Karel Rektorys
Dvě věty o řešení rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 4, 333--366

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117134

DVĚ VĚTY O ŘEŠENÍ ROVNICE $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

KAREL REKTORYS, Praha.

(Došlo 4. února 1954.) DT: 517.947.43

V této práci je podáno řešení dvou základních problémů pro vedení tepla ve dvojrozměrných pravoúhlých oborech při velmi obecných počátečních a krajových podmínkách. Na základě těchto dvou řešení je možno sestavit řešení příslušného obecného problému vedení tepla při časově neproměnných krajových podmínkách.

Jádro práce tvoří dvě věty, týkající se prvního a druhého problému vedení tepla:

I. Problém (stacionární vedení tepla):

Nechť v intervalu $\langle 0; \pi\rangle$ je dána funkce $f(x)$ spojitá ve všech bodech tohoto intervalu s výjimkou bodů, tvořících množinu $\mathfrak{M}$ míry nula,[1]) při čemž $|f(x)| \leqq M$ v $\langle 0; \pi\rangle$. Hledejme funkci $V(x, y)$, definovanou ve čtverci P $(0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi)$, těchto vlastností:

1. $V(x, y)$ je harmonická uvnitř P, t. j. vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi)\,. \tag{1}$$

2. $V(x, y)$ je v P omezená konstantou M (stejnou, jako funkce $f(x)$ v $\langle 0; \pi\rangle$).

3. $V(x, y)$ je spojitá v oboru $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 < y \leqq \pi$, při čemž

a) $V(0, y) = V(\pi, y) = 0 \quad (0 < y \leqq \pi)$, (2)

b) $V(x, \pi) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$. (3)

4. V každém vnitřním bodě x_0 intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ $(y = 0)$, v němž je $f(x)$ spojitá, je $V(x, y)$ spojitá jako funkce proměnných x a y, a platí

$$V(x_0, 0) = f(x_0)\,.$$

[1]) Integrace funkcí a jejich měřitelnost jsou myšleny podle *Lebesguea*.

Tvrdím:

Věta I. *Existuje jedna a (až na body množiny $\mathfrak{M}$) jen jedna funkce $V(x, y)$ těchto vlastností, a tato funkce je dána pro $y > 0$ řadou*

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \tag{4}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x') \sin nx' \, dx'\right), \tag{5}$$

pro $y = 0$

$$V(x, 0) = f(x) . \tag{6}$$

II. problém (časově proměnný):

Budiž ve čtverci P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ dána funkce $f(x, y)$ $[|f(x, y)| \leqq \leqq N]$, spojitá ve všech bodech čtverce P s výjimkou bodů, které tvoří množinu $\mathfrak{N}$ míry nula. Hledejme funkci $F(x, y, t)$, omezenou v P a pro $t \geqq 0$ touž konstantou N, spojitou v P pro $t > 0$, vyhovující rovnici

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \text{ uvnitř } P,\ t > 0 , \tag{7}$$

při čemž

a) $F(0, y, t) = F(\pi, y, t) = F(x, 0, t) = F(x, \pi, t) = 0 \quad (t > 0),$ (8)

b) ve všech bodech, kde $f(x, y)$ je spojitá, je také $F(x, y, t)$ pro $t = 0$ spojitá jako funkce proměnných x, y, t a je v nich $F(x, y, 0) = f(x, y)$.

Tvrdím:

Věta II. *Existuje jedna a (až na body množiny $\mathfrak{N}$) jen jedna funkce $F(x, y, t)$ těchto vlastností, a tato funkce je dána*

pro $t > 0$ řadou

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}\right) \sin ny \, e^{-n^2 t} \tag{9}$$

$$\left(A_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\iint_P f(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right) \tag{10}$$

a pro $t = 0$

$$F(x, y, 0) = f(x, y) . \tag{11}$$

Poznámka.

Důkazy jednoznačnosti řešení jsou velmi jednoduché. Obtížnost důkazů obou vět je v tom, že je třeba dokázat, že funkce $V(x, y)$ a $F(x, y, t)$, definované rovnicemi (4), (6), (9), (11), splňují požadavky, na ně kladené, zejména bod 4 prvního problému a obdobný bod b) druhého problému. O Fourierových řadách (4) a (9) pro $y = 0$ a $t = 0$ totiž nic nevíme (řady nemusí konvergovat v žádném bodě). Tato obtíž se projevuje zejména u druhého problému, kde dosavadní kriteria pro konvergenci dvojných Fourierových řad jsou velmi nepřehledná (viz na př. TONELLI, Serie trichonometriche, str. 450).

V první kapitole je podána formulace problému. V druhé kapitole je podán důkaz omezenosti řešení, který je podkladem pro další úvahy. Ve třetí kapitole je proveden důkaz věty I, ve čtvrté kapitole důkaz věty II.

