Vladimír Bruthans

Analagmatické kvintiky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 3, 274--283

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117159`

ANALAGMATICKÉ KVINTIKY

VLADIMÍR BRUTHANS, Liberec.

(Došlo dne 16. prosince 1954.) DT:513.617.1

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

Předmětem tohoto článku jsou rovinné kvintiky, které se reprodukují nějakou kvadratickou inversí, tak zvané kvintiky analagmatické. Je provedeno roztřídění těchto křivek a jsou uvedeny jejich vlastnosti, které plynou z jejich analagmatické povahy. Nakonec jsou ukázány případy kvintik, které se reprodukují některými grupami algebraických transformací.

1. Kvintiky, které se reprodukují kvadratickou inversí, nazýváme kvintiky analagmatické.[1]) Abychom tyto křivky roztřídili, budeme rozeznávat tyto tři typy inverse:[2])

Typ **A**: Střed inverse leží mimo základní kuželosečku, jež je regulární. Tato inverse má tři hlavní body a její rovnice se dají uvést na tvar

$$x_1 = x_1'x_3', \quad x_2 = x_2'x_3', \quad x_3 = x_1'x_2'. \tag{A}$$

Typ **B**: Střed inverse leží mimo základní kuželosečku, jež se skládá ze dvou (různých) přímek. Tato inverse má dva hlavní body a její rovnice se dají uvést na tvar

$$x_1 = x_1'x_3', \quad x_2 = x_2'x_3', \quad x_3 = x_2'^2. \tag{B}$$

Typ **C**: Střed inverse leží na základní kuželosečce, jež je regulární. Tato inverse má jediný hlavní bod a její rovnice lze uvést na tvar

$$x_1 = x_1'^2, \quad x_2 = x_1'x_2', \quad x_3 = x_2'^2 - x_1'x_3'. \tag{C}$$

Omezíme se na kvintiky nerozložitelné, o nichž platí tato všeobecná věta:

Věta 1. *Nerozložitelná kvintika analagmatická má ve středu inverse bod o násobnosti buď jedna nebo tři.*

Tuto větu dokážeme nepřímo. Předpokládejme, že ve středu inverse má kvintika bod o sudé násobnosti. Potom každá přímka jím vedená, která není

1) [3], str. 506.

2) [2], str. 53-54.

tečnou křivky v tomto bodě, protne ji ještě v lichém počtu bodů. Je tedy na každé takové přímce vedle inversních dvojic jeden bod křivky samodružný, leda že by odpovídal středu inverse; v tomto případě by však musel ležet na hlavní přímce a takových bodů je konečný počet. To znamená, že na křivce leží nekonečně mnoho samodružných bodů, což je spor, neboť samodružné body inverse leží všechny na základní kuželosečce inverse a s tou má nerozložitelná kvintika jen deset společných bodů. Je tedy náš předpoklad nesprávný, čímž je věta dokázána.

2. Studujme nejdříve případ, kdy střed inverse je v trojnásobném bodě kvintiky. Souřadnicový systém volme vždy tak, aby rovnice příslušné inverse měly jeden ze shora uvedených tvarů. Trojnásobný bod kvintiky (jenž je středem inverse) je tedy bodem O_3 a kvintika má rovnici

$$x_3^2 u_3(x_1, x_2) + x_3 v_4(x_1, x_2) + w_5(x_1, x_2) = 0\,, \tag{1}$$

kde indexy při u, v, w udávají stupně těchto forem.

Typ ***A3***:[3]) Reprodukuje-li se tato kvintika inversí (***A***), musí být součet násobností hlavních bodů O_1, O_2 dvě. Nemohou pak být tyto násobnosti různé, neboť u křivky inversní by se vyměnily. Jsou tedy oba hlavní body jednoduchými body kvintiky, takže její rovnice má tvar

$$x_3^2 u_3(x_1, x_2) + x_3 v_4(x_1, x_2) + x_1 x_2 w_3(x_1, x_2) = 0\,. \tag{2}$$

Proveďme transformaci (***A***) a vynechme činitele $x_1 x_2 x_3^3$; obdržíme

$$x_3^2 w_3(x_1, x_2) + x_3 v_4(x_1, x_2) + x_1 x_2 u_3(x_1, x_2) = 0\,. \tag{3}$$

