větě 12 bylo ukázáno, že existují sextiky, reprodukované třemi inversemi se společným hlavním trojstranem, ale s různými středy inversí. Všimněme si blíže tohoto případu:

Věta 23. *Inverse*

$$\left.\begin{aligned} T_1 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2' , \\ T_2 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_2'x_3' : x_1'x_2' : x_1'x_3' , \\ T_3 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_2' : x_1'x_3' : x_2'x_3' \end{aligned}\right\}$$

spolu s kolineacemi

$$\left.\begin{aligned} K_1 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_3' : x_1' : x_2' , \\ K_2 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_2' : x_3' : x_1' \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

a spolu s identitou tvoří grupu.

Důkaz této věty je stejný jako důkaz analogických vět 13 a 19. Také tabulka této grupy je naprosto stejná jako tabulka grupy z věty 19.

Věta 24. *Libovolnému bodu M, který neleží na žádné z hlavních přímek a na žádné ze základních kuželoseček inversí, přiřazují všechny transformace grupy* (31) *dalších pět bodů* (*různých navzájem i od bodu M*). *Volba dvojnásobných bodů invariantní sextiky v této šestibodové skupině je ekvivalentní třem lineárním homog. podmínkám pro určení křivky.*

Věta 25. *Leží-li bod M na jediné základní kuželosečce, pak všechny transformace grupy* (31) *mu přiřazují jako body odpovídající další dva body* (*různé navzájem i od bodu M*). *Volba dvojnásobných bodů sextiky v této trojici bodů je ekvivalentní dvěma lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Důkazy těchto dvou vět jsou naprosto stejné jako důkaz věty 14 a 15.

Věta 26. *Leží-li bod M v průsečíku dvou základních kuželoseček, je také samodružným bodem v třetí inversi. Volba dvojnásobného, resp. trojnásobného, resp. čtyřnásobného bodu v tomto průsečíku všech tří zákl. kuželoseček je ekvivalentní jedné, resp. dvěma, resp. čtyřem lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Důkaz. Základní kuželosečky mají rovnice:

$$x_3^2 - x_1x_2 = 0 ; \quad x_1^2 - x_2x_3 = 0 ; \quad x_2^2 - x_1x_3 = 0 ;$$

prvé dvě kuželosečky se protínají v bodech:

$$(0, 1, 0) ; \quad (1, 1, 1) ; \quad (\varepsilon^2, \varepsilon, 1) ; \quad (\varepsilon, \varepsilon^2, 1) ,$$

z nichž první je bod hlavní a zbývající tři leží také na zákl. kuželosečce třetí inverse. Vyjádření počtu podmínek, které potřebuje volba singulárního bodu křivky v průsečíku zákl. kuželoseček, provedeme opět tak, že dosadíme souřadnice tohoto průsečíku do rovnice křivky (25) a do jejích prvých, resp. prvých a druhých, resp. prvých, druhých a třetích parc. derivací této rovnice a určíme hodnost soustavy lin. rovnic, které takto obdržíme.

Na základě pomocných vět 24—26 můžeme říci, že grupou (31) se reprodukují i sextiky s vyššími singularitami. Tak se může reprodukovat sextika s jedním bodem čtyřnásobným (v průsečíku všech tří zákl. kuželoseček) a s třemi body dvojnásobnými (v bodech hlavních), sextika s dvěma body trojnásobnými (v průsečících zákl. kuželoseček) a s třemi body dvojnásobnými (v hlavních bodech), atd.

Nebudeme se zabývat všemi těmito případy a obrátíme se k otázce, nadhozené v závěru odstavce 3, totiž k možnosti reprodukce sextiky grupou (31) a dalšími třemi inversemi z vět 9, 9a a 9b.

7. Věta 27. *Sextika reprodukovaná grupou* (31) *je současně invariantní vůči grupě* (27) *tehdy a jen tehdy, když:*

$$\left.\begin{aligned} a_{00} &= a_{10} = a_{11} = a_{21} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{41} = a_{43} = a_{50} = a_{51} = \\ &= a_{52} = a_{53} = a_{54} = a_{55} = a_{60} = a_{61} = a_{63} = a_{65} = a_{66} = 0\,, \\ &a_{40} = a_{22}\,, \quad a_{44} = a_{20}\,, \quad a_{62} = a_{20}\,; \quad a_{64} = a_{22}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Jsou-li tyto podmínky splněny, je sextika také invariantní vůči inversím (18) *a* (20).

