ZPRÁVY

VĚDECKÉ PRÁCE M. KÖSSLERA

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

V předešlém čísle tohoto časopisu vystihl akademik EDUARD ČECH vřelými slovy krásnou osobnost našeho milého jubilanta, prof. MILOŠE KÖSSLERA, který se tohoto roku dožil sedmdesátky. Tento článek je pak věnován Kösslerově vědecké činnosti. Jeho významná badatelská práce je až na malé výjimky věnována dvěma oborům matematiky: teorii analytických funkcí a teorii čísel — a ovšem též styčným oborům těchto dvou oblastí. V tomto informativním článku se nikterak nepokouším o úplnost a podávám přehled jen o některých pracích Kösslerových; snažil jsem se vybrat ty, které co nejlépe ukazují vědecký profil autorův a z nich opět ty, o nichž si čtenář na základě několikařádkového výkladu může utvořiti poměrně jasný obraz. Přirozeně je takový výběr subjektivn a omlouvám se prof. Kösslerovi i čtenáři, jestliže jsem jej někde provedl nevhodně; bylo by však v každém případě předčasné, hodnotit úplně a definitivně práci vědce, který je stále intensivně vědecky činný.

V důležitém oboru *analytických funkcí,* který hraje tak velkou roli ve vnitřní výstavbě matematiky i v jejích aplikacích, je Kössler dosud jediným naším zralým specialistou. Již v počátcích jeho vědecké činnosti se setkáváme s dvěma obšírnými pracemi [5] (z r. 1915—16), věnovanými theorii analytických funkcí. Obsah těchto prací vylíčím jen zlomkovitě — podrobný referát by vyplnil celý článek. Nechť vztah

$$z = g(t) \tag{1}$$

zobrazuje konformně a vzájemně jednoznačně jisté mezikruží $r \leqq |t| \leqq R$ $(r < 1 < R)$; označme C obraz kružnice $|t| = 1$, t. j. množinu všech bodů $g(e^{i\varphi})$ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$. Potom lze nalézti posloupnost funkcí $b_1(z), b_2(z), \ldots$, regulárních uvnitř C a na C,[1]) s těmito vlastnostmi: Je-li F libovolná funkce regulární uvnitř křivky C a na ní, existuje posloupnost čísel A_k tak, že je

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \, b_k(z) \tag{2}$$

v každém bodě z uvnitř C, při čemž konvergence je absolutní a stejnoměrná na každé kompaktní množině, ležící uvnitř C. Funkce $b_k(z)$ a čísla A_k jsou defi-

[1]) Říkám, že analytická funkce f je regulární v nějaké množině, jestliže ji lze v okolí každého bodu této množiny rozvinouti v Taylorovu řadu; terminologie v literatuře poněkud kolísá. V dalším jde výhradně o jednoznačné větve analytických funkcí.

nována jistými křivkovými integrály (připomínajícími vzorce pro koeficienty Laurentova rozvoje). Závažnou je otázka, zda rozvoj (2) je **jediný** tohoto tvaru — jinak řečeno, zda existuje řada tvaru $\Sigma B_k b_k(z)$, mající aspoň jeden koeficient B_k různý od nuly, jejíž součet by byl roven nule všude uvnitř C. Kössler řeší tuto otázku v některých důležitých případech; odpověď je někdy kladná, někdy záporná. Na druhé straně se ukazuje, že funkce $b_k(z)$ lze i při daném C voliti mnoha způsoby. Jako zvláštní případ jsou v Kösslerových rozvojích obsaženy na př. Faberovy polynomické rozvoje. Podobné výsledky platí také pro rozvoje funkcí, platné **vně** křivky C.

Další práce Kösslerovy z teorie analytických funkcí se týkají převážně teorie mocninných řad (výjimku tvoří hlavně práce o funkci ζ, o nichž se zmíním v odstavci, věnovaném teorii čísel). Poloměr konvergence mocninné řady

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{3}$$

je, jak známo, roven převrácené hodnotě čísla $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Poznamenejme, že Kössler ve své práci [29] (1949) upozornil na to, že v mnohých otázkách teorie funkcí je výhodno užíti prostě čísla $\sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Tímto způsobem se v řadě otázek dostanou přesné odhady, na př. pro poloměr konvergence řady pro funkci inversní k f, pro nejmenší vzdálenost nulového bodu funkce f od počátku atd. Vraťme se však k starším pracím Kösslerovým.