Kapitola I. Formulace problému

Při řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

s danými krajovými a počátečními podmínkami, jakož i při důkazu jednoznačnosti řešení, kladou se zpravidla velké požadavky na spojitost a spojitou diferencovatelnost funkcí, které vystupují v těchto podmínkách (mimo požadavky, kladené na samotný obor, v němž je problém formulován). Avšak ve skutečných matematicky formulovaných fysikálních a technických úlohách jsou tyto požadavky zřídka splněny, a to jak při krajových podmínkách (těleso v tepelné lázni), tak při počátečních podmínkách uvnitř tělesa (tepelný dotyk dvou nebo více těles, tvořících jediné těleso). Nejčastěji se setkáváme s třídou funkcí po částech spojitých. Zde již nastávají z matematického hlediska značné obtíže.

Ve své disertační práci („Jednoznačnost řešení parciálních diferenciálních rovnic pro vedení tepla při nespojitých krajových podmínkách") zabýval jsem se případem, kdy jeden rozměr uvažovaného tělesa převládal nad druhými dvěma, takže úlohu bylo lze pokládat za rovinný problém. Mimo to jsem předpokládal, že průřez uvažovaného tělesa je obdélníkového tvaru (pro jednoduchost byl uvažován čtverec, což na charakteru úlohy ničeho nemění) a že krajové podmínky (t. j. tepelná lázeň) jsou časově neproměnné. Ve zmíněné práci jsem odvodil za předpokladu, že funkce (a jejich derivace), vystupující v krajových a počátečních podmínkách, jsou po částech spojité, různé vlastnosti řešení, z fysikálního hlediska důležité, dokázal jsem jednoznačnost řešení, a mimo to jsem se zde zabýval otázkami numerického výpočtu, zejména stejnoměrnou konvergencí příslušných řad. Po stránce fysikální je zde problém řešen zcela postačujícím způsobem.

S matematického hlediska je však otázka, jak se budou chovat $V(x, y)$ resp. $F(x, y, t)$, definované rovnicemi (4), (6) a (9), (11), připustíme-li u funkcí $f(x)$ resp. $f(x, y)$ nekonečný počet nespojitostí. Řady (4) a (9) mají smysl pro $y > 0$ resp. $t > 0$ při každé integrovatelné funkci $f(x)$ resp. $f(x, y)$. Jde o to, budou-li tyto řady i pak „spojitě přiléhat" k okrajovým funkcím $f(x)$, $f(x, y)$.

V této práci je dokázáno, že za předpokladu, že $f(x)$ (resp. $f(x, y)$) je spojitá skoro všude, t. j. až na množinu míry nula, pak funkce, definovaná pro $y > 0$ řadou (4) (pro $t > 0$ řadou (9)) je spojitě prodlužitelná skoro všude na okraj $y = 0$ (resp. $t = 0$) a její spojité prodloužení je právě rovno odpovídající hodnotě $f(x)$ (resp. $f(x, y)$). Metoda důkazu je podstatně odlišná od metody užité v citované mé práci, kde důkaz spojité prodlužitelnosti funkcí, definovaných řadami (4) a (9), se opírá o stejnoměrnou konvergenci těchto řad pro $y \geqq 0$ resp. $t \geqq 0$ v určitých oborech. Při našich předpokladech o $f(x)$ a $f(x, y)$ řady (4) a (9) nemusí pro $y = 0$ resp. $t = 0$ konvergovat nikde, tím méně pak stejnoměrně.

Uvedeme zde ještě některé známé věty, které v dalším textu citujeme:

1. *Věta o maximu a minimu harmonické funkce* (viz na př. Petrovskij, Parciální diferenciální rovnice, Praha 1952, str. 193):

Harmonická funkce $u(x, y)$ spojitá na uzavřené oblasti $\overline{G} = G + \Gamma$ nemůže uvnitř této oblasti nabývat větších hodnot, než je její maximum na Γ, a nemůže nabývat menších hodnot, než je její minimum na Γ.

2. *Věta o maximu a minimu řešení parabolické rovnice* (viz na př. Petrovskij, l. c., str. 267).

Každé řešení rovnice $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pro vedení tepla, definované a spojité na obdélníku Q ($0 \leqq x \leqq l$, $0 \leqq t \leqq T$), nabývá své největší a nejmenší hodnoty buď na jeho dolní základně (pro $t = 0$) nebo na jedné z jeho bočných stran.

3. *Abelova věta o stejnoměrné konvergenci* (viz na př. Carslaw, Theory of Fourier's Series and Integrals, Londýn 1930, str. 149. Označení je jiné).

Nechť řada $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ konverguje stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$ a nechť posloupnost $T_1(t), T_2(t), \dots$ je monotonní pro každé pevné $t \geqq 0$ a stejnoměrně omezená (t. j. $|T_n(t)| \leqq K$ pro všechna n a t). Pak řada $u_1(x)\,T_1(t) + u_2(x) \,.\, T_2(t) + \dots$ je stejnoměrně konvergentní pro všechna x z $\langle a, b\rangle$ a pro všechna $t \geqq 0$.

4. *Weierstrassova věta* (Natanson, Těorija funkcij veščestvennoj peremennoj, Moskva 1950, str. 99).

Budiž $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$. Pak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takový polynom $P(x)$, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon .$$

5. *Věta Fubiniho* (Natanson, l. c., str. 296).

Budiž v pravoúhelníku R ($a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$) dána integrovatelná funkce $f(x, y)$. Pak

1. funkce $f(x, y)$ uvažovaná jako funkce y bude integrovatelná pro skoro všechna $x \in \langle a, b\rangle$;

2. Označme množinu těchto x Δ. Pak funkce

$$\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

bude integrovatelná na Δ.

