O JISTÝCH POSLOUPNOSTECH SKUPIN BODŮ NA KRUŽNICI

LADISLAV KOSMÁK, Praha.

(Došlo dne 1. září 1954.) DT:513.183

Tato práce vznikla z podnětu prof. dr KARLA KOUTSKÉHO v jeho semináři elementární geometrie a obsahuje zobecnění výsledků, které uveřejnil dr JOSEF BREJCHA v pojednání „Čtverec jako limita čtyřúhelníků tětivových a tečnových“ (Práce Moravskoslezské akademie věd přírodních, 1952).

Úvodem krátce naznačíme obsah Brejchova článku. Nechť je dána libovolná kružnice a nechť posloupnost čtyřúhelníků vepsaných do této kružnice je definována tak, že její první člen je libovolný takový čtyřúhelník a vrcholy každého dalšího jsou ve středech oblouků dané kružnice nad stranami předcházejícího čtyřúhelníka. V Brejchově práci se dokazuje, že posloupnost délek stran těchto čtyřúhelníků konverguje k číslu $r\sqrt{2}$, kde r je poloměr dané kružnice, t. j. že „tvarem“ se tyto čtyřúhelníky blíží čtverci o straně $r\sqrt{2}$; tyto limitní čtverce jsou dva, položené tak, že vrcholy jednoho půlí oblouky dané kružnice nad stranami druhého, a v práci je určena poloha těchto čtverců vzhledem k prvnímu čtyřúhelníku posloupnosti. K analogickým výsledkům dr Brejcha dochází při vyšetřování posloupnosti tečnových čtyřúhelníků, kterou definujeme, vycházejíce z libovolného čtyřúhelníka opsaného dané kružnici, tak, aby se každý další čtyřúhelník té posloupnosti dotýkal dané kružnice v jejích průsečících se spojnicemi jejího středu s vrcholy předcházejícího čtyřúhelníka.

Nyní zobecníme uvedené výsledky methodou zcela odlišnou od Brejchova postupu. Nechť na dané kružnici je libovolně dáno n bodů (n přirozené). Pro snazší vyjadřování učiníme bez újmy obecnosti dalších úvah dva předpoklady. Za prvé budeme předpokládat, že daná kružnice je jednotková kružnice v rovině komplexních čísel. Přiřadíme-li každé komplexní jednotce A její amplitudu $\operatorname{Arg} A$, $0 \leqq \operatorname{Arg} A < 2\pi$, je tím zřejmě definováno prosté zobrazení množiny všech bodů jednotkové kružnice na interval $0 \leqq x < 2\pi$. Za druhé předpokládáme, že pro dané body $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ na jednotkové kružnici platí

$$\operatorname{Arg} A_0 \leqq \operatorname{Arg} A_1 \leqq \ldots \leqq \operatorname{Arg} A_{n-1}\,.$$

Definujme nyní posloupnost $\{(A_{in}, A_{in+1}, \ldots, A_{in+n-1})\}_{i=0}^{\infty}$ uspořádaných skupin bodů na jednotkové kružnici takto: pro $i = 0$ skupinu tvoří dané body

$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$; dále za předpokladu, že byla definována skupina $(A_{kn}, A_{kn+1}, \ldots, A_{kn+n-1})$ pro určité celé $k \geqq 0$, nechť pro body skupiny $(A_{(k+1)n}, A_{(k+1)n+1}, \ldots, A_{(k+1)n+n-1})$ je

$$\operatorname{Arg} A_{(k+1)n+l} = \operatorname{Arg} A_{kn+l} + b \cdot \alpha_{kn+l}\,, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

kde $0 < b < 1$ a α_{kn+l} definujeme takto: položme

$$h(x) = 0 \text{ pro } x \geqq 0\,,$$
$$h(x) = 1 \text{ pro } x < 0\,;$$

pak nechť pro $l = n - 1$

$$\alpha_{kn+l} = \operatorname{Arg} A_{kn} - \operatorname{Arg} A_{kn+l} + 2\pi \cdot h(\operatorname{Arg} A_{kn} - \operatorname{Arg} A_{kn+l})\,,$$