Společnou thematiku mají práce [13], [14], [15], [16], [17] (1923—24), pojednávající o singularitách mocninné řady na konvergenční kružnici. Nechť řada (3) má poloměr konvergence rovný jedné. Potom na kružnici $|z| = 1$ leží aspoň jeden singulární bod funkce f. Jak nyní rozhodnout, zda daný bod kružnice, na př. bod $z = 1$, je singulárním bodem? Kössler dosazuje do (3)

$$z = x + \tfrac{3}{4}x^2\,, \tag{4}$$

čímž dostane novou řadu

$$F(x) = f(x + \tfrac{3}{4}x^2) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \tag{5}$$

Kruh $|x| \leqq \frac{2}{3}$ se zobrazuje transformací (4) na obor, který s výjimkou bodu $z = 1$ (odpovídajícího hodnotě $x = \frac{2}{3}$) leží celý **uvnitř** kružnice $|z| = 1$. Řada (5) má tedy poloměr konvergence $\geqq \frac{2}{3}$, při čemž znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, nelze-li f analyticky pokračovati přes bod $z = 1$. Tedy: bod $z = 1$ je singulárním bodem funkce $f(z)$ tehdy a jen tehdy, jestliže

$$\limsup_{n\to\infty} |A_n|^{\frac{1}{n}} = \tfrac{3}{2}\,.$$

Tuto podmínku lze napsati pomocí koeficientů a_k.[2]) Výraz, který takto vyjde,

[2]) Substitucí $z = te^{i\varphi}$ lze ovšem ihned napsati podmínku pro singulárnost bodu $e^{i\varphi}$ (φ reálné).

vypadá na pohled značně složitě; ale vhodnou úpravou dostává z něho Kössler postačující podmínku pro singulárnost bodu $z = 1$, ze které s překvapující snadností plynou podstatná zobecnění vět předtím známých. Uveďme jen jeden příklad. Známá věta Vivanti-Dienesova praví: Jestliže existuje reálné ψ a $\delta > 0$ tak, že všechny vektory $a_n = |a_n|e^{i\varphi_n}$ leží v úhlu $-\frac{1}{2}\pi + \delta < \varphi_n - \psi < \frac{1}{2}\pi - \delta$, je $z = 1$ singulárním bodem. Z Kösslerových úvah plyne toto zobecnění: Bod $z = 1$ je singulárním bodem funkce f, jestliže existuje $\mu > 0$, $\delta > 0$, posloupnost reálných čísel $\psi_1, \psi_2, \dots$ a posloupnost indexů $n_1 < n_2 < \dots$, mající tyto vlastnosti

$$\text{I. } \lim_{q\to\infty} |a_{n_q}|^{\frac{1}{n_q}} = 1\,,$$

$$\text{II. } |\psi_q - \varphi_n| < \tfrac{1}{2}\pi - \delta \text{ pro } |n - n_q| \leqq \mu n_q.$$

Je vidět charakter zobecnění: Podmínka II nemusí být splněna pro všechny indexy n, nýbrž jen pro n z jistých skupin indexů $n_q - \mu n_q \leqq n \leqq n_q + \mu n_q$, při čemž čísla n_q mohou ležeti libovolně „řídko" (jen když splňují podmínku I); mimoto poloha úhlu, v němž leží koeficienty a_n z q-té skupiny, se může měnit od skupiny ke skupině (ψ_q závisí na q). Podmínka II je ostatně u Kösslera nahrazena podmínkou ještě mnohem obecnější

$$\text{IIa. } |\psi_q - \varphi_n| \leqq \tfrac{1}{2}\pi \text{ pro } |n - n_q| \leqq \mu n_q, \quad \lim_{q\to\infty} (\cos(\psi_q - \varphi_{n_q}))^{\frac{1}{n_q}} = 1\,.$$

Podobně lze obdržeti další kriterium Szászovo, dále větu Fatou-Pólyovu (změnou znamení u některých a_n lze dosáhnouti toho, že všechny body kružnice $|z| = 1$ jsou singulární) a věty Hadamardovu a Fabryovu o „mezerovitých řadách" (je-li v (3) „příliš mnoho" koeficientů rovných nule, je každý bod kružnice $|z| = 1$ singulárním) — vše ovšem stále za předpokladu, že řada (3) má poloměr konvergence rovný jedné.

V dalších pracích se Kössler zabýval t. zv. „ohraničenými řadami". I. Schur nalezl nutné a postačující podmínky, které musí splňovati koeficienty $a_0, a_1, \dots$, aby pro funkci (3) platilo toto:

$$f(z) \text{ je regulární a } |f(z)| \leqq 1 \text{ pro } |z| < 1\,. \tag{7}$$

Z těchto podmínek plyne na př., že žádný nulový bod funkce f nemůže ležeti v kruhu $|z| < |a_0|$ (je-li $a_0 \neq 0$). Kössler v práci [20] (1930) řeší tuto obecnou otázku: Kde mohou ležeti nulové body funkcí (3), splňujících podmínku (7), u kterých prvních n koeficientů

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \tag{8}$$

je předepsáno? Kössler nachází pro každé n oblast K_n, závislou pouze na číslech (8) a ohraničenou algebraickou křivkou, která má tuto vlastnost: Funkce (3) s vlastnostmi (7) a s danými koeficienty (8) nemá nulových bodů v K_n, může však — při vhodně zvolených dalších koeficientech $a_n, a_{n+1}, \dots$ — míti nulový bod v kterémkoliv předem daném bodě hranice oblasti K_n.