3. Platí

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Delta \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Kapitola 2. Omezenost řešení

Věta 2.1. *Budiž v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ dána měřitelná funkce $f(x)$. Nechť dále $|f(x)| \leqq M$ v tomto intervalu. Pak funkce $S(x, t)$, definovaná pro $t > 0$ řadou*

$$S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx\, \mathrm{e}^{-n^2 t} \tag{2.1}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x') \sin nx'\,\mathrm{d}x'\right) \tag{2.2}$$

a pro $t = 0$ vztahem

$$S(x, 0) = f(x)\,, \tag{2.3}$$

je pro všechna $x \in \langle 0, \pi\rangle$ a pro všechna $t \geqq 0$ omezená touž konstantou M.

Poznámka: Funkci $S(x, t)$ definujeme jinak pro $t > 0$ a jinak pro $t = 0$, neboť pro $t = 0$ nemusí mít řada (2.1) nikde smysl.

Abychom dokázali větu 2.1, dokážeme nejprve dvě lemmata.

Lemma 1. *Nechť $g(x)$ je polynom v $\langle 0, \pi\rangle$, $g(0) = g(\pi) = 0$, $|g(x)| \leqq K$. Pak funkce $G(x, t)$, definovaná*

pro $t > 0$ řadou

$$G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, \mathrm{e}^{-n^2 t} \tag{2.4}$$

$$\left(b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x') \sin nx'\,\mathrm{d}x'\right), \tag{2.5}$$

pro $t = 0$ rovnicí

$$G(x, 0) = g(x)\,, \tag{2.6}$$

je omezená pro všechna x a $t \geqq 0$ konstantou K.

Důkaz plyne přímo z citované věty o maximu a minimu spojitého řešení parabolické rovnice.

Funkce $G(x, t)$ splňuje totiž pro $t > 0$ rovnici

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

při podmínkách

$$G(0, t) = G(\pi, t) = 0 \,. \tag{2.8}$$

[Je

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (b_n \sin nx \, e^{-n^2 t}) = - b_n \sin nx \, . \, n^2 e^{-n^2 t} \,,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (b_n \sin nx \, e^{-n^2 t}) = - b_n \sin nx \, . \, n^2 e^{-n^2 t}$$

a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, . \, n^2 e^{-n^2 t}$$

konverguje stejnoměrně pro $t > 0$, protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 t}$$

konverguje. Tedy platí (2.7).]

Mimo to $g(x)$ je polynom, tedy Fourierova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{2.9}$$

je stejnoměrně konvergentní v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, a stejně (podle Abelovy věty) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, e^{-n^2 t} \,. \tag{2.10}$$

Je tedy $G(x, t)$ spojitá pro všechna x z $\langle 0, \pi \rangle$ a pro všechna $t \geqq 0$, a z toho plyne podle zmíněné věty o maximu lemma 1.

Lemma 2. *Budiž $h(x)$ spojitá v $\langle 0, \pi \rangle$, $h(0) = h(\pi) = 0$, $|h(x)| \leqq M$. Pak funkce $H(x, t)$, definovaná*

pro $t > 0$ řadou

$$H(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \, e^{-n^2 t} \tag{2.11}$$

$$\left(c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x') \sin nx' \, dx' \right) , \tag{2.12}$$

a pro $t = 0$ vztahem

$$H(x, 0) = h(x) \,, \tag{2.13}$$

je omezená pro všechna $x \in \langle 0, \pi \rangle$ a $t \geqq 0$ konstantou M.

Důkaz: Podle Weierstrassovy věty lze sestrojit posloupnost polynomů $g_i(x)$ (při čemž $g_i(0) = g_i(\pi) = 0$!), stejnoměrně konvergující k funkci $h(x)$ v $\langle 0, \pi\rangle$. T. j. k danému $\varepsilon > 0$ lze najít N tak, že

$$|g_i(x) - h(x)| < \varepsilon \tag{2.14}$$

pro všechna x z $\langle 0, \pi\rangle$ a pro všechna $i > N$.

Označme $G_i(x, t)$ funkci, definovanou

pro $t > 0$ řadou

$$G_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(i)} \sin nx\, \mathrm{e}^{-n^2 t} \tag{2.15}$$

$$\left(b_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g_i(x') \sin nx' \,\mathrm{d}x'\right), \tag{2.16}$$

a pro $t = 0$ relací

$$G_i(x, 0) = g_i(x) . \tag{2.17}$$

Jestliže $|g_i(x)| \leqq K_i$, pak podle lemmatu 1 bude také $|G_i(x, t)| \leqq K_i$.

Máme nyní dokázat, že pro každé $t > 0$ bude $|H(x, t)| \leqq M$.