a pro $0 \leqq l < n - 1$

$$\alpha_{kn+l} = \operatorname{Arg} A_{kn+l+1} - \operatorname{Arg} A_{kn+l} + 2\pi \cdot h(\operatorname{Arg} A_{kn+l+1} - \operatorname{Arg} A_{kn+l})\,.\text{*)}$$

Pak platí:

Věta 1. *Je*

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \frac{2\pi}{n}\,;$$

je-li $b = \dfrac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla, pak posloupnost $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ má právě nq hromadných bodů, které jsou pro $n = 1$, $q = 2$ souměrně sdruženy podle počátku a v ostatních případech leží ve vrcholech jistého pravidelného nq-úhelníka. Je-li b iracionální, pak každý bod jednotkové kružnice je hromadným bodem posloupnosti $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Důkaz se opírá o další dvě věty, které nyní vyslovíme a dokážeme.

Nechť N je množina všech přirozených, R množina všech reálných čísel; pro $x \in R$ nechť $E(x)$ je Gaussova funkce čísla x („celá část čísla x"). Nechť dále pro libovolné $u \in R$, $v \in R$, $v \neq 0$ je

$$q_v(u) = E\left(\frac{u}{v}\right)\,, \tag{1}$$

$$r_v(u) = u - vq_v(u)\,; \tag{2}$$

tohoto označení budeme stále používat.

Zřejmě platí:

$$vr_v(u) \geqq 0\,, \tag{3}$$

---

*) Čtenář nechť si uvědomí jednoduchý geometrický význam právě popsané konstrukce: z dané skupiny bodů dostaneme následující skupinu tím, že každý bod dané skupiny pootočíme kolem středu jednotkové kružnice v kladném smyslu o úhel, rovný b-násobku středového úhlu, příslušejícího k tětivě, spojující ten bod s nejbližším sousedním bodem dané skupiny (postupujeme-li po kružnici v kladném smyslu). Čísla α_i vyjadřují právě velikosti těchto středových úhlů a je snadno patrno, že pro ně platí rekurentní vztah (při $i \geqq n$)

$$\alpha_i = (1 - b)\,\alpha_{i-n} + b\alpha_{i-n+1}, \text{ není-li } i + 1 \text{ dělitelno } n\,,$$

a

$$\alpha_i = (1 - b)\,\alpha_{i-n} + b\alpha_{i-2n+1}, \text{ je-li } i + 1 \text{ dělitelno } n\,.$$

a je-li m celé,

$$q_v(u + mv) = q_v(u) + m\,, \tag{4}$$

$$r_v(u + mv) = r_v(u)\,. \tag{5}$$

Pro libovolné $i \in N$, $k \in N$ položme

$$\tau_k(i) = k(q_k(i) - q_k(i - 1))\,; \tag{6}$$

pak platí

$$\tau_k(i) = 0, \text{ když } i \text{ není dělitelno } k\,,$$

$$\tau_k(i) = k, \text{ když } i \text{ je dělitelno } k\,.$$

Nechť $b \in R$, $0 < b < 1$, $n \in N$ a nechť

$$a_i \in R \text{ pro } i = 0, 1, \ldots, n - 1\,.$$

Pro každé $h \in N$ položme

$$a_h = a_{r_n(h)}\,. \tag{7}$$

Definujme posloupnost $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ tak, že

$$p_i = a_i \text{ pro } i = 0, 1, \ldots, n - 1\,,$$

$$p_i = (1 - b)\, p_{i-n} + b p_{i-n+1-\tau_n(i+1)} \quad \text{pro } i \in N,\ i \geqq n\,.$$

