Václav Kudláček

O svazově uspořádaných grupoidech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 1, 44--50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117147

O SVAZOVĚ USPOŘÁDANÝCH GRUPOIDECH

VÁCLAV KUDLÁČEK, Brno.

(Došlo dne 13. května 1954.)

DT: 519.4

Ve své práci pojednávám o svazově uspořádaných grupoidech, t. j. o množinách, které jsou současně grupoid a svaz. Mým cílem bylo především zobecnění některých výsledků, které byly získány pro svazově uspořádané grupy, jak jsou uvedeny jednak v (BL), jednak v (LG), jednak v (KB),*) na které mě upozornil prof. dr O. Borůvka. Ve zobecnění daných výsledků jsem postupoval tím způsobem, že jsem vynechal některé axiomy grupy a volil pak vztah mezi svazovým násobením a násobením v grupoidu. Věta první, druhá a pátá si všímá vztahu monotonie uspořádání pro násobení a zákonů distributivních pro násobení. Věta třetí ukazuje, že komutativní svazově uspořádaný grupoid s krácením je distributivní svaz. Věta šestá a sedmá určuje podmínky, kdy svazově uspořádaný grupoid je jednoduše uspořádaný. V textu je uvedeno několik příkladů svazově uspořádaných grupoidů.

Definice 1. *Částečně uspořádaný grupoid je grupoid, jehož pole je částečně uspořádaná množina v relaci $\leqq$ a kde pro libovolné prvky $a, x, y \in G$ platí*

$$(U) \quad x \leqq y \Rightarrow a \,.\, x \leqq a \,.\, y\,, \quad x \,.\, a \leqq y \,.\, a\,.$$

Definice 2. *Svazově uspořádaný grupoid je částečně uspořádaný grupoid, jehož pole je svaz.*

Poznámka: Ve svazově uspořádaném grupoidu G jsou každé uspořádané dvojici prvků (a, b) z grupoidu G přiřazeny prvky $a. b$, $a \cup b$, $a \cap b$ opět z grupoidu G. Je tedy svazově uspořádaný grupoid množina s trojím násobením nebo jinak svaz s třetím násobením, které je vázáno vztahem (U).

Věta 1. *Nechť G je svaz s třetím násobením, které je se svazovými operacemi vázáno vztahy, buď*

$$(D1) \quad a \,.\, (x \cup y) = a \,.\, x \cup a \,.\, y\,,$$
$$(D2) \quad (x \cup y) \,.\, a = x \,.\, a \cup y \,.\, a\,,$$

nebo

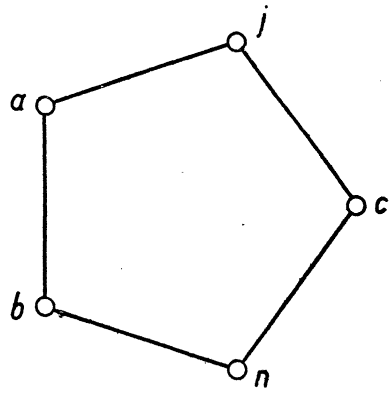
$$(D1') \quad a \,.\, (x \cap y) = a \,.\, x \cap a \,.\, y\,,$$
$$(D2') \quad (x \cap y) \,.\, a = x \,.\, a \cap y \,.\, a\,,$$

*) Viz seznam literatury na konci této práce.

kde $a, x, y \in G$. Pak G je svazově uspořádaný grupoid. Je-li G svazově uspořádaný grupoid, nemusí platit žádný ze vztahů $(D1)$, $(D2)$, $(D1')$, $(D2')$.

Důkaz: Nechť G je svaz s třetím násobením. Nechť platí $(D1)$ a $(D2)$. Nechť jsou $a, x, y \in G$ takové, že $x \leqq y$; pak $y = x \cup y$ a dále $a . y = a . (x \cup y) = a . x \cup a . y$, tedy $a . x \leqq a . y$. Podobně $y . a = (x \cup y) . a = x . a \cup y . a$, tedy $x . a \leqq y . a$. Platí tedy (U) a G je svazově uspořádaný grupoid. Podobně dokážeme platnost vztahu (U) z platnosti $(D1')$ a $(D2')$.