Vezměme určité $t_0 > 0$. Protože

$$\lim_{i\to\infty} g_i(x) = h(x)$$

stejnoměrně v $\langle 0, \pi\rangle$, je pro všechna $i > N$

$$K_i < M + \varepsilon,\ |b_n^{(i)}| < 2(M + \varepsilon),\ |c_n - b_n^{(i)}| < 2\varepsilon .$$

Tedy řady (2.15) jsou pro t_0 stejnoměrně konvergentní (vzhledem ke všem x z $\langle 0, \pi\rangle$ a ke všem $i > N$), a protože

$$\lim_{i\to\infty} b_n^{(i)} = c_n$$

stejnoměrně pro všechna n, je

$$\lim_{i\to\infty} G_i(x, t_0) = H(x, t_0) . \tag{2.18}$$

A protože $|G_i(x, t^0)| < M + \varepsilon$ pro $i > N$, je také

$$|H(x, t_0)| \leqq M + \varepsilon , \tag{2.19}$$

čili, vzhledem k libovolnosti ε

$$|H(x, t_0)| \leqq M , \tag{2.20}$$

což jsme měli dokázat.

Důkaz věty 2.1. Podle Luzinovy věty (Natanson, Těorija funkcij veščestvennoj peremennoj, Moskva 1950, str. 96), existuje ke každé funkci $\psi(x)$ měřitelné v $\langle 0, \pi\rangle$ a omezené konstantou M a ke každému $\delta > 0$ funkce $\varphi(x)$ spojitá v $\langle 0, \pi\rangle$ a omezená touž konstantou tak, že

$$mE(\psi \neq \varphi) < \delta . \tag{2.21}$$

Symbolem $mE(\psi \neq \varphi)$ rozumíme míru množiny E, t. j. množiny bodů x z $\langle 0, \pi \rangle$, v nichž $\psi(x) \neq \varphi(x)$.

Existuje tedy k naší funkci $f(x)$ a k $\varepsilon < 0$ taková funkce $\varphi(x)$ spojitá v $\langle 0, \pi \rangle$, při čemž ještě můžeme žádat $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, že

$$\int_0^\pi |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon . \tag{2.22}$$

Sestrojme posloupnost $\varepsilon_i > 0$ tak že $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$ a příslušnou posloupnost spojitých funkcí $\varphi_i(x)$ ($|\varphi_i(x)| \leqq M$, $\varphi_i(0) = \varphi_i(\pi) = 0$) tak, že

$$\int_0^\pi |f(x) - \varphi_i(x)| \, dx < \varepsilon_i . \tag{2.23}$$

Označíme-li

$$d_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_i(x') \sin nx' \, dx' , \tag{2.24}$$

pak pro libovolné n bude zřejmě

$$|a_n - d_n^{(i)}| < \varepsilon_i , \tag{2.25}$$

čili

$$\lim_{i \to \infty} d_n^{(i)} = a_n \tag{2.26}$$

stejnoměrně pro všechna n.

Označme

$$\Phi_i(x, t) = \sum_{n=1}^\infty d_n^{(i)} \sin nx \, e^{-n^2 t} \quad (t > 0) \tag{2.27}$$

a zvolme určité $t_0 > 0$.

Je

$$|\Phi_i(x, t_0)| \leqq M$$

pro každé i (podle lemmatu 2).

Ze stejnoměrné konvergence řad (2.27) pro dané $t_0 > 0$ a pro všechna i, a z (2.26) plyne opět

$$\lim_{i \to \infty} \Phi_i(x, t_0) = S(x, t_0) , \tag{2.28}$$

z čehož

$$|S(x, t^0)| \leqq M \tag{2.29}$$

pro libovolné $t_0 > 0$, což bylo dokázati, neboť pro $t = 0$ je $|S(x, 0)| = |f(x)| \leqq$ $\leqq M$ podle předpokladu.

Poznámka. Z důkazu je vidět, že je-li $0 \leqq f(x) \leqq 2M$, pak také $0 \leqq S(x, t) \leqq$ $\leqq 2M$. To platí předně pro každý polynom $g(x)$ ($0 \leqq g(x) \leqq 2M$, $g(0) = g(\pi) =$ $= 0$), podle věty o maximu a minimu (viz lemma 1). Totéž platí — viz důkaz lemmatu 2 — pro každou funkci $h(x)$ spojitou v $\langle 0, \pi \rangle$ $(0 \leqq h(x) \leqq 2M)$, $h(0) = h(\pi) = 0$.

Nyní k $\bar{f}(x) = f(x) - M$ můžeme sestrojit spojitou funkci $\bar{\varphi}(x)$ tak, že

$$\int_0^\pi |\bar{f}(x) - \bar{\varphi}(x)| \, dx < \varepsilon ,$$

při čemž $|\bar{\varphi}(x)| \leqq M$, $\bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}(\pi) = -M$ (srv. (2.22)).

Pak funkce $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) + M$ bude kladná, $0 \leqq \varphi(x) \leqq 2M$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ a

$$\int_0^\pi |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon .$$

Vztahy (2.23) až (2.28) zůstanou stejné, jen místo $|\Phi_i(x, t_0)| \leqq M$ je nutno psát $0 \leqq \Phi_i(x, t_0) \leqq 2M$. Z (2,28) pak plyne $0 \leqq S(x, t) \leqq 2M$.