Ježto rovnice (2) a (3) musí vyjadřovat touž křivku a protože — vzhledem k nerozložitelnosti křivky — je $v_4(x_1, x_2) \neq 0$, plyne odtud $w_3(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2)$. Rovnice kvintiky, která se reprodukuje inversí (***A***), je tedy

$$(x_3^2 + x_1 x_2)\, u_3(x_1, x_2) + x_3 v_4(x_1, x_2) = 0\,. \tag{A3}$$

Z ní je zřejmé, že tečny křivky v jejím trojnásobném bodě ji protínají ve třech bodech ležících v přímce (osa o_3), jejíž zbývající dva průsečíky s křivkou jsou různé. Naopak lze rovnici každé kvintiky, jež má tyto vlastnosti, uvést na tvar (***A3***).

Typ ***B3***: Má-li se kvintika (1) reprodukovat inversí (***B***), musí mít — aby stupeň křivky zůstal týž — v hlavním bodě O_1 buď jednoduchý bod s tečnou o_3 nebo bod dvojnásobný, v němž tečny jsou různé od přímky o_3. Jinak je tento případ zcela obdobný předešlému a rovnice příslušné analagmatické křivky je

$$(x_3^2 + x_2^2)\, u_3(x_1, x_2) + x_3 v_4(x_1, x_2) = 0\,. \tag{B3}$$

[3]) Zachováváme označení typů ***A***, ***B***, ***C*** inversí podle odst. 1 a číslice ***3*** zde připojená připomíná, že jde o kvintiku, která má ve středu inverse trojnásobný bod. Podobný význam má označení v dalších odstavcích.

Shrnutím obou případů docházíme k větě:

Věta 2. *Nerozložitelná kvintika s trojnásobným bodem se reprodukuje kvadratickou inversí typu* **A** *nebo* **B** *se středem v trojnásobném bodě kvintiky tehdy a jen tehdy, leží-li další průsečíky tří tečen v trojnásobném bodě s kvintikou v přímce.*

Jsou-li ostatní dva průsečíky této přímky s kvintikou od sebe různé, reprodukuje se kvintika inversí typu **A**, *splývají-li v jeden dvojnásobný, reprodukuje se inversí typu* **B**.

Typ **C3**: Abychom vyšetřili případ kvintiky analagmatické vzhledem k inversi typu **C**, proveďme na rovnici (1) transformaci (**C**):

$$(x_2^2 - x_1x_3)^2 \, u_3(x_1, x_2) \, x_1^3 + (x_2^2 - x_1x_3) \, v_4(x_1, x_2) \, x_1^4 + w_5(x_1, x_2) \, x_1^5 = 0 \,. \quad (4)$$

Ježto je o_1 jedinou hlavní přímkou této inverse, musí levá strana rovnice (4) obsahovat činitele x_1^5; odtud a ze srovnání obou rovnic (1) a (4) plyne

$$u_3(x_1, x_2) = x_1 u_2(x_1, x_2) \,, \quad v_4(x_1, x_2) = - \, x_2^2 u_2(x_1, x_2) \,.$$

Rovnice kvintiky, která se reprodukuje inversí (**C**), je tudíž

$$(x_3^2 x_1 - x_3 x_2^2) \, u_2(x_1, x_2) + w_5(x_1, x_2) = 0 \,. \quad (\mathbf{C3})$$

První polára bodu O_3 je

$$(2x_1x_3 - x_2^2) \, u_2(x_1, x_2) = 0 \,,$$

t. j. skládá se z regulární kuželosečky — základní kuželosečky inverse — a dvojice přímek bodem O_3. Naopak lze rovnici kvintiky s trojnásobným bodem, jehož první polára se rozpadá uvedeným způsobem, vždy uvést na tvar (**C3**). Stačí ovšem, víme-li, že první polára trojnásobného bodu obsahuje jako součást regulární kuželosečku, neboť to, že druhá součást je pak dvojice přímek s průsečíkem v trojnásobném bodě křivky, plyne z toho, že tento bod je trojnásobným i u první poláry. Máme tedy výsledek:

Věta 3. *Nerozložitelná kvintika s trojnásobným bodem se reprodukuje kvadratickou inversí typu* **C** *se středem v tomto bodě tehdy a jen tehdy, jestliže první polára trojnásobného bodu obsahuje jako součást regulární kuželosečku.*

Poznámka 1. Obě přímky, které jsou součástí prvé poláry trojnásobného bodu, mají v tomto bodě pětibodový průsečík s křivkou. Jsou-li tedy tyto přímky různé, jsou to inflexní tečny.