Pro $i \in N$, $i \geqq n$ je zřejmě

$$0 \leqq i - n < i,$$

$$i - n + 1 - \tau_n(i + 1) < i;$$

dále je

$$i - n + 1 - \tau_n(i + 1) \geqq 0,$$

neboť

1. není-li i dělitelno n, pak $n > 1$; buďto $\tau_n(i + 1) = 0$, a pak je dokazovaná nerovnost zřejmá, anebo $\tau_n(i + 1) = n$, t. j $i + 1$ je dělitelno n, a pak musí být $i + 1 \geqq 2n$, z čehož plyne naše nerovnost;

2. je-li i dělitelno n, je buďto $n = 1$, a pak dokazovaná nerovnost plyne z nerovnosti $i \geqq n$, anebo $n > 1$, a v tom případě $\tau_n(i + 1) = 0$.

Tím jsme dokázali, že definice posloupnosti $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ je logicky korektní.

Věta 2. *Pro každé celé nezáporné i je*

$$p_i = \sum_{k=0}^{q_n(i)} \binom{q_n(i)}{k} a_{r_n(i)+k} b^k (1 - b)^{q_n(i)-k}\,. \tag{8}$$

Dále je

$$\lim_{i\to\infty} p_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,. \tag{9}$$

Důkaz. Vztah (8) dokážeme úplnou indukcí. Pro $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ je podle (1) a (2) $q_n(i) = 0$, $r_n(i) = i$, takže (8) vskutku platí. Nechť tedy $i \geqq$

$\geqq n - 1$ a předpokládejme, že (8) platí pro všechna nezáporná celá $j \leqq i$. Potom je

$$p_{i+1} = (1 - b)\, p_{i+1-n} + b p_{i+2-n-r_n(i+2)} =$$

$$= (1 - b) \sum_{k=0}^{q_n(i+1-n)} \binom{q_n(i + 1 - n)}{k} a_{r_n(i+1-n)+k}\, b^k (1 - b)^{q_n(i+1-n)-k} +$$

$$+ b \sum_{k=0}^{q_n(i+2-n-r_n(i+2))} \binom{q_n(i + 2 - n - r_n(i + 2))}{k} a_{r_n(i+2-n-r_n(i+2))+k} \,.$$

$$. \, b^k (1 - b)^{q_n(i+2-n-r_n(i+2))-k} \,.$$

Z (1) až (6) plyne:

$$q_n(i + 1 - n) = q_n(i + 1) - 1 \,,$$

$$r_n(i + 1 - n) = r_n(i + 1) \,,$$

$$q_n(i + 2 - n - r_n(i + 2)) = q_n(i + 2) - 1 - \frac{r_n(i + 2)}{n} =$$

$$= q_n(i + 2) - 1 - q_n(i + 2) + q_n(i + 1) =$$

$$= q_n(i + 1) - 1 \,,$$

$$r_n(i + 2 - n - r_n(i + 2)) = i + 2 - n - r_n(i + 2)) -$$

$$- n q_n(i + 2 - n - r_n(i + 2)) =$$

$$= i + 2 - n - r_n(i + 2) - n q_n(i + 1) + n =$$

$$= i + 1 - n q_n(i + 1) + 1 - r_n(i + 2) =$$

$$= r_n(i + 1) + 1 - r_n(i + 2) \,,$$

a zároveň

$$r_n(i + 2 - n - r_n(i + 2)) = r_n(i + 2) \,,$$

takže

$$r_n(i + 1) + 1 - r_n(i + 2) \geqq 0 \,. \tag{10}$$

Užitím těchto vztahů dostáváme:

$$p_{i+1} = \sum_{k=0}^{q_n(i+1)-1} \binom{q_n(i + 1) - 1}{k} a_{r_n(i+1)+k}\, b^k (1 - b)^{q_n(i+1)-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{q_n(i+1)-1} \binom{q_n(i + 1) - 1}{k} a_{r_n(i+1)+1-r_n(i+2)+k}\, b^{k+1} (1 - b)^{q_n(i+1)-1-k} \,,$$