Věta 2.2. *Budiž dána v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ funkce $f(x)$, splňující stejné podmínky jako ve větě 2.1, t. j. $f(x)$ je měřitelná v $\langle 0, \pi \rangle$, při čemž $|f(x)| \leqq M$ v $\langle 0, \pi \rangle$.*

Pak funkce $V(x, y)$, definovaná na P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ pro $y > 0$ řadou

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \tag{2.30}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x') \sin nx' \, dx'\right), \tag{2.31}$$

a pro $y = 0$ vztahem

$$V(x, 0) = f(x) ,$$

je omezená pro všechna x a y $(0 \leqq y \leqq \pi)$ číslem M.

Důkaz je zcela stejný, jako důkaz věty 2.1, neboť pro polynom $g(x)$, pro který $g(x) \leqq M$, $g(0) = g(\pi) = 0$, je příslušná funkce $V(x, y)$ omezená konstantou M, jak plyne z věty o maximu funkce harmonické na P; další body důkazu probíhají již úplně obdobně jako v důkazu věty 2.1.

Kapitola 3

Věta 3.1. *Budiž v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ dána funkce $f(x)$, mající tyto vlastnosti.*

1. *$|f(x)| \leqq M$ pro všechna x z $\langle 0, \pi \rangle$.*

2. *$f(x)$ je spojitá ve všech bodech intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ s výjimkou bodů, které tvoří množinu $\mathfrak{M}$ míry nula (tedy $f(x)$ je měřitelná funkce).*

Tvrdím: *Existuje jedna a (až na body množiny $\mathfrak{M}$) jen jedna funkce $V(x, y)$ definovaná na čtverci P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ taková, že*

1. $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \text{ uvnitř } P. \tag{3.1}$$

2. $|V(x, y)| \leqq M$ *na* P.

3. $V(x, y)$ *je spojitá v oboru* $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 < y \leqq \pi$ *a*

a) $V(0, y) = V(\pi, y) = 0 \quad (0 < y \leqq \pi)$, (3.2)

b) $V(x, \pi) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$. (3.3)

4. *V každém vnitřním bodě* x_0 *intervalu* $\langle 0, \pi \rangle$ $(y = 0)$, *v němž je* $f(x)$ *spojitá, je* $V(x, y)$ *spojitá jako funkce obou proměnných* x *a* y, *a je* $V(x_0, 0) = f(x_0)$.

Tato funkce je dána

pro $y > 0$ $(y \leqq \pi)$ *řadou*

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \tag{3.4}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x') \sin nx' \, dx'\right),$$

pro $y = 0$ *vztahem*

$$V(x, 0) = f(x) . \tag{3.5}$$

Důkaz. Dokážeme nejprve, že funkce $V(x, y)$ má požadované vlastnosti.

1. $V(x, y)$ je harmonická uvnitř P, protože každý člen řady (3.4) je harmonická funkce uvnitř P a (3.4) je stejnoměrně konvergentní pro $y_0 \leqq y \leqq \pi$, $y_0 > 0$. (Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi}$$

konverguje pro všechna $y > 0$.)

2. $|V(x, y)| \leqq M$ v P.

Plyne z věty 2.2 předcházející kapitoly.

3. Jsou splněny všechny tři podmínky bodu 3. Zřejmé.

Zbývá dokázat bod 4.

Vezměme určitý bod o souřadnici x_0 $(0 < x_0 < \pi)$, v němž je $f(x)$ spojitá, a označme jej A. Máme dokázat, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje $\varrho_0 > 0$ tak, že $|V(B) - V(A)| < \varepsilon$ pokud $\varrho(A, B) < \varrho_0$. Přitom B je bod z P o souřadnicích x, y, $\varrho(A, B)$ je vzdálenost bodů $A(x_0, 0)$ a $B(x, y)$, $V(A) = V(x_0, 0) = f(x_0)$, $V(B) = V(x, y)$.

Označme

$$f(x) = f(x_0) + g(x) \tag{3.6}$$

v $\langle 0, \pi \rangle$. Je $g(x_0) = 0$ a $g(x)$ je v x_0 spojitá. Existuje tedy ke kladnému ε takové ϱ_1, že

$$|g(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ pro } |x - x_0| < \varrho_1 \quad (\varrho_1 < x_0, \ \varrho_1 < \pi - x_0) .$$

Definujme funkci $g_1(x)$ takto:

$$g_1(x) = g(x) \text{ pokud } x_0 - \tfrac{1}{2}\varrho_1 \leqq x \leqq x_0 + \tfrac{1}{2}\varrho_1\,, \tag{3.7}$$

$$g_1(x) = 0 \text{ v ostatních bodech intervalu } \langle 0, \pi\rangle\,. \tag{3.8}$$

Je tedy všude v $\langle 0, \pi\rangle$ $|g_1(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

Dále definujme funkci $g_2(x)$:

$$g_2(x) = 0 \text{ pokud } x_0 - \tfrac{1}{2}\varrho_1 \leqq x \leqq x \leqq x_0 + \tfrac{1}{2}\varrho_1\,, \tag{3.9}$$

$$g_2(x) = g(x) \text{ v ostatních bodech intervalu}\,. \tag{3.10}$$

Tedy

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) \text{ v } \langle 0, \pi\rangle\,, \tag{3.11}$$

čili

$$f(x) = f(x_0) + g_1(x) + g_2(x) \text{ v } \langle 0, \pi\rangle\,. \tag{3.12}$$