Nechť G je svazově uspořádaný grupoid, pak pro porovnatelné prvky $x, y \in G$ zřejmě platí distributivní zákony $(D1)$—$(D2')$. Neboť ať na př. $x \leqq y$, pak také $a . x \leqq a . y$, $x . a \leqq y . a$, pro $x, y, a \in G$. Dále $x \cup y = y$, $a . x \cup a . y = a . y = a . (x \cup y)$ a také $x . a \cup y . a = y . a = (x \cup y) . a$. Podobně se ukáže platnost $(D1')$ a $(D2')$.



Obr. 1.

Příklad 1. Ukážeme nyní na příkladě, že pro neporovnatelné prvky svazově uspořádaného grupoidu nemusí platit žádný ze vztahů $(D1)$—$(D2')$. Nechť G je svazově uspořádaný grupoid. Svazové násobení je dáno diagramem (obr. 1), grupoidní násobení je dáno tabulkou:

	j	a	b	c	n
j	j	a	a	a	b
a	a	a	a	c	n
b	a	b	b	n	n
c	b	c	n	n	n
n	n	n	n	n	n

Zřejmě je splněn vztah (U). Distributivní zákony $(D1)$—$(D2')$ neplatí, na př.

$$a = a . j = a . (b \cup c) \neq a . b \cup a . c = a \cup c = j ,$$
$$a = j . a = (b \cup c) . a \neq b . a \cup c . a = b \cup c = j ,$$
$$b = j . n = j . (b \cap c) \neq j . b \cap j . c = a \cap a = a .$$
$$n = n . j = (b \cap c) . j \neq b . j \cap c . j = a \cap b = b .$$

Tím je věta dokázána.

Věta 2. *Nechť G je komutativní svazově uspořádaný grupoid, v němž platí $(D1)$, $(D1')$, pak platí*

$$(K) \quad (a \cup b) . (a \cap b) = a . b .$$

Naopak svazově uspořádaný grupoid, v kterém platí (K), je komutativní, ale nemusí v něm nutně platit $(D1)$ a $(D1')$.

Důkaz: Nechť G je komutativní svazově uspořádaný grupoid, v němž platí $(D1)$ a $(D1')$. Protože G je komutativní grupoid platí, také $(D2)$ a $(D2')$. Nechť $a, b \in G$. Násobme nerovnosti $a \cup b \geqq a \geqq a \cap b$, resp. $a \cup b \geqq b \geqq a \cap b$ prvky

b resp. a. Pak máme $(a \cup b) . b \cap (a \cup b) . a \geqq a . b \geqq (a \cap b) . b \cup (a \cap b) . a$; dále $(a \cup b) . (a \cap b) \geqq a . b \geqq (a \cup b) . (a \cap b)$. Musí tedy platit (K).

Druhou část tvrzení dokažme na příkladě.

Příklad 2. Nechť G je svazově uspořádaný grupoid. Svazové násobení je dáno obrázkem (obr. 1) a grupoidní násobení je dáno tabulkou.

	j	a	b	c	n
j	j	j	j	j	j
a	j	j	j	j	j
b	j	j	j	j	c
c	j	j	j	j	c
n	j	j	c	c	n

Násobení je zřejmě komutativní. Vztah (K) je splněn pro porovnatelné prvky. Pro neporovnatelné prvky obdržíme:

$$(a \cup c) . (a \cap c) = j . n = a . c = j, \quad (b \cup c) . (b \cap c) = j . n = b . c = j .$$

Neplatí $(D1)$, neboť

$$c = c \cup c = n . b \cup n . c \neq n . (b \cup c) = n . j = j .$$

Neplatí $(D1')$, neboť

$$c = c \cap c = n . b \cap n . c \neq n . (b \cap c) = n . n = n .$$

Tím je naše věta dokázána.

Podobnou větu dokazuje poněkud jinak F. Klein-Barmen (KB, Satz 1, s. 88), ale předpokládá platnost asociativního zákona pro grupoidní násobení. V dalším klade otázku, zda naopak z platnosti vztahu (K) vyplývají vztahy $(D1)$ a $(D1')$ u asociativních svazově uspořádaných grupoidů. Odpověď je záporná, jak dokazuje předchozí příklad 2, v němž se jedná o asociativní grupoid.

