Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Kurzweil

O použití Hausdorffovy míry v aritmetice

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 3, 361--364

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117155

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \leqq 0$$

pro $[t, x_1, \dots, x_n] \in G$.

V theorii stability jsou potřebné také věty o nestabilitě a to věta Ljapunovova a věta Četajevova.

Ljapunovova věta III: *Nechť pro systém diferenciálních rovnic (1) existuje omezená funkce* $V(t, x_1, \dots, x_n)$ *v oblasti* G *taková, že její derivace vzhledem k systému diferenciálních rovnic (1) splňuje vztah*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \lambda V + W\,,$$

kde λ *je kladná konstanta a funkce* $W(t, x_1, \dots, x_n)$ *je nezáporná. Jestliže k libovolně malému* $\eta > 0$ *existuje bod* $(t, x_1, \dots, x_n)$, $t \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 < \eta^2$, *že platí* $V(t, x_1, \dots, x_n) > 0$, *potom řešení* $x_1 = \dots = x_n = 0$ *jest nestabilní.*

Věta Četajevova. *Nechť pro systém diferenciálních rovnic (1) existuje spojitá, omezená a nezáporná funkce* $V(t, x_1, \dots, x_n)$ *v oblasti* G *o těchto vlastnostech:*

1. Budiž P *oblast bodů* $[t, x_1, \dots, x_n]$ *pro něž* $V(t, x_1, \dots, x_n) > 0$. *Potom* $V(t, x_1, \dots, x_n)$ *má spojité parciální derivace* $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ *v oblasti* P.

2. K libovolnému $\alpha > 0$ *existuje* $\beta > 0$, *že pro všechny body* $[t, x_1, \dots x_n]$, *pro něž platí* $V(t, x_1, \dots, x_n) \geqq \alpha > 0$, *platí* $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \geqq \beta > 0$.

3. K libovolnému $\eta > 0$ *existuje bod* $[x_1, \dots, x_n]$ *splňující* $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 < \eta^2$, *při čemž* $V(0, x_1, \dots, x_n) > 0$.

Potom triviální řešení soustavy (1) jest nestabilní.

Obě věty v případě autonomním obrátil Krasovskij a v případě neautonomním Vrkoč.

Ivo Vrkoč, Praha.

O POUŽITÍ HAUSDORFFOVY MÍRY V ARITMETICE

(Referát o přednášce akademika Vojtěcha Jarníka, přednesené v matematické obci pražské dne 28. III. 1955.)

Přednášející se zabýval použitím Hausdorffovy míry na množiny čísel, která splňují jisté aproximační podmínky. Nejprve definoval vnější Hausdorffovu míru v prostoru $E_s (s = 1, 2, 3, \dots)$:

Budiž M podmnožina v E_s a nechť $f(d)$ je funkce monotonně klesající k nule pro $d \to 0$. Zvolme číslo $\varrho > 0$ a pokryjme množinu M posloupností s-rozměrných krychlí $J_1, J_2, J_3, \dots$, jejichž hrany $|J_1|, |J_2|, |J_3|$ nepřesahují ϱ.

Položme

$$L_\varrho = \inf \sum_{i=1}^{\infty} f(|J_i|)\,,$$

kde infimum bereme pro všechna možná pokrytí splňující uvedené předpoklady. Klesá-li ϱ k nule, potom L_ϱ neroste a definujeme

$$\mu(M, f) = \lim_{\varrho \to 0} L_\varrho .$$

$\mu(M, f)$ nazýváme *vnější Hausdorffovou měrou* — pro stručnost Hausdorffovou měrou — množiny M a snadno lze ukázat, že $\mu(M, f)$ je vnější míra ve smyslu Carathéodoryově.

Zřejmě platí:

Nechť $\dfrac{f_1(d)}{f_2(d)} \to 0$ *pro* $d \to 0$.

Jestliže $\mu(M, f_1) > 0$, *pak* $\mu(M, f_2) = \infty$,

jestliže $\mu(M, f_2) < \infty$, *pak* $\mu(M, f_1) = 0$.

Odtud speciálně plyne, že $\mu(M, f) = 0$, jestliže množina M má konečnou Lebesgueovu míru a jestliže $\dfrac{f(d)}{d^s} \to 0$ pro $d \to 0$, neboť $\mu(M, d^s)$ je Lebesgueova míra množiny M.

Hausdorffovou dimensí dané množiny M — označme ji $\dim M$ — nazveme infimum takových čísel $\lambda(\lambda > 0)$, že $\mu(M, d^\lambda) = 0$.

Přistupme nyní k použití Hausdorffovy míry. Nechť $\omega(q)$ je kladná funkce definovaná pro $q > 0$ a nechť $(x_1, \ldots, x_s)$ je daná soustava reálných čísel. Říkáme, že soustava $(x_1, \ldots, x_s)$ připouští aproximaci $\omega(q)$, jestliže ke každému $Q > 0$ existuje řešení soustavy nerovností

$$\left| x_1 - \frac{p_1}{q} \right| < \omega(q) ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left| x_s - \frac{p_s}{q} \right| < \omega(q) ,$$

kde $p_1, \ldots, p_s, q$ jsou celá čísla, $q > Q$. Jak známo, každá soustava čísel $x_1, \ldots, x_s$ připouští aproximaci $\dfrac{1}{q^{1+\frac{1}{s}}}$.