Funkci příslušnou k $f(x)$ a definovanou rovnicemi (3.4) a (3.5), jsme nazvali $V(x, y)$. Funkci, definovanou obdobně a příslušnou ke $g_1(x)$ nazveme $G_1(x, y)$, funkci příslušnou ke $g_2(x)$ nazveme $G_2(x, y)$, funkci příslušnou k $f(x_0)$ nazveme $V_0(x, y)$ ($f(x_0)$ je konstantní v $\langle 0, \pi\rangle$). Zřejmě platí

$$V(x, y) = V_0(x, y) + G_1(x, y) + G_2(x, y)\,. \tag{3.13}$$

Podle věty 2.2 je všude v P

$$|G_1(x, y)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon\,. \tag{3.14}$$

Dokážeme snadno, že $V_0(x, y)$ je funkce spojitá v bodě A. Bod x_0 je vnitřním bodem intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Fourierova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,, \tag{3.15}$$

$$\left(b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x_0) \sin nx'\,\mathrm{d}x'\right) \tag{3.16}$$

konverguje stejnoměrně v každém uzavřeném intervalu uvnitř $(0, \pi)$, a stejně (podle Abelovy věty) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi}\,, \tag{3.17}$$

takže $V_0(x, y)$ je spojitá v oboru $0 < x < \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$. Existuje tedy k našemu ε číslo $\varrho_2 > 0$ ($\varrho_2 < x_0$, $\varrho_2 < \pi - x_0$) tak, že

$$|V_0(B) - V_0(A)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon\,,$$

pokud $\varrho(A, B) < \varrho_2$.

Z téhož důvodu jako funkce $V_0(x, y)$ je také $G_2(x, y)$ v bodě A spojitá, takže k témuž ε existuje $\varrho_3 > 0$ ($\varrho_3 < \frac{1}{2}\varrho_1$) tak, že

$$|G_2(B) - G_2(A)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon\,,$$

pokud $\varrho(A, B) < \varrho_3$.

Označíme-li $\min(\varrho_2, \varrho_3) = \varrho_0$, pak podle (3.13) je

$$|V(B) - V(A)| < \varepsilon\,, \tag{3.18}$$

pokud

$$\varrho(A, B) < \varrho_0\,, \tag{3.19}$$

což bylo dokázati.

Důkaz platí i pro případ, že $x_0 = 0$, jestliže $f(0) = 0$ a $f(x)$ je spojitá zprava v bodě $x = 0$. Obdobně, když $x_0 = \pi$, $f(\pi) = 0$ a $f(x)$ je v bodě $x = \pi$ spojitá zleva.

Poznámka: Všimněme si, že doposud jsme pro funkci $f(x)$ nepotřebovali nic jiného, než že je měřitelná v $\langle 0, \pi\rangle$ a $|f(x)| \leqq M$. Toho, že $f(x)$ je skoro všude spojitá v $\langle 0, \pi\rangle$, použijeme teprve nyní.

Jednoznačnost řešení.[2])

Mějme dvě řešení $V_1(x, y)$ a $V_2(x, y)$ požadovaných vlastností a budiž $u(x, y) = V_1(x, y) - V_2(x, y)$.

Definujme funkci

$$G(y) = \int_0^\pi u^2(x, y)\,\mathrm{d}x\,. \tag{3.20}$$

Dokážeme, že $G(y) = 0$ pro všechna y. Protože $u(x, y)$ je podle předpokladu spojitá pro $0 < y \leqq \pi$ vyplyne z toho, že $V_1(x, y) \equiv V_2(x, y)$ pro všechna $y > 0$ $(y \leqq \pi)$.

$u(x, y)$ je pro $y = 0$ spojitá a rovna nule ve všech bodech intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ s výjimkou nejvýše bodů množiny $\mathfrak{M}$. Je tedy

$$G(0) = 0\,. \tag{3.21}$$

Dále $|u(x, y)| \leqq 2M$ v celém P. Dokážeme nejprve, že $G(y)$ je spojitá v bodě $y = 0$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ a sestrojme otevřenou množinu $\mathfrak{M}_1$ tak, že $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$, $m(\mathfrak{M}_1) < \delta$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\,.\,(2M)^2}$.[3]) Budiž dále $\mathfrak{P}$ množina v P, bod $B(x, y) \in \mathfrak{P}$ když a jen když $x \in \mathfrak{M}_1$. (Značíme $\mathfrak{P}_{(x,y)}\,[(x, y) \in P, x \in \mathfrak{M}_1])$. Tedy $\mathfrak{P}$ je otevřená množina v P. Množina $P - \mathfrak{P}$ je uzavřená v P, tedy funkce $u(x, y)$, spojitá na $P - \mathfrak{P}$ je na této množině stejnoměrně spojitá ($P - \mathfrak{P}$ je kompaktní), při čemž je tam $u(x, 0) = 0$. Z toho plyne, že existuje k $\varepsilon > 0$ takové η, že $|u(x, y)| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2\pi}}$ v $P - \mathfrak{P}$, pokud $0 \leqq y < \eta$. Tedy

---

[2]) Důkaz jednoznačnosti řešení se provádí zpravidla s pomocí Greenovy věty. Zde však předpoklady Greenovy věty nejsou splněny a Greenova věta také skutečně neplatí, jak se lze přesvědčit přímým výpočtem, jsou-li na př. $f(x)$, $f'(x)$ a $f''(x)$ po částech spojité funkce v $\langle 0, \pi\rangle$. Zde však lze Greenovu větu snadno obejít.