Věta 3. *Nechť G je svaz s třetím násobením. Nechť platí (K) a pravidlo o krácení, t. j.*

$$a . x = a . y \Rightarrow x = y ;$$

pak G je distributivní svaz.

Poznámka: Podobnou větu pro svazově uspořádané grupy, ale nekomutativní dokazuje Birkhoff (BL, Chapt. XIV, Th. 5, p. 219). Pro svazově uspořádané grupoidy podobnou větu dokazuje Klein-Barmen (KB, Satz 6, s. 93). Využívá opět asociativního zákona.

Důkaz: Použijme věty, která je v BL, Chapt. IX, Th. 2, Cor. 1, p. 134. Svaz S je distributivní, platí-li pro libovolné prvky $a, x, y \in S$

$$\left.\begin{matrix} a \cup x = a \cup y \\ a \cap x = a \cap y \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y .$$

Nechť tedy a, x, y jsou libovolné prvky z G, pro které platí $a \cup x = a \cup y$, $a \cap x = a \cap y$. Vynásobením těchto rovnic dostaneme $(a \cup x) . (a \cap x) = (a \cup y) . (a \cap y)$, z čehož $a . x = a . y$. Po zkrácení máme $x = y$. Je tedy G distributivní svaz.

Věta 4. *Nechť G je svazově uspořádaný grupoid, v kterém platí pravidla o krácení. Pak pole grupoidu G nemůže býti konečná množina.*

Důkaz: Je-li pole konečná množina, je G quasigrupa. Nechť $j \in G$ je jednička svazu, nechť x je libovolný prvek z G, pak existuje prvek $y \in G$ tak, že $x . y = j$. Platí $j \geqq y$, z čehož $x . j \geqq x . y = j$. Je tedy $x . j = j$ pro všechna $x \in G$, což je spor.

Definice 3. *Nechť G je částečně uspořádaný grupoid, který je současně quasigrupa, pak grupoid G nazveme částečně uspořádanou quasigrupou. Když G je svaz, pak G nazveme svazově uspořádanou quasigrupou.*

Označme

$$(H) \quad a . x \leqq a . y \Leftrightarrow x \leqq y, \quad x . a \leqq y . a \Leftrightarrow x \leqq y .$$

Věta 5. *Nechť G je svazově uspořádaná quasigrupa. Když a jen když platí (H), pak platí $(D1)$, $(D2)$.*

Důkaz: 1a) Nechť platí $(D1)$, $(D2)$. Nechť $x, y, a \in G$, $x \leqq y$. Potom $a . (x \cup y) = a . y = a . x \cup a . y$, tedy $a . x \leqq a . y$.

b) Nechť $a . x \leqq a . y$, pak $a . x \cup a . y = a . y = a . (x \cup y)$, z toho $y = x \cup y$, tedy $x \leqq y$. Podobně pro $x . a \leqq y . a$.

2. Nechť platí (H). Nechť $a, x, y \in G$, pak existuje $c \in G$ tak, že platí

$$a . x \leqq a . x \cup a . y = a . c, \text{ pak } a . x \leqq a . c, \text{ tedy } x \leqq c,$$
$$a . y \leqq a . x \cup a . y = a . c, \text{ pak } a . y \leqq a . c, \text{ tedy } y \leqq c .$$

Nechť pro nějaké $d \in G$ platí $x \leqq d$, $y \leqq d$, pak $a . x \leqq a . d$, $a . y \leqq a . d$ a $a . c \leqq a . d$; z toho $c \leqq d$ a $c = x \cup y$. Máme tedy $a . (x \cup y) = a . x \cup a . y$.

Podobně postupujeme pro $(x \cup y) . a = x . a \cup y . a$.

Poznámka 1. Věta 5 platí, zaměníme-li v ní $(D1)$ a $(D2)$ pomocí $(D1')$ a $(D2')$.

Poznámka 2. Podobnou větu dokazuje Birkhoff v (BL) pro svazově uspořádané grupy.