a ježto podle (6) a (7) je

$$a_{r_n(i+1)+1-r_n(i+2)+k} = a_{r_n(i+1)+1+k} \,,$$

je po jednoduché úpravě

$$p_{i+1} = \sum_{k=0}^{q_n(i+1)-1} \binom{q_n(i + 1) - 1}{k} a_{r_n(i+1)+k}\, b^k (1 - b)^{q_n(i+1)-k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{q_n(i+1)} \binom{q_n(i + 1) - 1}{k - 1} a_{r_n(i+1)+k}\, b^k (1 - b)^{q_n(i+1)-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{q_n(i+1)} \binom{q_n(i+1)}{k} a_{r_n(i+1)+k}\, b^k (1-b)^{q_n(i+1)-k}\,.$$

Tím je vztah (8) dokázán.

Ze (7) plyne, že (8) lze upravit na tvar

$$p_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{r_n(i)+k} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{q_n(i)}{k+nl} b^{k+nl} (1-b)^{q_n(i)-k-nl} \tag{11}$$

Položme nyní*) $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$; je-li k celé, $0 \leqq k < n$, platí

$$\sum_{m=0}^{n-1} (1 - b + b\omega^m)^{q_n(i)}\, \omega^{-km} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{q_n(i)} \binom{q_n(i)}{t} (1-b)^{q_n(i)-t} \,.\, b^t \omega^{mt-mk} =$$

$$= \sum_{t=0}^{q_n(i)} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{q_n(i)}{t} (1-b)^{q_n(i)-t}\, b^t \omega^{m(t-k)} =$$

$$= \sum_{t=0}^{q_n(i)} \binom{q_n(i)}{t} (1-b)^{q_n(i)-t}\, b^t \sum_{m=0}^{n-1} \omega^{m(t-k)} =$$

$$= n \sum_{l=0}^{\infty} \binom{q_n(i)}{k+nl} (1-b)^{q_n(i)-k-nl} \,.\, b^{k+nl}\,;$$

při celém s je totiž $\sum_{m=0}^{n-1} \omega^{ms} = n$, je-li s celistvý násobek n, jinak $\sum_{m=0}^{n-1} \omega^{ms} = 0$.

Podle (11) tedy

$$p_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_{r_n(i)+k} \sum_{m=0}^{n-1} (1 - b + b\omega^m)^{q_n(i)}\, \omega^{-km}$$

a vzhledem k (7)

$$p_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{m=0}^{n-1} (1 - b - b\omega^m)^{q_n(i)}\, \omega^{-m(k-r_n(i))}\,. \tag{12}$$

Pro $m = 0$ platí $|1 - b + b\omega^m| = 1$; pro $0 < m < n$, $n > 1$ je

$$|1 - b + b\omega^m| = \left|1 - b + b\cos\frac{2\pi m}{n} + \mathrm{i}b\sin\frac{2\pi m}{n}\right| =$$

$$= \sqrt{\left(1 - b + b\cos\frac{2\pi m}{n}\right)^2 + b^2 \sin^2\frac{2\pi m}{n}} =$$

$$= \sqrt{1 + 2b(b-1)\left(1 - \cos\frac{2\pi m}{n}\right)}\,.$$

*) Srovn. *Netto*: Lehrbuch der Kombinatorik, str. 19.