V práci [24] (1935) vyšetřuje Kössler funkci

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (\text{tedy } f(0) = 0)$$

a ptá se, kdy tato funkce je pro $|z| < 1$ regulární a splňuje tam všude nerovnosti

$$-b \leqq \Im f(z) \leqq \pi - b\,;^{3})$$

přitom b je dané číslo, $0 < b < \pi$. Odpověď zní: tehdy a jen tehdy, jestliže existuje reálná funkce g tak, že

$$0 \leqq g(\varphi) \leqq \pi \text{ pro } 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi b\,,$$

$$f(z) = \frac{\mathrm{i}z}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - z}\,\mathrm{d}\varphi \text{ pro } |z| < 1\,; \tag{9}$$

místo (9) lze též psáti

$$a_n = \frac{\mathrm{i}}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi)\,\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Tím jsou určeny podmínky pro a_n; Kössler přetvořuje tyto podmínky též na aritmetický tvar.

Předešlé dvě práce se týkaly funkcí $f(z)$, které jsou jistým způsobem ohraničeny v kruhu $|z| < 1$. Práce [21], [22] (1931—32) a [23] (1934) se týkají t. zv. funkcí prostých (однолистные ф., schlichte F.). Budeme říkat, že funkce $f(z)$ je prostá v otevřeném kruhu $|z| < r$, je-li tam regulární a jestliže pro $|z_1| < r$, $|z_2| < r$, $z_1 \neq z_2$ je vždy $f(z_1) \neq f(z_2)$. Budiž nyní f prostá v kruhu $|z| < 1$; potom funkce f zobrazuje tento kruh na jistou oblast jednoduše souvislou. Přitom je stále $f'(z) \neq 0$ pro $|z| < 1$; bez újmy obecnosti můžeme předpokládati $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, takže

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \text{ pro } |z| < 1\,. \tag{10}$$

Vezměme libovolný bod z ($|z| < 1$), přejděme do „blízkého" bodu $z + \Delta z$ a vyšetřujme, jaký je vztah mezi Δz a $\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z)$. Pro malá Δz bude přibližně $\Delta f(z) = f'(z)\,.\,\Delta z$ a tedy (srovnáním jednak absolutních hodnot, jednak amplitud)

$$|\Delta f(z)| = |f'(z)|\,.\,|\Delta z|, \text{ ampl } \Delta f(z) = \text{ampl } f'(z) + \text{ampl } \Delta z\,.$$

Tedy $|f'(z)|$ měří „poměr zvětšení," ampl $f'(z)$ měří „otočení," které musíme provésti, abychom od Δz přešli k $\Delta f(z)$ (přibližně). Jestliže nyní funkce (10) je prostá pro $|z| < 1$, platí pro $|z| < 1$ tyto Bieberbachovy odhady (Bieberbach jim říká „Verzerrungssatz" a „Drehungssatz"):

[3]) $\Re z$, $\Im z$ značí reálnou a imaginární část čísla z.

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqq |f'(z)| \leqq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \quad |\mathrm{ampl}\, f'(z)| \leqq 2 \lg \frac{1+|z|}{1-|z|}.^{4)} \quad (11)$$

Odhad pro $|f'|$ je přesný,[5]) avšak odhad pro $|\mathrm{ampl}\, f'(z)|$ nikoliv a Kössler jej zlepšuje v pracích [21], [22]; přesný odhad byl později (1936) dán GOLUZINEM a VASILJEVIČEM. Vedle toho dokazuje Kössler v práci [21] novou nerovnost

$$1 + \Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqq \frac{1-|a_2z|-6|z^2|-|a_2z^3|+|z^4|}{(1-|z^2|)(1+|a_2z|+|z^2|)};$$

tato nerovnost je přesná (pro prosté funkce (10) s libovolně předepsaným $|a_2| \leqq 2$). Význam této nerovnosti je patrný z této poznámky: Obraz kružnice $|z| = r$ (t. j. množina všech bodů $f(re^{i\varphi})$, φ reálné) je konvexní tehdy a jen tehdy, je-li

$$1 + \Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqq 0$$

v každém bodě kružnice $|z| = r$.

V práci [23] sestrojuje Kössler tři značně obecné třídy prostých funkcí. Na př. jedna z nich je definována takto: Vezměme libovolnou funkci $\varrho(z)$, kde ϱ je regulární a $|\varrho(z)| \leqq 1$ pro $|z| < 1$ a definujme funkci $f(z)$ rovnicí

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \int_0^z \varrho(t)\, dt;$$

potom f je regulární a prostá pro $|z| < 1$ a píšeme-li f ve tvaru (10), je

$$|a_n| \leqq 1 \quad (n = 2, 3, \ldots). \qquad (12)$$

Podobně u jiné z těchto tří tříd dokazuje Kössler

$$|a_n| \leqq n \quad (n = 2, 3, \ldots). \qquad (13)$$

Je dosud nedokázanou domněnkou, že (13) platí pro každou funkci prostou pro $|z| < 1$ tvaru (10); dlouho se udržovala domněnka, že (12) platí pro každou funkci prostou pro $|z| < 1$ tvaru (10), která je lichá (t. j. $a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = 0$), ale tato domněnka byla vyvrácena r. 1943. Přesto však (13) resp. (12) platí pro rozsáhlé třídy prostých (resp. lichých prostých) funkcí.