Definice 4. *Nechť G je svazově uspořádaná lupa (t. j. svazově uspořádaná quasigrupa s jedničkou). Jednoznačně stanovený prvek $a^{-1} \in G$ s vlastností $a . a^{-1} = e$ nazýváme (pravým) inversním prvkem.*

Poznámka: Birkhoff v (BL) v Chapt. XIV, § 4, cv. 7 definuje svazově uspořádanou lupu jinak.

Definice 5. *Částečně uspořádaný grupoid G je jednoduše uspořádaný, když pole grupoidu je jednoduše uspořádáno, t. j. když pro každé dva prvky $a, b \in G$ platí jeden ze vztahů $a \leqq b$, $a \geqq b$.*

Věta 6. *Nechť G je svazově uspořádaná lupa, kde platí (H). Když a jen když pro libovolné prvky $a, b \in G$, $a > e$, $b > e$ platí $a \cap b > e$, pak G je jednoduše uspořádaná.*

Důkaz: Když G je jednoduše uspořádaná, tvrzení je zřejmé. Nechť nyní platí podmínky věty. Ukažme nejprve, že platí-li pro nějaké dva prvky $a, b \in G$ některý ze vztahů:

$$1.\ a \,.\, b^{-1} \leqq e\,, \qquad 2.\ e \leqq b \,.\, a^{-1}\,,$$
$$3.\ a \,.\, b^{-1} \geqq e\,, \qquad 4.\ e \geqq b \,.\, a^{-1}\,,$$

pak musí platit jeden ze vztahů $a \leqq b$, $b \leqq a$. Nechť na př. platí 1. Pak máme $b \,.\, b^{-1} = e = a \,.\, b^{-1} \cup e = a \,.\, b^{-1} \cup b \,.\, b^{-1} = (a \cup b) \,.\, b^{-1}$, odtud $b = a \cup b$, tedy $a \leqq b$. Podobně pro vztahy 2—4.

Předpokládejme nyní, že pro některé dva prvky $a, b \in G$ neplatí ani jeden ze vztahů 1.—4. Musí tedy platit

$$a \,.\, b^{-1} \cup e > e\,, \qquad b \,.\, a^{-1} \cup e > e\,,$$
$$a \,.\, b^{-1} \cap e < e\,, \qquad b \,.\, a^{-1} \cap e < e\,.$$

Je tedy

$$(A) \qquad (a \,.\, b^{-1} \cup e) \cap (b \,.\, a^{-1} \cup e) > e\,.$$

Dále

$$e \geqq (a \,.\, b^{-1} \cap e) \cup (b \,.\, a^{-1} \cap e) = (a \,.\, b^{-1} \cap b \,.\, b^{-1}) \cup (b \,.\, a^{-1} \cap a \,.\, a^{-1}) =$$
$$= (a \cap b) \,.\, b^{-1} \cup (a \cap b) \,.\, a^{-1} = (a \cap b) \,.\, (b^{-1} \cup a^{-1}) = a \,.\, (b^{-1} \cup a^{-1}) \cap b \,.$$
$$.\, (b^{-1} \cup a^{-1}) = (a \,.\, b^{-1} \cup e) \cap (e \cup b \,.\, a^{-1})\,,$$

což je spor s (A). Musí tedy platit jeden ze vztahů 1.—4. a tím je věta dokázána.

Definice 6. *Nechť G je částečně uspořádaný grupoid s jednotkou e, pak prvek k se nazývá minimální kladný prvek, není-li vztah $e < x < k$ splněn pro žádné $x \in G$. Množinu všech minimálních kladných prvků nazýváme krycí množinou jednotky e.*

Věta 7. *Nechť G je svazově uspořádaná lupa, kde platí (H). Nechť krycí množina obsahuje právě jeden prvek k. Nechť pro každé $x \in G$, pro něž $x > e$, platí $x \geqq k$. Potom G je jednoduše uspořádaná.*

Důkaz: Uvažujme $x, y \in G$ takové, že $x > e$, $y > e$. Dále máme $x \geqq k$, $y \geqq k$, $x \cap y \geqq k > e$. Je tedy G podle věty 6 jednoduše uspořádaná.