Ježto $0 < m < n$ a $0 < b < 1$, platí

$$0 < 1 - \cos\frac{2\pi m}{n} \leqq 2\,,$$

$$0 < b(1 - b) \leqq \tfrac{1}{4}\,,$$

tudíž

$$0 \leqq 1 + 2b(b - 1)\left(1 - \cos\frac{2\pi m}{n}\right) < 1\,,$$

$$|1 - b + b\omega^m| < 1\,.$$

Z (12) plyne (9) pro $n = 1$; je-li $n > 1$, je podle (12)

$$p_i = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \varrho_i\,,$$

kde

$$\varrho_i = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{m=1}^{n-1}(1 - b + b\omega^m)^{q_n(i)}\,\omega^{-m(k - r_n(i))}\,.$$

Označme μ největší z čísel $|1 - b + b\omega^m|$ pro $m = 1, \ldots, n - 1$, takže $0 \leqq \leqq \mu < 1$; pak

$$|\varrho_i| \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|a|_k \,.\sum_{m=1}^{n-1}|1 - b + b\omega^m|^{\,q_n(i)} \leqq \mu^{q_n(i)}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\,, \tag{13}$$

a ježto

$$\lim_{i\to\infty}\mu^{q_n(i)}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k| = 0\,,$$

je také

$$\lim_{i\to\infty}|\varrho_i| = 0 = \lim_{i\to\infty}\varrho_i\,.$$

Tedy vskutku platí (9).

Věta 3. *Nechť $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolná konvergentní posloupnost reálných čísel taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d \neq 0\,,$$

a nechť řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(d_n - d)$$

konverguje a má součet σ. Když $c \in R$, $c \neq 0$ a

$$s_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n\,,$$

nechť

$$z_n = r_c(s_n)\,.$$

Budiž Z množina všech hromadných bodů posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ a Z^* množina všech čísel $r_c(z)$ pro $z \in Z$. Pak platí: je-li $\left|\frac{c}{d}\right| = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená *čísla, má Z^* právě p prvků, a sice čísla $r_c(md + \sigma)$, $m = 0, 1, \ldots, p - 1$; je-li $\frac{c}{d}$ iracionální, je Z^* totožná s množinou všech čísel $x \in R$, pro něž platí* $0 \leqq$ $\leqq x \operatorname{sgn} c < |c|$.

Důkaz. Je

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}(d_n - d) = \lim_{n\to\infty}(s_n - nd),$$

tedy

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - (nd + \sigma)) = 0. \tag{14}$$

Nechť za prvé $\left|\frac{c}{d}\right| = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla, a nechť m je libovolné celé číslo takové, že $0 \leqq m < p$. Je-li $r_c(md + \sigma) \neq 0$, označme γ nejmenší z čísel

$$|r_c(md + \sigma)|, \quad |c - r_c(md + \sigma)|,$$

takže $0 < \gamma < |c|$.

Podle (14) existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$, $n \in N$ je

$$|s_{m+np} - (m + np)\, d - \sigma| < \gamma.$$

Potom však zřejmě

$$q_c(s_{m+np}) = q_c((m + np)\, d + \sigma),$$

a tedy pro $n > n_0$, $n \in N$

$$|s_{m+np} - (m + np)\, d - \sigma| = |r_c(s_{m+np}) - r_c(md + \sigma)|,$$

takže podle (14)

$$\lim_{n\to\infty} z_{m+np} = r_c(md + \sigma).$$

Je-li $r_c(md + \sigma) = 0$, označme N_1 množinu všech takových $n \in N$, pro něž

$$|r_c(s_{m+np})| < \frac{|c|}{2},$$

$$N_2 = N - N_1.$$

Aspoň jedna z množin N_1, N_2 je tedy nekonečná; jestliže je to N_1, pak, ježto

$$||r(s)| - |c| \,.\, |q_c(s_{m+np}) - q_c((m + np)\, d + \sigma)|| \leqq |s_{m+np} - (m + np)\, d - \sigma|,$$

je vzhledem k (14) pro skoro všechna $n \in N_1$

$$q_c(s_{m+np}) = q_c((m + np)\, d + \sigma),$$

takže posloupnost $\{z_{m+np}\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadný bod 0.