Poznámka 2. Kvintiku (**C3**) lze považovat za mezný případ kvintiky (**A3**) nebo (**B3**), kdy totiž přímka, spojující průsečíky tečen v trojnásobném bodě s křivkou, tímto bodem prochází.

3. Uvažujme druhý případ, v němž střed inverse (a tedy též bod O_3) je v jednoduchém bodě kvintiky. Rovnice takové kvintiky má tvar

$$x_3^4 u_1(x_1, x_2) + x_3^3 v_2(x_1, x_2) + x_3^2 w_3(x_1, x_2) + x_3 r_4(x_1, x_2) + s_5(x_1, x_2) = 0 \,. \quad (5)$$

Typ ***AI***. Nechť se reprodukuje inversí (**A**); pak hlavní body O_1, O_2 musí být dvojnásobnými body kvintiky, t. j.

$$r_4(x_1, x_2) = x_1x_2r_2(x_1, x_2)\,, \quad s_5(x_1, x_2) = x_1^2x_2^2s_1(x_1, x_2)\,.$$

Po inversi máme

$$x_4^3s_1(x_1, x_2) + x_3^3r_2(x_1, x_2) + x_3^2w_3(x_1, x_2) + x_3x_1x_2v_2(x_1, x_2) + \\ + x_1^2x_2^2u_1(x_1, x_2) = 0\,. \tag{6}$$

Podmínky pro totožnost křivek (5) a (6) jsou

$$\begin{aligned} s_1(x_1, x_2) &= \varrho u_1(x_1, x_2)\,, \quad u_1(x_1, x_2) = \varrho s_1(x_1, x_2)\,, \\ r_2(x_1, x_2) &= \varrho v_2(x_1, x_2)\,, \quad v_2(x_1, x_2) = \varrho r_2(x_1, x_2)\,, \\ w_3(x_1, x_2) &= \varrho w_3(x_1, x_2)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Jestliže $w_3(x_1, x_2) \neq 0$, plyne odtud $\varrho = 1$. Jestliže $w_3(x_1, x_2) = 0$, pak z podmínek (7) plyne $\varrho = \pm 1$; avšak, kdyby bylo $\varrho = -1$, obsahovala by křivka kuželosečku $x_3^2 - x_1x_2 = 0$, takže i v tomto případě $\varrho = 1$ a

$$s_1(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)\,, \quad r_2(x_1, x_2) = v_2(x_1, x_2)\,.$$

Rovnice této analagmatické kvintiky je tudíž

$$(x_3^4 + x_1^2x_2^2)\,u_1(x_1, x_2) + (x_3^3 + x_1x_2x_3)\,v_2(x_1, x_2) + x_3^2w_3(x_1, x_2) = 0\,. \tag{\textit{AI}}$$

Z této rovnice je zřejmo, že spojnice dvojnásobných bodů O_1, O_2 protíná křivku po páté v bodě na tečně v O_3. Na této spojnici leží též dva průsečíky první poláry s jeho kvadratickou polárou (nemají-li obě poláry tuto přímku za společnou součást).

Existují-li naopak na kvintice tři body s právě popsanými vlastnostmi a zvolíme-li je za příslušné souřadnicové body, je její rovnice

$$(x_3^4 + \lambda_1x_1^2x_2^2)\,u_1(x_1, x_2) + (x_3^3 + \lambda_2x_1x_2x_3)\,v_2(x_1, x_2) + x_3^2w_3(x_1, x_2) = 0\,. \tag{8}$$

Zbývá nám možnost volby jednotkového bodu; pokusme se tedy transformací $x_i = \varrho_ix_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ převést rovnici (8) na tvar (***AI***). Konstanty ϱ_i je třeba volit tak, aby $\varrho_3^4 = \lambda_1\varrho_1^2\varrho_2^2$ a $\varrho_3^2 = \lambda_2\varrho_1\varrho_2$. Odtud — je-li $v_2(x_1, x_2) \neq 0$ — vyplývá podmínka

$$\lambda_1 = \lambda_2^2\,. \tag{9}$$

Uvažujme průsečíky křivky (8) s přímkou

$$x_2 - kx_1 = 0\,, \quad k \neq 0\,; \tag{10}$$

řešením obou rovnic dostaneme

$$x_2[x_3^4u_1(1, k) + x_3^3x_1v_2(1, k) + x_3^2x_1^2w_3(1, k) + \lambda_2x_3x_1^3kv_2(1, k) + \\ + \lambda_1x_1^4k^2\,u_1(1, k)] = 0\,. \tag{11}$$