Označme $A(\omega)$ $(B(\omega))$ množinu těch soustav $(x_1, \ldots, x_s)$, které připouštějí (nepřipouštějí) aproximaci $\omega(q)$ a pro něž platí $0 \leqq x_1 < 1, \ldots, 0 \leqq x_s < 1$. Základní význam má tento výsledek Chinčinův (1926):

Nechť $\omega^s(q) \cdot q^{s+1} \to 0$ monotonně $(q \to \infty)$.

Jestliže $\int_1^\infty q^s\omega^s(q)\, dq < \infty$, potom Lebesqueova míra množiny $A(\omega)$ je 0;

jestliže $\int_1^\infty q^s\omega^s(q)\, dq = \infty$, potom Lebesqueova míra množiny $A(\omega)$ je rovna 1.

Jestliže tedy je $\int_1^\infty q^s\omega^s(q)\, dq < \infty$, potom je účelné vyšetřovat množinu $A(\omega)$ pomocí Hausdorffovy míry. Tomuto tematu věnoval akademik Jarník řadu prací.

Nejobecnějšího výsledku dosáhl akademik Jarník touto větou (1931):

Nechť funkce $f(2\omega(q))$ *je monotonní,* $\int_1^\infty q^s\omega^s(q)\, dq < \infty$.

Jestliže $\int_1^\infty f(2\omega(q))\, q^s\, dq < \infty$, *pak* $\mu(A(\omega), f) = 0$;

jestliže $\int_1^\infty f(2\omega(q))\, q^s\, dq = \infty$, *pak* $\mu(A(\omega), f) = \infty$.

Odtud snadno plyne, že dim $A\left(\frac{1}{q^\alpha}\right) = \frac{s+1}{\alpha}$ pro $\alpha > 1 + \frac{1}{s}$ a že množina $A(\omega_1) - B(\omega_2)$, $\frac{\omega_2(q)}{\omega_1(q)} \to 0$, je za jistých předpokladů neprázdná.

Jestliže $\int_1^\infty q^s \omega^s(q)\, dq = \infty$, potom podle Chinčinovy věty je Lebesqueova míra množiny $B(\omega)$ rovna nule a tak je možné studovat pomocí Hausdorffovy míry množinu $B(\omega)$. Prozatím byl vyšetřován pouze případ $s = 1$, neboť při důkazech se nelze obejít bez řetězových zlomků. Touto úlohou se zabýval akademik Jarník okolo r. 1930.

Pak uvedl výsledek Kurzweilův z r. 1951:

Nechť $\int_1^\infty \omega(q) \,.\, q\, dq = \infty$. *Položme* $\omega(q) = \frac{1}{q^2 g(q)}$ *a předpokládejme* $g(q) \to \infty$ *a* $\frac{g(qg(q))}{g(q)} \to 1$ *pro* $q \to \infty$.

Definujme funkci $f(d)$:

$$f(d) = \mathrm{d} \exp\left\{\frac{2}{3}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{d}}} \frac{dt}{t \,.\, g(t)}\right\}.$$

Potom platí:

$$\mu\left(B\left(\frac{1}{q^2 g(q)}\right), f\right) = 0\,,$$

$$\mu\left(B\left(\frac{1}{3q^2 g(q)}\right), f\right) = \infty.$$

Dokázat obdobnou větu pro $s > 1$ je stále otevřený problém a rozřešení tohoto problému je jedna z možných cest, jak dokázat, že existují soustavy čísel, které připouštějí aproximaci $\omega_1(q)$ a nepřipouštějí aproximaci $\omega_2(q)$, jestliže $\frac{\omega_1(q)}{\omega_2(q)} \to \infty$, $\int_1^\infty q^s \omega_2^s(q)\, dq = \infty$.

Konečně akademik Jarník hovořil o některých zajímavých výsledcích Egglestoneových:

Budiž dána posloupnost přirozených čísel $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$. Je-li u přirozené číslo, nechť $n(u)$ je počet čísel q_i, která splňují nerovnost $q_i \leqq u$. Budiž $\alpha > 1 + \frac{1}{s}$. Nechť Z znamená množinu takových soustav $(z_1, \ldots, z_s)$, že pro každé $Q > 0$ soustava nerovností

$$\left|z_1 - \frac{p_1}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left|z_s - \frac{p_s}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha}$$

má řešení, při čemž p_i jsou celá čísla, q je některé číslo z dané posloupnosti $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $q > Q$. Nyní platí:

Je-li $\inf\limits_{x \geq 1} \dfrac{n(x)}{x} > 0$, *pak* $\dim Z = \dfrac{s+1}{\alpha} \left(= \dim A\left(\dfrac{1}{q^x}\right)\right)$, *je-li* $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} > l (l > 1,$ konst.), *potom* $\dim Z = \dfrac{s}{\alpha}$.

Nechť $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$ je stále pevně daná posloupnost přirozených čísel. Nechť $\{v\}$ je t. zv. lomená část čísla v. Hardy a Littlewood dokázali, že pro skoro všechna čísla x množina čísel $\{q_i x\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, je hustá v intervalu $(0,1)$.

Pro $0 < \alpha < 1$ nechť M_α je množina takových čísel x, pro něž je $\lim\limits_{i \to \infty} \{q_i x\} = \alpha$.

Platí:

Je-li $\dfrac{q_{i+1}}{q_i} < K$, *pak množina* M_α *je nejvýše spočetná, jestliže* $\dfrac{q_{i+1}}{q_i} \to \infty$ *pro* $i \to \infty$, *pak* $\dim M_\alpha = 1$.

Jaroslav Kurzweil, Praha.