[3]) To lze, neboť $\mathfrak{M}$ je množina míry nula.

$$G(y) = \int_0^{\pi} u^2(x, y)\,\mathrm{d}x < \varepsilon\,, \tag{3.22}$$

pokud $0 \leqq y < \eta$, čili $G(y)$ je spojitá v bodě $y = 0$.

Spojitost funkce $G(y)$ pro $y > 0$ $(y \leqq \pi)$ plyne ze spojitosti funkce $u(x, y)$ pro $y > 0$.

Funkce $G(y)$ má pro $y > 0$ $(y \leqq \pi)$ první i druhou derivaci, a je

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2 \int_0^{\pi} u \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x + 2 \int_0^{\pi} u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\mathrm{d}x\,.^{4)} \tag{3.24}$$

Ale $u(x, y)$ je harmonická pro $y > 0$, čili

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.25}$$

a

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{3.26}$$

Dosadíme-li (3.25) a (3.26) do (3.24), máme

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}y^2} = 2\left[\int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\right]. \tag{3.27}$$

Integrál

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x$$

je roven nule, protože pro $y > 0$ je $u = 0$ pro $x = 0$ a $x = \pi$, a $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ je spojitá a tedy omezená na P, pokud $y \geqq y_0 > 0$.

Z (3.27) tedy plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}y^2} \geqq 0 \tag{3.28}$$

pro $y > 0$ $(y \leqq \pi)$.

Z (3.20), (3.28) a z toho, že $G(0) = G(\pi) = 0$ snadno odvodíme, že $G(y) \equiv 0$ v $\langle 0, \pi \rangle$.

Vezměme určité

$$y_0 \ (0 < y_0 < \pi)$$

---

[4]) Srv. následující poznámku.

a předpokládejme, že

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y_0) = A > 0\,. \tag{3.29}$$

Protože $\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}$ je stále nezáporná, je pro $y > y_0$ stále $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} \geqq A$.

Ale $G(y_0) \geqq 0$, $G(\pi) = 0$, tedy

$$G(\pi) - G(y_0) = (\pi - y_0)\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}[y_0 + \vartheta_1(\pi - y_0)] \quad (0 < \vartheta_1 < 1)\,, \tag{3.30}$$

což je spor, protože na pravé straně je veličina větší než (nebo rovna) $(\pi - y_0)A$, na levé straně je veličina záporná nebo nula.

Jestliže předpokládáme, že

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y_0) = B < 0\,, \tag{3.31}$$

pak $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}$ je stále menší nebo rovno B v $(0, y_0)$. Podle věty o střední hodnotě je

$$G(y_0) - G(0) = y_0\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(\vartheta_2 y_0) \quad (0 < \vartheta_2 < 1)\,, \tag{3.32}$$

což vede opět ke sporu.

Je tedy stále v $(0, \pi)$ $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} = 0$, a protože $G(0) = G(\pi) = 0$, je v $\langle 0, \pi\rangle$ identicky.

$$G(y) = 0\,. \tag{3.33}$$

Protože pro $y > 0$ je $u(x, y)$ spojitá, plyne z toho, že

$$u(x, y) \equiv 0$$

pro všechna $y > 0$ $(y \leqq \pi)$, což bylo dokázati.

Poznámka. Kritický čtenář může zde oprávněně namítnout, že derivování za integračním znaménkem, které jsme provedli v rovnicích (3.23) a (3.24), není nikterak odůvodněno, protože jsme ve větě 3.1 nevyslovili žádné předpoklady o spojitosti derivací funkce $V(x, y)$ v P pro $y > 0$, resp. o spojité prodlužitelnosti těchto derivací na strany čtverce $x = 0$, $x = \pi$. Také závěr, že integrál

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x$$

je roven nule, protože pro $y > 0$ je u rovno nule na $x = 0$ a $x = \pi$, není zcela správný, protože nevíme nic o vzrůstu funkce $\frac{\partial u}{\partial x}$ pro $x \to 0$ a $x \to \pi$, takže nemůžeme tvrdit nic o limitě výrazu $u\frac{\partial u}{\partial x}$ pro $x \to 0$ a $x \to \pi$.

Zde bychom mohli zjednat nápravu tím, že bychom žádali, aby $V(x, y)$ měla uvnitř P spojité derivace do druhého řádu, a tyto derivace aby byly spojitě prodlužitelné na $x = 0$, $x = \pi$. Z fysikálního hlediska tyto požadavky jsou téměř samozřejmé a naše nalezené řešení je také splňuje. Hledisko matematické je ovšem jiné, a proto zde ukážeme druhý důkaz, kde tyto předpoklady potřebovat nebudeme.[5])

Chceme dokázat, že funkce u, splňující předpoklady věty 3.1 (na rozdíl od funkce $V(x, y)$ omezená konstantou $2M$) a na $y = 0$ všude rovná nule s výjimkou nejvýše bodů množiny $\mathfrak{M}$, nemůže být různá od nuly uvnitř P.