U analagmatické kvintiky tvoří tyto průsečíky (vedle bodu O_3) dvě dvojice apolární vzhledem k základní kuželosečce inverse, k níž je také apolární dvojice, již tvoří bod O_3 a průsečík přímky (10) s osou o_3. Všechny tři dvojice náležejí tedy do téhož svazku. Splňují-li naopak průsečíky určené na přímce (10) formou na levé straně (11) tuto podmínku, dá se tato forma rozložit v součin dvou binárních forem $ax_2^2 + 2bx_2x_3 + cx_3^2$ a $dx_2^2 + 2ex_2x_3 + fx_3^2$, pro jejichž koeficienty je splněna podmínka[4])

$$af - cd = 0\,. \tag{12}$$

Předpokládáme-li

$$u_1(1, k) \neq 0 \quad \text{a} \quad u_2(1, k) \neq 0 \tag{13}$$

pak z podmínek

$$\lambda_1 k^2 u_1(1, k) = ad\,, \quad u_1(1, k) = cf\,,$$

$$\lambda_2 k u_2(1, k) = 2(ae + bd)\,, \quad u_2(1, k) = 2(ce + bf)$$

plyne

$$\lambda_1 k^2 = \frac{ad}{cf}\,, \quad \lambda_2 k = \frac{ae + bd}{ce + bf}$$

a (12) má za následek $(\lambda_2 k)^2 = \lambda_1 k^2$, takže podmínka (9) je splněna. S přihlédnutím ke geometrickému významu předpokladů (13) je tím dokázáno:

Věta 4. *Charakteristické vlastnosti kvintiky, která se reprodukuje inversí typu* **A** *se středem v jednoduchém bodě kvintiky jsou tyto:*

α) *křivka má (aspoň) dva dvojnásobné body — označme je Q, Q' a jejich spojnici o;*

β) *první polára některého z dotykových bodů – označme jej O — tečen, vedených ke křivce z pátého průsečíku přímky o s křivkou, má na této přímce (vedle bodů Q, Q') dva body společné s kvadratickou polárou bodu O (anebo mají obě poláry přímku o za společnou součást);*

γ) *aspoň jedna přímka bodem O, jež není v něm tečnou a (není-li přímka o součástí obou polár) neprochází žádným průsečíkem první poláry s přímkou o, protíná kvintiku mimo bod O ve dvou regulárních dvojicích náležejících do téhož svazku spolu s dvojicí, již tvoří bod O s bodem na přímce o.*

Typ ***BI***. Tento typ je opět zcela obdobný předešlému, příslušná rovnice je

$$(x_3^4 + x_2^4)\, u_1(x_1, x_2) + (x_3^3 + x_3 x_2^2)\, v_2(x_1, x_2) + x_3^2 w_3(x_1, x_2) = 0\,. \tag{\textbf{\textit{BI}}}$$

Jde zřejmě o mezní případ kvintiky z věty 4, kdy totiž oba body Q, Q' splynou v jediný, a to buď α) dvojnásobný s jedinou tečnou, totiž přímkou o, nebo β) trojnásobný, v němž jednou z tečen je přímka o, anebo γ) čtyřnásobný, v němž přímka o není tečnou.

Poznámka 3. Snadno se zjistí, že k tomu, aby se kvintika reprodukovala inversí typu **C**, je nutno, aby střed inverse byl bodem kvintiky o násobnosti vyšší než jedna. Kromě tedy již uvedeného typu ***C3*** neexistuje žádná další kvintika, jež by se touto inversí reprodukovala.

[4]) Srovnej [1], str. 122.

4. Kvintiky, které mají popsané charakteristické vlastnosti, mají pak všechny další vlastnosti analagmatických křivek. Uveďme některé tyto vlastnosti pro kvintiku typu **A3**.[5]) Její trojnásobný bod nazveme bodem O. Průsečíky tečen v bodě O s křivkou leží — jak bylo ukázáno — v přímce; zbývající dva průsečíky této přímky s křivkou nazveme body Q, Q'.