Důkaz. Nutné a postačující podmínky pro reprodukci sextiky grupou (27) jsou podmínky (10) a (17) z věty 9 a pro reprodukci sextiky grupou (31) podmínky (10) a (24). Spojíme-li oboje tyto podmínky, dostaneme podmínky naší věty. Druhá část věty plyne z toho, že splněním podmínek (32) jsou také splněny nutné a postačující podmínky vět 9a a 9b.

Sextika, reprodukovaná těmito šesti inversemi má rovnici:

$$\left.\begin{aligned} x_3^4(a_{20}x_1^2 + a_{22}x_2^2) + x_3^2(a_{22}x_1^4 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{20}x_2^4) + \\ + x_1^2x_2^2(a_{20}x_1^2 + a_{22}x_2^2) = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Věta 28. *Sextiky sítě* (32) *mají v bodech hlavních obyčejné uzly až na dva svazky sextik, které tam mají dvojnásobné body s jedinou tečnou s dotykem čtyřbodovým.*

Důkaz. Dvojice tečen ve všech hlavních bodech jsou vyjádřeny ryze kvadratickou rovnicí, na př. dvojice tečen v bodě O_3 má tvar: $a_{20}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0$. Splynout tyto dvě přímky mohou jedině tehdy, je-li jeden z koeficientů a_{20}, a_{22} roven nule (kdyby byly oba současně rovny nule pak se křivka rozpadne na dvojnásob počítané hlavní přímky). Pak touto jedinou tečnou je jedna z hlavních přímek, mající v bodě dotyku styk čtyřbodový (druhé dva průsečíky s křivkou jsou v druhém bodě hlavním). Vzhledem k tomu, že tyto dvojice tečen mají ve všech hlavních bodech stejný diskriminant, nastane tento zjev současně ve všech třech hlavních bodech.

Věta 29. *Tři svazky sextik sítě* (32) *s obyčejnými body dvojnásobnými v hlavních bodech mají tu vlastnost, že dvojice tečen v těchto dvojnásobných bodech se dotýkají jediné kuželosečky.*

Důkaz. Determinant, vyjadřující podmínku, aby šest přímek

$$\begin{gathered} x_1\sqrt{a_{00}} + \mathrm{i}x_2\sqrt{a_{22}} = 0\,, \quad x_2\sqrt{a_{00}} + \mathrm{i}x_3\sqrt{a_{20}} = 0\,, \quad x_1\sqrt{a_{22}} + \mathrm{i}x_3\sqrt{a_{00}} = 0\,, \\ a_1\sqrt{a_{00}} - \mathrm{i}x_2\sqrt{a_{22}} = 0\,, \quad x_2\sqrt{a_{00}} - \mathrm{i}x_3\sqrt{a_{20}} = 0\,, \quad x_1\sqrt{a_{22}} - \mathrm{i}x_3\sqrt{a_{00}} = 0 \end{gathered}$$

se dotýkalo kuželosečky, má hodnotu $8\mathrm{i}(a_{00}^3 - a_{22}^3)\,.\sqrt{a_{00}^3a_{22}^3}$. Je tedy roven nule tehdy a jen tehdy, je-li $a_{00}^3 = a_{22}^3$.

Věta 30. *V síti* (32) *existují tři svazky sextik, které mají další čtyři body dvojnásobné.*

Důkaz. Vzhledem k větám (14), (15), (24), (25) a (26) jediné skupiny bodů, které jako celek reprodukují všechny inverse a které mají nejvýš 7 bodů, jsou skupiny, tvořené vždy jedním průsečíkem zákl. kuželoseček inversí grupy (31) a těmi třemi body, které mu přiřadí inverse (16), (18) a (20). Jsou to tyto čtveřice bodů:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{a)} & (1, 1, 1)\,, & (1, 1, -1)\,, & (1, -1, 1)\,, & (-1, 1, 1)\,; \\ \text{b)} & (\varepsilon^2, \varepsilon, 1)\,, & (\varepsilon^2, \varepsilon, -1)\,, & (\varepsilon^2, -\varepsilon, 1)\,, & (-\varepsilon^2, \varepsilon, 1)\,; \\ \text{c)} & (\varepsilon, \varepsilon^2, 1)\,, & (\varepsilon, \varepsilon^2, -1)\,, & (\varepsilon, -\varepsilon^2, 1)\,, & (-\varepsilon, \varepsilon^2, 1)\,. \end{array}\right\} \qquad (33)$$

Volba dvojnásobných bodů sextiky v jedné této čtveřici je ekvivalentní jedné lineární podmínce pro koeficienty křivky.