Poznámka: Věta 6 a 7 je dokázána pro svazově uspořádané grupy v (LG). Všimněme si, že jsme k důkazu vět užili pouze těchto předpokladů: G je svazově uspořádaný grupoid s jednotkou; ke každému prvku existuje inversní prvek; platí vztahy $(D1)$—$(D2')$ a krácení.

Uveďme příklad svazově uspořádaného grupoidu, který vyhovuje těmto zjednodušeným předpokladům a není grupa.

Příklad 3. Nechť G je množina celých čísel. Grupoidní násobení je dáno následujícími vztahy

1. Je-li $x > 0$, $y > 0$, pak

$$x \,.\, y = \binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y} .$$

2. Je-li $x > 0$, $y < 0$, nebo $x < 0$, $y > 0$, pak

$$x \,.\, y = x + y ,$$

kde symbolem $x + y$ je myšleno sečítání v obvyklém smyslu.

3. Je-li $x < 0$, $y < 0$, pak

$$x \,.\, y = -\binom{|x| + |y|}{|x|} = -\binom{|x| + |y|}{|y|} .$$

4. Je-li $x = 0$, pak pro všechna $y \in M$ platí

$$0 \,.\, y = y .$$

Svazové násobení definujeme takto:

$$x \cup y = \max(x, y) , \quad x \cap y = \min(x, y) .$$

Tabulka pro grupoidní násobení:

	...	—3	—2	—1	0	1	2	3	...
.		.	.	.	.	.	.	.	
.		.	.	.	.	.	.	.	
.		.	.	.	.	.	.	.	
—3	...	—20	—10	—4	—3	—2	—1	0	...
—2	...	—10	—6	—3	—2	—1	0	1	...
—1	...	—4	—3	—2	—1	0	1	2	...
0	...	—3	—2	—1	0	1	2	3	...
1	...	—2	—1	0	1	2	3	4	...
2	...	—1	0	1	2	3	6	10	...
3	...	0	1	2	3	4	10	20	...
.		.	.	.	.	.	.	.	
.		.	.	.	.	.	.	.	
.		.	.	.	.	.	.	.	

Z tabulky je zřejmé, že násobení je abelovské, není asociativní a ke každému prvku $x \in G$ existuje inversní prvek x^{-1}, který je dán vztahem $x^{-1} = -x$. Dále platí krácení. Je splněn vztah (U). Z definice svazového násobení je zřejmé, že jsou splněny vztahy (D1)—($D2'$) a pro $x, y \in G$ platí, když $x > e$, $y > e$, pak $x \cap y > e$.

LITERATURA

(BL) *Garrett Birkhoff*: Lattice theory, Revised Edition, 1948, New York.

(BG) *Otakar Borůvka*: Úvod do teorie grup, 2. vydání, 1952, Praha.

(KB) *Fritz Klein-Barmen*: Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung. Mathematische Zeitschrift *47*, roč. 1941, S. 85—104.

(LG) *F. Loonstra*: Discrete Groups, Indagationes math. *13* (1951), p. 162-168.

Резюме

СТРУКТУРНО УПОРЯЦОЧЕННЫЕ ГРУППОИДЫ

ВАЦЛАВ КУДЛАЧЕК (Václav Kudláček), Брно.

(Поступило в редакцию 13/V 1954 г.)

Работа содержит некоторые результаты теории структурно опорядоченных группоидов, т. е. структур с третьим умножением; в ней показаны определенные соотношения между структурными операциями и третьим умножением.

В статье, показаны и некоторые обобщения результатов, которые приведены в работах Клейн-Бармена (KB), Люнстра (LG) и Биркгофа (BL).

Summary.

LATTICE-ORDERED GROUPOIDS

VÁCLAV KUDLÁČEK, Brno.

(Received May 13, 1954.)

This work contains some results concerning the theory of lattice-ordered groupoids, i. e. lattices with third multiplication, in which certain relations between lattice-operations and a third operation are defined. In my work I give some generalizations of the results obtained by Birkhoff (BL), Loonstra (LG) and Klein-Barmen (KB).