Věta 5. *Regulární kuželosečka jdoucí body O, Q, Q' protne kvintiku **A3** ještě v pěti bodech; promítneme-li těchto pět bodů z bodu O na křivku, dostaneme dalších pět bodů, jež leží v přímce.*

Neboť body O, Q, Q' jsou — jak patrno — hlavní body inverse, jíž se tato kvintika reprodukuje; kuželosečka jdoucí těmito body protne kvintiku trojnásob v bodě O, jednoduše v bodech Q, Q' a dále tedy ještě v pěti bodech. Ježto však je ke kuželosečce, obsahující všechny tři hlavní body, inversní křivkou přímka mimo tyto body, odpovídá pět průsečíků této přímky s kvintikou oněm pěti bodům na kuželosečce.

Podobně se dokáže:

Věta 6. *Promítneme-li z bodu O kvintiky **A3** pět jejích bodů ležících v přímce mimo body O, Q, Q', dostaneme na křivce dalších pět bodů a kuželosečka určená těmito pěti body prochází body O, Q, Q'.*

Dále platí:

Věta 7. *Přímka bodem Q protne křivku ještě ve čtyřech bodech; promítneme-li tyto čtyři body z bodu O na křivku, obdržíme další čtyři body v přímce, jež prochází bodem Q'. Geometrické místo průsečíků takových dvojic přímek je regulární kuželosečka.*

Jde totiž o dvojici přímek odpovídajících si v inversi a ty se protínají na základní kuželosečce inverse. Nazveme kuželosečku, o níž je řeč v této větě, kuželosečkou q.

Zvláštním případem věty 7, kdy dva z oněch čtyř bodů splynou v jediný, je věta:

Věta 8. *Jestliže tečna ke křivce **A3** v některém jejím bodě P prochází bodem Q, pak tečna v bodě P' ležícím s P na téže přímce bodem O (mimo body Q, Q') prochází bodem Q'. Obě tyto tečny se protínají na kuželosečce q.*

Třída kvintiky s obyčejným trojnásobným bodem je — ježto tento bod platí za tři obyčejné uzly — $m = 5 . 4 - 2 . 3 = 14$. Z bodu O lze tudíž vésti ke křivce čtrnáct tečen, počítáme-li do tohoto počtu každou tečnu v bodě O dvojnásob. Jinak zbývá osm tečen, o nichž platí věta:

Věta 9. *Osm dotykových bodů tečen vedených ke křivce **A3** z bodu O leží na kuželosečce q.*

Neboť v dotykovém bodu tečny z bodu O splývají oba body sobě odpovídající v jediný samodružný bod, jenž leží na základní kuželosečce inverse.

---

[5]) O této kvintice pojednává *Roberts* [4]. Vlastnosti, které odvozuje jinou cestou, jsou s hlediska analagmatické povahy křivky zřejmé.

5. Některé kvintiky se reprodukují více než jednou inversí. Složíme-li dvě takové inverse, které reprodukují touž kvintiku, obdržíme další transformaci, jež rovněž tuto křivku reprodukuje.

Má-li kvintika (**BI**) v hlavním bodě O_1 bod trojnásobný, může se reprodukovat též inversí se středem v tomto bodě. Jde-li o inversi typu **A** nebo **B**, je bod, ve kterém tečna v O_3 ke křivce protne osu o_3 (a tedy i křivku), různý od bodu O_1, takže jej můžeme zvolit za bod O_2. Učiňme to; křivka má pak rovnici

$$\begin{aligned} a_0x_3^4x_1 + x_3^3(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2) + x_3^2(c_1x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + c_3x_2^3) +& \\ + x_3x_2^2(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2) + a_0x_2^4x_1 = 0\,,& \end{aligned} \tag{14}$$

kde $a_0 \neq 0$ a také buď $b_0 \neq 0$ nebo $c_1 \neq 0$ (bod O_1 by nebyl trojnásobný, nýbrž čtyřnásobný). Ježto je nyní jedním z průsečíků tečen v trojnásobném bodě s křivkou bod O_2, lze bod O_3 posunout po ose o_2 tak, že tyto tři průsečíky leží na spojnici tohoto bodu s bodem O_2. Lze tedy transformací

$$x_1 = x_1' + \varrho x_3'\,, \quad x_2 = x_2'\,, \quad x_3 = x_3' \tag{15}$$

uvést rovnici křivky na tvar

$$x_1^2x_3u_2(x_2, x_3) + x_1u_4(x_2, x_3) + u_2'(x_2, x_3)\, x_3u_2(x_2, x_3) = 0\,. \tag{16}$$