Speciálním případem mocninných řad jsou polynomy

$$P(z) = c_0 + c_1z + \ldots + c_nz^n; \qquad (14)$$

píšeme-li zde $z = e^{i\varphi}$, dostáváme t. zv. trigonometrický polynom, t. j. funkci tvaru

$$T(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi). \qquad (15)$$

---

[4]) Ježto $f'(z) \neq 0$ pro $|z| < 1$, existuje spojitá větev funkce $\mathrm{ampl}\, f'(z)$ v kruhu $|z| < 1$. V poslední nerovnosti (11) je míněna ona spojitá větev, pro kterou je $\mathrm{ampl}\, f'(0) = \mathrm{ampl}\, 1 = 0$ (a nikoliv $= 2k\pi$ pro některé celé $k \neq 0$).

[5]) T. j. existují prosté funkce tvaru (10), pro něž platí znamení rovnosti; stačí vzíti funkci $\frac{z}{(1+z)^2}$ s derivací $\frac{1-z}{(1+z)^3}$ a dosadit jednou $1 > z > 0$, podruhé $-1 < z < 0$.

Polynomy a trigonometrickými polynomy se zabývají dvě významné práce Kösslerovy [28], [30]. Jestliže v (15) není $a_n = b_n = 0$, říkáme, že T je n-tého stupně. Pouhým „fázovým posunutím" (t. j. zavedením nové proměnné $\varphi' = \varphi - \text{const}$) lze docíliti toho, že $b_n = 0$. Kössler pak (viz [28], 1949) řeší tuto otázku: Nechť polynom (15) ($a_n \neq 0$, $b_n = 0$) má reálné koeficienty; kdy je $T(\varphi) \geqq 0$ pro všechna reálná φ? Tehdy a jen tehdy, lze-li psáti

$$T(\varphi) = A \prod_{k=1}^{n} (\gamma_k + \cos(\varphi - \psi_k)) , \tag{16}$$

$A > 0$, $\gamma_k \geqq 1$, ψ_k reálná, $\psi_1 + \ldots + \psi_n = 0$. Je-li nyní dán (algebraický) polynom $P(z)$ a ptáme-li se, za jakých podmínek je $\Re\, P(z) \geqq 0$, resp. $|P(z)| \leqq 1$ v kruhu $|z| < 1$, můžeme postupovati takto: k tomu, aby uvedené nerovnosti byly splněny pro $|z| < 1$, stačí, aby byly splněny pro $|z| = 1$, t. j. $z = e^{i\varphi}$, φ reálné. Jde tedy o nerovnosti

$$\Re P(e^{i\varphi}) \geqq 0 , \quad 1 - P(e^{i\varphi}) \,.\, \overline{P(e^{i\varphi})} \geqq 0$$

($\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené k z), kde vlevo jsou trigonometrické polynomy s reálnými koeficienty. Problém je tedy v podstatě řešen vzorcem (16). Obdobný problém pro mocninné řady byl řešen již dříve (Carathéodory, Toeplitz, I. Schur). Nutné a postačující podmínky jsou dány soustavou nekonečně mnoha nerovností mezi koeficienty řady. Je zajímavo, že ve speciálním případě polynomu se tyto podmínky neredukují na konečný počet nerovností, kdežto řešení Kösslerovo je dáno konečným počtem podmínek.

Práce [30] se zabývá otázkou: Jaká je nutná a postačující podmínka, aby polynom

$$P(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0) \tag{17}$$

(s komplexními koeficienty) byl prostý v některém kruhu $|z| < r$ s poloměrem > 1. Sestrojme rovnice

$$\left.\begin{aligned} 1 + \sum_{k=2}^{n} a_k (z_1^{k-1} + z_1^{k-2} z_2 + \ldots + z_2^{k-1}) &= 0 , \\ z_1^{n-1} z_2^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \bar{a}_k z_1^{n-k} z_2^{n-k} (z_1^{k-1} + z_1^{k-2} z_2 + \ldots + z_2^{k-1}) &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Nutná a postačující podmínka je, aby pro žádné řešení z_1, z_2 nebylo $|z_1| = |z_2| = 1$. Jiný tvar nutné a postačující podmínky: pro žádné řešení z_1, z_2 není ani $|z_1| \leqq 1$, $|z_2| \leqq 1$, ani $|z_1| \geqq 1$, $|z_2| \geqq 1$. Zavedeme-li do (18) substituce $z_1 = xy$, $z_2 = \dfrac{x}{y}$ a potom ještě $y + \dfrac{1}{y} = u$, dostaneme místo (18) rovnice tvaru

$$1 + \sum_{k=2}^{n} a_k x^{k-1} P_{k-1}(u) = 0 , \quad x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \bar{a}_k x^{n-k} P_{k-1}(u) = 0 , \tag{19}$$

kde polynomy $P_1(u) = u$, $P_2(u) = u^2 - 1$, $P_3(u) = u^3 - 2u$ atd. se snadno vypočetou. Nutná a postačující podmínka má pak tvar: Rovnice (19) nemají žádné řešení x, u, kde $-2 \leqq u \leqq 2$. Rovnice (19) pojímejme jako rovnice v x; potom tyto rovnice mají (při určitém u) společné řešení tehdy a jen tehdy, je-li jejich resultant $R(u)$ (to je polynom v u) roven nule. Ukazuje se: Hledaná nutná a postačující podmínka je, aby $R(u) \neq 0$ pro $-2 \leqq u \leqq 2$. To je tedy v zásadě velmi jednoduchá podmínka algebraického rázu. Ovšem efektivní zjištění, zda je v daném případě splněna, je obtížné, jak ukazuje již případ $n = 3$, v práci podrobně prodiskutovaný.