O sextikách (32) se mluví také v pojednání J. VOJTĚCH: Konečné grupy kolineací a rovinné sextiky k sobě příslušné (Rozpravy Akademie 1913), kde se ukazuje, že taková sextika je reprodukována grupou kolineací řádu 12; jedna ze 4 cykl. podgrup 3. řádu má invariantní body v trojici průsečíků zákl. kuželoseček inversí grupy (31) a ostatní tři v bodech, které těmto bodům přiřazují ostatní inverse (t. j. trojice bodů vypsané ve sloupcích (33)). Necyklická podgrupa čtvrtého řádu je složena z identity a 3 involutorních persp. kolineací o středech v hlavních bodech a osách vždy v protilehlé hlavní přímce. Platí tedy věta 18 pro sextiky (32) v každém hlavním bodě.

Резюме

СЕКСТИКИ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КВАДРАТИЧЕСКИХ ИНВЕРСИЙ С ТРЕМЯ ГЛАВНЫМИ ТОЧКАМИ

ВЛАДИМИР МАГЕЛ (Vladimír Mahel), Прага.

(Поступило в редакцию 14/I 1955 г.)

В настоящей работе автор занимается исследованием кривых шестой степени, которые воспроизводятся квадратической инверсией с тремя главными точками или несколькими инверсиями, если у этих инверсий имеются общие главные точки и прямые. При воспроизведении несколькими инверсиями возможны два случая:

1. инверсии обладают общим центром,

2. центр одной инверсии лежит во второй главной точке другой инверсии.

В первом случае:

а) в точности двумя инверсиями воспроизводятся секстики, имеющие двойные точки во всех главных точках (и выполняющие дальнейшие условия (10) и (17));

б) в точности тремя инверсиями воспроизводятся секстики, на которых не лежит центр инверсии и которые имеют тройные точки в других главных точках (и выполняют дальнейшие условия (13) и (23)).

Во втором случае воспроизводятся только секстики с двойными точками в главных точках инверсии (и выполняющие дальнейшие условия (10) и (24)); эти кривые инвариантны также и относительно третьей инверсии, центр которой лежит в последней главной точке.

Максимальное число инверсий (с общим главным трехсторонником), сохраняющих кривые шестой степени, равно шести. Этими шестью инверсиями воспроизводится сеть секстик.

Во всех этих случаях указаны некоторые дальнейшие свойства инвариантных кривых; особое внимание автор уделяет возможным положениям дальнейших особых точек.

Zusammenfassung

ÜBER KURVEN SECHSTER ORDNUNG DIE IN KVADRATISCHEN INVERSIONEN MIT EINEM GEMEINSAMEN HAUPTPUNKTDREIECK INVARIANT SIND

VLADIMÍR MAHEL, Praha.

(Eingegangen am 14. Jänner 1955.)

In dieser Arbeit untersucht der Autor die Kurven 6. Ordnung, die durch kvadratische Inversion mit drei Hauptpunkten, resp. durch mehrere Inversionen mit gemeinsamen Hauptpunktdreieck, reproduziert sind. Es gibt zwei Möglichkeiten für die Reproduktion durch mehrere solche Inversionen:

1. Die Inversionen haben ihren Mittelpunkt gemeinsam.

2. Der Mittelpunkt einer Inversion liegt in einem anderen Hauptpunkte der zweiten Inversion.

Im ersten Falle reproduzieren sich

a) nur durch zwei Inversionen diejenige Kurven 6. Ordnung, die in allen Hauptpunkten Doppelpunkte haben (und weitere Bedingungen (10) und (17) erfüllen),

b) nur durch drei Inversionen diejenige Kurven, auf welchen der Mittelpunkt der Inversion nicht liegt und in den anderen Hauptpunkten dreifache Punkte haben (unter Erfüllung weiterer Bedingungen (13) und (23)).

Im zweiten Falle reproduzieren die zwei Inversionen nur solche Kurven, die in Hauptpunkten Doppelpunkte haben (und erfüllen die Bedingungen (10) und (24)). Diese Kurven sind dann auch durch eine dritte Inversion, die ihren Mittelpunkt in dem dritten Hauptpunkt hat, reproduziert.

Die Maximalzahl der Inversionen (mit gemeinsamen Hauptpunktdreieck) ist sechs; in diesen sechs Inversionen ist eine Schar von Kurven 6. Ordnung invariant.

In allen diesen Fällen sind weitere Eigenschaften der invarianten Kurven gezeigt, besonders die Lage weiterer Singularpunkte betreffend.