Rovnice křivky je po této transformaci (seřaďme ji podle mocnin proměnné x_1)

$$\begin{aligned} x_1^2x_3(b_0x_2^2 + c_1x_2x_3 + b_0x_3^2) + x_1[a_0x_2^4 + b_1x_2^3x_3 + (2\varrho b_0 + c_2)\, x_2^2x_3^2 +& \\ + (2\varrho c_1 + b_1)\, x_2x_3^3 + (2\varrho b_0 + a_0)\, x_3^4] + x_3(\varrho a_0x_3^4 + \varrho^2b_0x_3^4 + \varrho b_1x_3^3x_2 +& \\ + \varrho^2c_1x_3^3x_2 + b_2x_3^2x_2^2 + \varrho c_2x_3^2x_2^2 + \varrho^2b_0x_3^2x_2^2 + c_3x_3x_2^3 + \varrho b_1x_3x_2^3 + b_2x_2^4 +& \\ + \varrho a_0x_2^4) = 0\,.& \end{aligned} \tag{17}$$

Položíme-li $u_2'(x_2, x_3) = y_1x_2^2 + y_2x_2x_3 + y_3x_3^2$, plynou odtud podmínky

$$\begin{gathered} b_0y_1 = \varrho a_0 + b_2\,, \quad c_1y_1 + b_0y_2 = \varrho b_1 + c_3\,, \\ b_0y_1 + c_1y_2 + b_0y_3 = \varrho^2b_0 + \varrho c_2 + b_2\,, \\ b_0y_2 + c_1y_3 = \varrho^2c_1 + \varrho b_1\,, \quad b_0y_3 = \varrho^2b_0 + \varrho a_0\,. \end{gathered} \tag{18}$$

Je-li $\varrho = 0$, zůstává bod O_3 při transformaci (15) pevný; ježto o_1 je tečnou v O_3, je $y_2 = y_3 = 0$ a tedy $b_0y_1 = b_2$, $c_1y_1 = c_3$; odtud

$$b_0c_3 - b_2c_1 = 0\,. \tag{19}$$

Kdyby bylo $\varrho \neq 0$, bylo by též $b_0 \neq 0$ (neboť pro $b_0 = 0$, dává poslední rovnice (18) $a_0 = 0$, což není pravda). Vypočteme-li z první a třetí rovnice (18) y_1, y_3 a dosadíme-li do druhé, resp. čtvrté, dostáváme

$$y_2 = \frac{\varrho b_0b_1 + b_0c_3 - \varrho a_0c_1 - b_2c_1}{b_0^2} = \frac{\varrho b_0b_1 - \varrho a_0c_1}{b_0^2}\,,$$

tedy opět $b_0c_3 - b_2c_1 = 0$. Zbývající rovnice (třetí) by dávala

$$2a_0b_0^2 + b_0b_1c_1 - a_0c_1^2 - b_0^2c_2 = 0\,, \tag{20}$$

kteréžto podmínka by měla za následek dělitelnost formy na levé straně (17) formou $b_0x_2^2 + c_1x_2x_3 + b_0x_3^2$. Nemá-li se tedy křivka rozpadnout, musí být

$\varrho = 0$, takže právě tečna v jednoduchém středu inverse je hlavní přímkou odpovídající středu druhé inverse, jenž je v trojnásobném bodě kvintiky.