Druhým oborem matematiky, ve kterém Kössler dosáhl významných úspěchů, je *theorie čísel*. Hlavní interes Kösslerův je zde věnován jednak problémům rozdělení prvočísel, jednak problému dělitelů.

Označme znakem $\pi(x)$ počet prvočísel, jež jsou $\leqq x$. Slavná prvočíselná věta praví, že

$$\pi(x) = \frac{x}{\lg x} + R(x)\,, \quad \text{kde} \quad R(x) = o\left(\frac{x}{\lg x}\right).\text{[6]} \tag{20}$$

Další vývoj analytické theorie prvočísel vedl mimo jiné k přesnějším odhadům funkce $R(x)$ v „asymptotickém" vzorci (20). V tomto problému hraje hlavní úlohu t. zv. Riemannova funkce $\zeta(s)$ ($s = \sigma + it$), definovaná v polorovině $\sigma > 1$ rovnicí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}\,; \tag{21}$$

součin vpravo (kde se násobí přes všechna prvočísla p)[7]) ukazuje zřetelně na souvislost funkce ζ s prvočísly.

Označme nyní znakem $d(n)$ počet dělitelů čísla n; položme

$$T(x) = \sum_{n \leqq x} d(n)\,. \tag{22}$$

Snadno se dokáže vzorec

$$T(x) = x \lg x + (2C - 1)\,x + R_1(x), \text{ kde } R_1(x) = O(\sqrt{x}) \tag{23}$$

(C je Eulerova konstanta). Na rozdíl od vzorce (20) se zde „hlavní člen" v rovnici (23) odvodí snadno; obtíže vznikají teprve při stanovení řádové velikosti funkce $R_1(x)$ — tento problém není dosud definitivně rozřešen (podobně jako u funkce $R(x)$ v (20)).

Kösslerovy práce, mající vztah k theorii čísel, se rozpadají methodicky ve dvě skupiny. První skupina stojí na rozhraní theorie funkcí a theorie čísel; druhá pak má ráz vysloveně číselně theoretický a užívá více elementárních

---

[6]) Znak $f(x) = o(g(x))$ značí, že $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$; znak $f(x) = O(g(x))$ značí, že funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ je omezená v jistém intervalu $(a, +\infty)$; předpokládá se $g(x) > 0$.

[7]) Písmenem p budu označovati výhradně prvočísla.

method (matematik ovšem ví, že „elementární" v matematice neznamená „snadný" — často spíše naopak). Abych nerozptyloval čtenářovu pozornost, vyberu z každé skupiny jen dvě práce.

Z první skupiny jsem vybral práce [6], [25], týkající se především funkce $\zeta(s)$ (nemluvím o jistých zobecněních, obsažených v těchto pracích). Při otázce o řádové velikosti „zbytku" R ve vzorci (20) je lhostejné, vyšetřuji-li funkci $\pi(x)$ nebo funkci

$$f(x) = \pi(x) + \tfrac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

Pro funkci f udal již RIEMANN vyjádření určitým integrálem, z něhož Kössler v práci [6] (1916) odvozuje vyjádření nekonečnou řadou absolutně konvergentní; přitom užívá za integračním znamením Lagrangeovy řady (sluší ostatně poznamenati, že zobecnění Lagrangeovy řady se zajímavými aplikacemi na řešení rovnic věnoval Kössler zvláštní práci [12] (1922)). Práce [25] (1941) nemá mnoho souvislosti s theorií čísel; jde v ní na př. o řešení této otázky: Hodnoty $\zeta(2k)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ lze snadno vyjádřiti Bernoulliovými čísly, neznáme však jednoduchého vyjádření hodnot $\zeta(2k + 1)$. Užitím funkcionální rovnice pro funkci ζ odvozuje Kössler asymptotické rozvoje pro $\zeta(s)$, vhodné pro numerické výpočty.