Je-li množina N_2 nekonečná, dokáže se snadno, že pro skoro všechna $n \in N_2$ je

$$q_c(s_{m+np}) = q_c((m + np)\, d + \sigma) - c,$$

tedy posloupnost $\{z_{m+np}\}_{n=1}^{\infty}$ má v tomto případě hromadný bod c.

Uvažme nyní, že když $m_1 < m_2$ jsou celá čísla taková, že $0 \leqq m_1 < p$, $0 \leqq m_2 < p$, pak

$$r_c(m_1 d + \sigma) \neq r_c(m_2 d + \sigma)\,,$$

neboť jinak by číslo

$$\left|\frac{d}{c}\,(m_1 - m_2)\right| = \frac{q(m_2 - m_1)}{p}$$

bylo celé, což není možné. Existuje tedy nejvýš jedno celé číslo m takové, že $0 \leqq m < p$ a že $r_c(md + \sigma) = 0$.

Dále je zřejmé, že posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá jiných hromadných bodů než hromadné body posloupností $\{z_{m+np}\}_{n=1}^{\infty}$, $m = 0, 1, \ldots, p - 1$. Množina Z^* tedy obsahuje právě p prvků, a to čísla

$$r_c(md + \sigma) \text{ pro } m = 0, 1, \ldots, p - 1\,.$$

Nechť za druhé $\frac{c}{d}$ je iracionální. Pak množina všech čísel $r_c(\sigma + nd)$ pro $n \in N$ je hustá v intervalu mezi čísly 0, c (viz na př. Jarník, Diferenciální počet, str. 71, cvič. 5) a z toho podle (14) snadno plyne tvrzení věty 3 pro iracionální $\frac{c}{d}$.

Vraťme se k důkazu věty 1. Ježto pro členy posloupnosti $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ platí při $i \geqq n$ rekurentní vztah

$$\alpha_i = (1 - b)\,\alpha_{i-n} + b\alpha_{i-n+1-r_n(i+1)}$$

(viz poznámku pod čarou na str. 300), je podle věty 2

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k = \frac{2\pi}{n}\,.$$

Dále pro každé celé nezáporné k je

$$\operatorname{Arg} A_{kn+l} = r_{2\pi}\Big(\sum_{i=0}^{k} b\alpha_{l+in}\Big)\,, \quad l = 0, 1, \ldots, n - 1$$

a tedy podle (13) řada $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\alpha_i - \frac{2\pi}{n}\right)$ absolutně konverguje.

Podle věty 3 tedy platí: je-li $b = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla, má posloupnost $\{\operatorname{Arg}(A_{kn+c})\}_{k=0}^{\infty}$ $\frac{nq}{D(n, p)}$ hromadných bodů, při čemž $D(n, p)$ značí největší společný dělitel čísel n, p.

Všimněme si nyní, že vepíšeme-li do kružnice opsané pravidelnému n_1-úhelníku pravidelné n_2-úhelníky tak, aby každý vrchol n_1-úhelníka byl vrcholem některého z těchto n_2-úhelníků, pak počet různých vrcholů, které tak na kružnici dostaneme, je roven nejmenšímu společnému násobku čísel n_1, n_2, a tyto body jsou na kružnici pravidelně rozloženy. Posloupnost $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ má tedy pro $b = \frac{p}{q}$ (p, q nesoudělná přirozená čísla)

$$\frac{nq}{D(n, p)} \cdot \frac{nq}{D\left(\frac{n}{D(n, p)}, n\right)} = \frac{nq}{D(n, p)} \cdot D(n, p) = nq$$

hromadných bodů; v případě iracionálního b je každý bod jednotkové kružnice hromadným bodem posloupnosti $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Věty, obsažené v této práci, lze ještě dále v několika směrech zobecnit. Část výsledků je možno krátce dokázat jinou methodou; o tom pojedná ing. dr JAROSLAV HÁJEK v poznámce, jíž naváže na tento článek.