Jestliže volíme jednotkový bod v některém z průsečíků základních kuželoseček obou inversí, potom jsou rovnice první inverse, jíž se křivka reprodukuje,

$$x_1 = x_1'x_3', \quad x_2 = x_2'x_3', \quad x_3 = x_2'^2, \tag{I}$$

rovnice druhé inverse

$$x_1 = x_2'^2, \quad x_2 = x_1'x_2', \quad x_3 = x_1'x_3' \tag{II}$$

a podmínka (19) se pozmění takto:

$$b_0 = b_2, \quad c_1 = c_3.$$

Složením obou inversí obdržíme involutorní kvadratickou transformaci třídy první

$$x_1 = x_2'x_3', \quad x_2 = x_1'x_3', \quad x_3 = x_1'x_2'. \tag{III}$$

Tyto tři involutorní kvadratické transformace spolu s identitou tvoří grupu. I máme výsledek:

Věta 10. *Kvintika, jejíž rovnici lze uvést na tvar*

$$x_1^2x_3(b_0x_2^2 + c_1x_2x_3 + b_0x_3^2) + x_1(a_0x_2^4 + b_1x_2^3x_3 + c_2x_2^2x_3^2 + b_1x_2x_3^3 + \\ + a_0x_3^4) + x_2^2x_3(b_0x_2^2 + c_1x_2x_3 + b_0x_3^2) = 0$$

se reprodukuje dvěma inversemi a involutorní kvadratickou transformací třídy první, kteréžto transformace spolu s identitou tvoří grupu.

6. Nechť má kvintika (**B*I***) v hlavním bodě O_1 trojnásobný bod s vlastností charakteristickou pro kvintiku typu **C3**; pišme její rovnici

$$x_3^4(a_0x_1 + a_1x_2) + x_3^3(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2) + x_3^2(c_1x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + c_3x_2^3) + \\ + x_3x_2^2(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2) + x_2^4(a_0x_1 + a_1x_2) = 0. \tag{21}$$

První polára bodu O_1 je

$$2x_1x_3(b_0x_2^2 + c_1x_2x_3 + b_0x_3^2) + a_0x_2^4 + b_1x_2^3x_3 + c_2x_2^2x_3^2 + b_1x_2x_3^3 + \\ + a_0x_3^4 = 0;$$

tato křivka se podle předpokladu skládá z regulární kuželosečky a ze dvou přímek bodem O_1.

Budiž $a_0 \neq 0$; potom též $b_0 \neq 0$. Dělením se přesvědčíme, že nutná a postačující podmínka k tomu, aby forma $a_0x_2^4 + b_1x_2^3x_3 + c_2x_2^2x_3^2 + b_1x_2x_3^3 + a_0x_3^4$ byla dělitelná formou $b_0x_2^2 + c_1x_2x_3 + b_0x_3^2$ je

$$2a_0b_0^2 + b_0b_1c_1 - a_0c_1^2 - b_0^2c_2 = 0. \tag{20}$$

Výsledek dělení je pak (až na nenulový činitel)

$$a_0b_0x_2^2 + (b_0b_1 - a_0c_1)\, x_2x_3 + a_0b_0x_3^2 + 2b_0^2x_1x_3,$$

kterážto forma položena rovna nule dává rovnici základní kuželosečky druhé inverse, jejíž rovnice jsou tedy

$$x_1 = a_0b_0x_2'^2 + (b_0b_1 - a_0c_1)\,x_2'x_3' + a_0b_0x_3'^2 + b_0^2x_1'x_3'\,, \qquad (II')$$
$$x_2 = -\,b_0^2x_2'x_3'\,, \quad x_3 = -\,b_0^2x_3'^2\,.$$

Kdyby bylo $a_0 = 0$, bylo by rovněž $b_0 \neq 0$ (křivka neobsahuje přímku o_2); potom též $b_1 \neq 0$. Protože jeden společný činitel je v tomto případě x_3, musely by formy

$$b_0x_2^2 + c_1x_2x_3 + b_0x_3^2 \quad \text{a} \quad b_1x_2^2 + c_2x_2x_3 + b_1x_3^2$$

mít již jen jeden společný činitel, avšak mají zřejmě buď žádný anebo dva (jsou symetrické); je tedy vždy $a_0 \neq 0$.

Složením obou inversí (*I*) a (*II'*) obdržíme opět involutorní kvadratickou transformaci třídy první.

Věta 11. *Křivka o rovnici* (21), *jejíž koeficienty splňují podmínku* (20), *reprodukuje se dvěma inversemi a involutorní kvadratickou transformací třídy první, kterážto transformace spolu s identitou tvoří grupu.*

7. Kvintika se může reprodukovat též dvěma inversemi, z nichž každá má střed v jednoduchém jejím bodě. Dokážeme existenci takové kvintiky typu ***AI*** v případě, kdy dva hlavní body obou inversí jsou společné a střed jedné inverse leží na základní kuželosečce druhé inverse. Tento vztah je ovšem vzájemný.