Z druhé skupiny jsem vybral práce [26], [27] (1942—43), které patří k nejzajímavějším. V práci [26] odvozuje Kössler dvě elementární identity. První z nich vypadá takto: Budiž dána posloupnost přirozených čísel $q_1 < < q_2 < \dots$ a dvě funkce $f(n)$, $v(n)$. Zvolme přirozené číslo N a sestrojme funkce $V(k) = \sum_{n=1}^{m} v(nk)$, $m = \left[\frac{N}{k}\right]$, $F(n) = \sum_{q_k/n} f(q_k)$. Přitom $[x]$ značí největší celé číslo $\leq x$; znak q_k/n při součtu značí, že se sčítá přes ona čísla q_k, jež jsou děliteli čísla n. Potom platí

$$\sum_{q_k \leq N} f(q_k)\, V(q_k) = \sum_{n=1}^{N} F(n)\, v(n)\,. \tag{24}$$

Identity tohoto druhu (mezi součty) jsou v theorii čísel často důležité: ať proto, že přímo ukazují jisté zajímavé zákonitosti, ať proto, že umožňují důkaz asymptotických vzorců pro součty v nich obsažené. Kösslerova identita (24) je velmi obecného rázu. To by ovšem ještě mnoho neříkalo o jejím významu; ukazuje se však, že z ní plyne specialisací mnoho důležitých a významných identit. Zvolíme-li na př. za $q_1, q_2, \dots$ všechny mocniny prvočísel, t. j. čísla tvaru p^k (k přirozené číslo) a klademe-li $f(p^k) = \lg p$, obdržíme z (24) identitu

$$\sum_{p \leq N} \lg p \sum_{k} V(p^k) = \sum_{n=1}^{N} v(n) \lg n\,; \tag{25}$$

přitom ve vnitřním součtu vlevo se sčítá při pevném p přes všechna přirozená k, pro která je $p^k \leq N$. Speciální volbou funkce $v(n)$ dostává Kössler řadu zajímavých identit, které dovolují počítati různé součty, obsahující prvočísla (uvědomme si, že pravá strana v (25) — na rozdíl od levé — neobsahuje „explicitně“ prvočísla: je to výraz, který při nepříliš složité funkci $v(n)$ je poměrně jednoduchý a pro který často můžeme udati velmi přesné asymptotické vzorce). Vedle (24) odvozuje Kössler ještě tuto obecnou identitu:

$$\sum_{k=1}^{N} g(k)\, f\left(\left[\frac{N}{k}\right]\right) = \sum_{k=1}^{\varrho} g(k)\, f\left(\left[\frac{N}{k}\right]\right) + \sum_{k=1}^{\varrho} (f(k) - f(k-1))\, G\left(\left[\frac{N}{k}\right]\right) - f(\varrho)\, G(r)\,; \tag{26}$$

přitom N, ϱ jsou přirozená čísla, $\varrho < N$, $r = \left[\dfrac{N}{\varrho + 1}\right]$, $f(0) = 0$, $G(k) = \sum_{n=1}^{k} g(n)$. Z četných důsledků této identity uveďme pro ilustraci jen jeden: Budiž $d_{0,1}(n)$ počet oněch dělitelů čísla n, kteří jsou $\equiv 0$ nebo $\equiv 1 \pmod 4$; obdobný význam nechť má $d_{2,3}(n)$. Potom je[8])

$$\sum_{n=1}^{N} (d_{0,1}(n) - d_{2,3}(n)) = \tfrac{1}{4}(\pi - 2 \lg 2)\, N + O(\sqrt{N})\,. \tag{27}$$

Zajímavé je srovnání s (23); píšeme-li v (27) vlevo $+$ místo $-$, dostaneme výraz $T(N)$, který podle (23) je řádu $N \lg N$. Další velmi četné důsledky identit (24), (26), uvedené v práci [26], nebudu uváděti.

Na identitě (26) je založena též práce [27]. Označme znakem $\sigma_t(n)$ součet t-tých mocnin všech dělitelů čísla n; Kössler vyšetřuje funkci

$$T(N, t, s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sigma_t(k)}{k^s}\,;$$

je zřejmě $\sigma_0(k) = d(k)$, takže (viz (22))

$$T(N, 0, 0) = T(N)\,.$$

Kdežto problém zbytku R_1 v (23) je dosud nerozřešen, ukazuje Kössler mimo jiné, že pro některé hodnoty $t \neq 0$ lze dosáhnouti výsledků již celkem definitivních. Jako příklad vezměme případ $t > 1$. Budiž $r_k = \dfrac{N}{k} - \left[\dfrac{N}{k}\right]$ t. zv. lomená část čísla $\dfrac{N}{k}$ a položme $\Theta(N, t) = \sum_{k=1}^{\nu} \dfrac{r_k}{k^t} : \sum_{k=1}^{\nu} \dfrac{1}{k^t}$, kde celé číslo $\nu > 0$ je určeno nerovnostmi $\nu(\nu + 1) \leqq N < (\nu + 1)(\nu + 2)$ (tedy přibližně $\nu = \sqrt{N}$ pro velká N; číslo N je celé). Potom je pro $t > 1$

$$N^s\, T(N, t, s) = N^s\, \zeta(s)\, \zeta(s - t) + N \frac{\zeta(1 - t)}{1 - s} + N^{1+t} \frac{\zeta(1 + t)}{1 + t - s} + \\ + \zeta(t)\, N^t(\tfrac{1}{2} - \Theta(N, t)) + O(N^{\frac{1}{2}(1+t)} + N^{t-1}) \tag{28}$$

(pro $s = 1$ a $s = t + 1$ pozbývá pravá strana smyslu a je nutno provésti

[8]) Znak O se zde i v následujícím týká případu $N \to +\infty$.

jistý limitní přechod). Velikost funkce $\Theta(N, t)$ závisí na aritmetické povaze čísla N. Jestliže číslo N' je dělitelno čísly 1, 2, 3, ..., n, kde n je „velké“ číslo, platí pro $N = N'$ rovnice $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$; naopak pro $N = N' - 1$ je $r_k = 1 - \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Odtud plyne, že $\Theta(N', t)$ je přibližně rovno nule, a $\Theta(N' - 1, t)$ je přibližně rovno $1 - \frac{\zeta(1 + t)}{\zeta(t)} > 0$. Odtud pak je patrno toto: Ve výrazu (28) vpravo tvoří první tři členy velmi jednoduchou analytickou funkci proměnné N, poslední dva členy tvoří pak jakýsi oscilující „zbytek“; jeho oscilace mají velikost řádu N^t. Je zajímavé, že tento oscilující člen — až na O-člen, který je řádu nižšího než N^t — nezávisí na s. Charakter funkce $T(N, t, s)$ je tím popsán s úplností, která není častá v analytické theorii čísel.

Význam Kösslerův není, jak poznamenal akademik Čech ve svém článku, vyčerpán jeho původními pracemi. Kössler přistupoval také ke svým učitelským úkolům s velkou svědomitostí, spojenou s vřelým zájmem o žáka a s vrozeným pedagogickým nadáním. Tyto jeho vlastnosti se odrážejí v jeho nevelké knížce „Úvod do počtu diferenciálního“ (1926), ve které látka jeho úvodních universitních přednášek je vyložena způsobem dokonale promyšleným, pedagogicky vytříbeným a při velké „otřepanosti“ thematu překvapivě netradičním a původním.

Prof. Kössler intensivně pokračuje ve své vědecké i učitelské práci; právě nyní má v tisku novou práci o mocninných řadách, která možná vyjde dříve než tento článek.*) Naše matematická veřejnost vzpomíná vděčně jeho díla a přeje mu do další práce mnoho zdaru.

* * *

SEZNAM VĚDECKÝCH PRACÍ PROFESORA DR M. KÖSSLERA

A) PŮVODNÍ VĚDECKÁ POJEDNÁNÍ:

1. *O zonální funkci harmonické.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, XLII, 1913, s. 7.
2. *Řešení algebraické rovnice výrazy meznými.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, XLIII, 1914, s. 8.
3. *Vztah mezi počtem prvočísel v daných mezích a větou Wilsonovou.* Čas. pro pěst. mat. a fys., XLIV, 1915, s. 6.
4. *Součet řady Lambertovy a počet dělitelů celistvého čísla.* Čas. pro pěst. mat. a fys., XLV, 1916, s. 11.
5. *O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru.* Část I a II. Rozpravy České akademie, II. tř., XXIV, N. 41, 1915 a XXV, N. 54, 1916. S. 34 a 38.
6. *Nový rozvoj pro Riemannovu funkci prvočíselnou.* Rozpravy České akademie, II. tř., XXV, N. 26, 1916, s. 23.

*) Viz Seznam vědeckých prací profesora Dr M. Kösslera, č. 31.

7. *O rekurentním vzorci pro prvočísla.* Rozpravy České akademie, II. tř., XXVI, N. 48, 1917, s. 6.

8. *Integrál Cauchyův a Dirichletův problém v rovině.* Čas. pro pěst. mat. a fys., LI, 1922, s. 5.

9. *Příspěvek k teorii Borelova pokračování funkcí.* Věstník Král. české společ. nauk. Třída mat.-přír. 1921—1922, N. 7, s. 14.

10. *O úhlech nesouměřitelných.* Čas. pro pěst. mat. a fys., LII, 1923, s. 5.

11. *Potenční řady s přirozenou hranicí a jejich pokračování ve smyslu Borelově.* Rozpravy České akademie, II. tř., XXXI, N. 19, 1922, s. 8.

12. *On a generalization of the Lagrange series.* Proceedings of the London Mathematical Society (2) XX, 1922, s. 9.

13. *O singularitách řady mocninné, ležících na kružnici konvergenční.* Rozpravy Čes. akademie, II. tř., XXXII, N. 35, 1923, s. 15.

14. *Sur les singularités des séries entières.* Accademia dei Lincei. Rendiconti (5), XXXII, 1923, s. 26—29.

15. *Nouveaux théorèmes sur les singularités des séries entières.* Accademia dei Lincei. Rendiconti (5), XXXII, 1923, s. 3.

16. *Sur les singularités des séries entières.* Accademia dei Lincei. Rendiconti (5), XXXII, 1923, s. 528—531.

17. *On a generalization of Fabry and Szász's theorems concerning the singularities of power series.* Proceedings Congress Toronto, I, s. 10.

18. *Součtový vzorec* $S = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-n}^{+n} e^{-h^2k^2}$. Čas. pro pěst. mat. a fys., LIII, 1924, s. 5.

19. *Dvě poznámky k theorii číselné.* Čas. pro pěst. mat. a fys., LVIII, 1929, s. 7.

20. *Über die α-Stellen von beschränkten Potenzreihen.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1930, N. 11, s. 12.