Zvolme dva společné hlavní body za body O_1, O_2, střed jedné inverse za bod O_3, střed inverse druhé za bod J. Rovnice kvintiky má tvar

$$x_3^4(a_0x_1 + a_1x_2) + x_3^3(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2) + x_3^2(c_0x_1^3 + c_1x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 +$$
$$+ c_3x_2^3) + x_1x_2x_3(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2) + x_1^2x_2^2(a_0x_1 + a_1x_2) = 0 \qquad (22)$$

a provedeme-li transformaci souřadnic

$$x_1 = x_3' - x_1'\,, \quad x_2 = x_3' - x_2'\,, \quad x_3 = x_3'\,,$$

kterou se navzájem vymění bod O_3 a J, musíme obdržet rovnici téhož tvaru, což vede k podmínkám

$$\begin{aligned} a_0 + 5b_0 + 3b_1 + b_2 + 3c_0 + 2c_1 + c_2 &= 0\,, \\ a_1 + 5b_2 + 3b_1 + b_0 + 3c_3 + 2c_2 + c_1 &= 0\,, \\ 3b_0 + b_1 + 3c_0 + c_1 &= 0\,, \\ 3b_0 + 4b_1 + 3b_2 + 2c_1 + 2c_2 &= 0\,, \\ 3b_2 + b_1 + 3c_3 + c_2 &= 0\,. \end{aligned} \qquad (23)$$

Jsou-li tyto podmínky splněny, reprodukuje se kvintika (22) dvěma inversemi, totiž

$$x_1 = x_1'x_3'\,, \quad x_2 = x_2'x_3'\,, \quad x_3 = x_1'x_2'\,, \qquad (I'')$$
$$x_1 = (x_1' - x_3')\,x_2'\,, \quad x_2 = (x_2' - x_3')\,x_1'\,, \quad x_3 = (x_1' - x_3')(x_2' - x_3')\,. \qquad (II'')$$

Složením obou inversí v pořadí (*I''*), (*II''*) obdržíme

$$x_1 = (x_1' - x_3')\,x_2'\,, \quad x_2 = (x_2' - x_3')x_1'\,, \quad x_3 = x_1'x_2'\,, \qquad (III'')$$

v pořadí opačném

$$x_1 = (x_3' - x_2')\, x_3'\,, \quad x_2 = (x_3' - x_1')\, x_3'\,, \quad x_3 = (x_3' - x_1')(x_3' - x_2')\,. \qquad (\mathbf{IV}'')$$

Kvadratické transformace (*III*″) a (*IV*″) jsou cyklické třetího stupně a jsou k sobě navzájem inversní; opakujeme-li tedy jednu z těchto transformací dvakrát po sobě, obdržíme transformaci druhou. Složením na př. transformací (*I*″) a (*IV*″) obdržíme involutorní kolineaci

$$x_1 = x_3' - x_2'\,, \quad x_2 = x_3' - x_1'\,, \quad x_3 = x_3'\,, \qquad (\mathbf{V}'')$$

jejímž středem je bod J_3, osou spojnice $\overline{J_1J_2}$. Transformace (*I*″) až (*V*″) tvoří spolu s identitou grupu. Máme tedy výsledek:

Věta 12. *Kvintika o rovnici* (22), *v níž jsou splněny podmínky* (23) *se reprodukuje transformacemi* (*I*″) *až* (*V*″), *jež spolu s identitou tvoří grupu.*

Rovnice základní kuželosečky kvadratické inverse (*I*″) je $x_3^2 - x_1x_2 = 0$ a inverse (*II*″) $x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0$. Obě tyto kuželosečky se protínají v bodech O_1, O_2 a mimo to ještě ve dvou bodech, jichž spojnice je přímka $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, t. j. osa kolineace (*V*″).

LITERATURA

[1] *B. Bydžovský*: Úvod do algebraické geometrie (Praha 1948).

[2] *H. P. Hudson*: Cremona Transformations in Plane and Space (Cambridge 1927).

[3] *G. Loria*: Curve piane speciali algebriche e transcendenti. Curve algebriche. (Milano 1930).

[4] *W. R. W. Roberts*: Some properties of a certain quintic curve (Proc. Irish Ac, XXIV A).