21. *Ein Beitrag zur Theorie der schlichten Potenzreihen.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1932, N. 5, s. 8.

22. *Eine Verschärfung des Drehungssatzes von L. Bieberbach.* Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinig., B. 41, 1931, s. 3.

23. *Über besondere Klassen von schlicht abbildenden Potenzreihen.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1934, N. 14, s. 7.

24. *Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile.* Věstník Král. čes. společ. nauk. Tř. mat.-přír. 1935, N. 2, s. 8.

24′. *Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile,* Zprávy o druhém sjezdu matematiků zemí slovanských, Praha, 23.—28. IX. 1934, s. 1.

25. *Asymptotické rozvoje pro funkce* $\zeta(s)$ *a* $\zeta(a, s)$. Rozpravy Čes. akademie, II. tř., LI, 1941, N. 32, s. 10.

26. *Einige Sätze aus der elementaren Zahlentheorie.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1942, N. 20, s. 18.

27. *Über ein Teilerproblem.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1943, N. 11, s. 18.

28. *Some properties of trigonometric and algebraic polynomials.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1948, N. 15, s. 6.

29. *O významu čísla* $\sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ *v teorii mocninných řad.* Čas. pro pěst. mat. a fys., LXXIV, 1949, s. 7.

30. *Простые многочлены.* Чехословацкий матем. журнал. *Simple Polynomials.* Czechoslovak Math. Journal, Vol. 1 (76) 1951, s. 11.

31. *Über reelle Charakteristiken von Potenzreihen.* Чехословацкий матем. журнал, 4(79) 1954, s. 9.

32. *O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů;* společně s *V. Jarníkem*, Čas. pro pěst. mat. a fys. LXIII (1934), s. 13.

B) KNIŽNÍ PUBLIKACE:

33. *Úvod do počtu diferenciálního.* Jednota Čs. mat. a fys., Praha, 1926, s. 147.

34. *Karel Petr. Stručný nástin jeho života a stručný přehled jeho prací.* Napsali Frant. Nušl a M. Kössler. Sborník prací matematických a fysikálních, vydaný na počest šedesátého výročí narozenin dr Karla Petra. Jednota Čs. mat. a fys., Praha, 1928, s. 14.

C) VÝTAHY Z PRACÍ, OTIŠTĚNÝCH V ROZPRAVÁCH ČESKÉ AKADEMIE II. TŘ. (Čísla se vztahují k části A) tohoto seznamu.)

Über Entwicklungen für analytische Funktionen (výtah z práce č. 5), Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême XXI (1917), s. 20.

Eine neue Reihe für die Riemannsche Primzahlfunktion (výtah z práce č. 6), Bulletin XXI (1917), s. 4.

Sur une formule de récurrence relative aux nombres premiers (výtah z práce č. 7), Bulletin XXII (1918), s. 3.

Sur les singularités des séries entières situées sur le cercle de convergence (výtah z práce č. 13), Bulletin XXIV (1924), s. 3.

Redakce.

ZA PROFESOREM GINO LORIOU

Dne 30. ledna 1954 skonal v Janově jeden z nejvýznamnějších italských geometrů a historiků matematiky světového jména, profesor GINO LORIA. I česká věda vzdala profesoru Loriovi svůj hold, zvolivši ho zahraničním členem České Královské společnosti nauk.

Profesor Loria se narodil 19. května 1862 v Mantově jako syn bankéře. Jsa hospodářsky nezávislý, mohl se ihned po universitních studiích v Turině a Pavii věnovati vědecké činnosti. Po dvouleté asistentuře na universitě v Turině se tam habilitoval r. 1886 a stal se téhož roku mimořádným a r. 1891 řádným profesorem university v Janově pro vyšší geometrii, kterou přednášel až do r. 1935, kdy odešel do výslužby. Nevzdal se však úplně své učitelské činnosti, nýbrž přednášel dále dějiny matematiky na Janovské universitě, kterýž předmět tam byl zavedl.

Literární vědecká činnost profesora Lorii je ohromná. V letech 1883 až 1937 napsal 278 spisů, mezi nimi četná i několikasvazková díla knižní, a to nejen v jazyce italském, nýbrž i v jazycích anglickém, francouzském, německém a španělském. K tomu přistupují četné spisy napsané v letech 1937—1953. V zasedacích zprávách České Král. společnosti nauk otiskl tato pojednání: „*I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali*" (1896), „*Integrali euleriani e spirali sinusoidi*" (1897), „*Sopra una classe notevole di alternanti di ordine qualsivoglia*" (1897) a „*Le curve panalgebriche*" (1901).

Ačkoli prof. Loria napsal několik cenných prací z algebry a analysy, přece jeho hlavními obory byly vyšší geometrie včetně geometrie deskriptivní a zvláště dějiny matematiky. Prvním velkým spisem, kterým se rázem vyšinul na světovou úroveň, byl spis „*Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*" (1887, 2. vyd. 1897, 3. vyd. 1907, 4. vyd. 1931), přeložený do polštiny a do němčiny. Dalšími spisy, známými všem matematikům,