Zvolme tedy uvnitř P bod x_0, y_0. Nechť $u(x_0, y_0) = A \neq 0$. Označme součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - \frac{1}{2}y_0)} = S\,. \tag{3.34}$$

Zvolme určité a takové, že $0 < a < \frac{1}{2}y_0$. Funkce $u(x, a)$ je podle předpokladu spojitá pro všechna $x \in \langle 0, \pi \rangle$, spojitě diferencovatelná v $(0, \pi)$ a je $u(0, a) = u(\pi, a) = 0$. Označme tuto funkci $f_a(x)$. Na funkci $u(x, y)$ se můžeme pro $y > 0$ dívat tak, že vznikla jako řešení problému, formulovaného ve větě 3.1, ale daného ne na čtverci P, ale na obdélníku O ($0 \leqq x \leqq \pi$, $a \leqq y \leqq \pi$), při čemž na straně $y = a$ tohoto obdélníku je dána funkce $f_a(x)$. Ale zde již, jak plyne z věty o maximu a minimu harmonické funkce, je jednoznačnost řešení zaručena, protože $u(x, y)$ je spojitá na celém uzavřeném obdélníku O. Je tedy nutně

$$u(x_0, y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(a)} \sin nx_0 \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - a)}\,, \tag{3.35}$$

kde

$$a_n^{(a)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_a(x') \sin nx' \, dx'\,. \tag{3.36}$$

(O správnosti tvaru řešení (3.35) se snadno přesvědčíme. Předně každý člen řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(a)} \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n(\pi - a)} \tag{a}$$

je harmonický a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n(\pi - a)}$$

[5]) Zde bychom mohli užít Schwarzovy věty o zrcadlení; funkce u je harmonická pro $y > 0$ a rovna nule na stranách čtverce, tedy je přes tyto strany prodlužitelná jako harmonická funkce, z čehož vyplývá spojitost uvažovaných derivací na stranách $x = 0$, $x = \pi$. Podáme však důkaz, který znalost této věty nepředpokládá.

konverguje pro každé $y > a$, z čehož plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^{(a)} \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n(\pi - a)}$$

konverguje stejnoměrně. Tedy řada (a) definuje harmonickou funkci.

Pro $x = 0$, $x = \pi$ $(y > 0)$ a $y = \pi$ (x libovolné) je funkce, definovaná touto řadou, rovna nule, pro $y = a$ je rovna funkci $f_a(x)$, tedy splňuje krajové podmínky.)

Ale jestliže $0 < a < \frac{1}{2}y_0$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - a)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - \frac{1}{2}y_0)}, \tag{3.37}$$

neboť $\sinh x$ je pro $x > 0$ kladná rostoucí funkce, tedy každý člen řady na pravé straně nerovnosti (3.37) je větší než příslušný člen řady na levé straně (3.37).

Budeme tedy hledat a tak malé, aby $a_n^{(a)}$ byly takové, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(a)}| \,.\, |\sin nx_0| \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - a)} < |A| \tag{3.38}$$

$(A = u(x_0, y_0))$.

Tím se dostaneme (vzhledem k rovnici (3.35)) do sporu s předpokladem $u(x^0, y^0) = A$:

Sestrojme v $\langle 0, \pi \rangle$ otevřenou množinu $\mathfrak{M}_1$ tak, že $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$, $m\mathfrak{M}_1 < \dfrac{A}{4MS}$. ($S$ je dáno rovnicí (3.34), $\mathfrak{M}$, jak víme, je množina bodů nespojitosti funkce $f(x)$ v $\langle 0, \pi \rangle$, $m\mathfrak{M}_1$ značí míru množiny $\mathfrak{M}_1$.) Budiž $\mathfrak{P}$ množina v P, při čemž $(x, y) \in \mathfrak{P}$ tehdy a jen tehdy, když $x \in \mathfrak{M}_1$ čili $\underset{(x,y)}{\mathfrak{P}}[(x, y) \in P, x \in \mathfrak{M}_1]$. Vzhledem ke stejnoměrné spojitosti funkce $u(x, y)$ na $P - \mathfrak{P}$, při čemž pro $y = 0$ je na $P - \mathfrak{P}$ $u(x, y) = 0$, můžeme najít $a_0 > 0$ $(a_0 \leqq \frac{1}{2}y_0)$ tak, že pro všechna a $(0 < a \leqq a_0)$ je na $P - \mathfrak{P}$

$$|f_a(x)| < \frac{|A|}{4S}. \tag{3.39}$$

Zvolme tedy jedno takové a. Pak je zřejmě

$$|a_n^{(a)}| < \frac{|A|}{S} \tag{3.40}$$

pro všechna n, a tedy

$$|u(x_0, y_0)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(a)} \sin nx_0 \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - a)} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A|}{S} \frac{\sinh n(\pi - y_0)}{\sinh n(\pi - \frac{1}{2}y_0)} = |A|, \tag{3.41}$$

čímž dostáváme žádaný spor s předpokladem $u(x_0, y_0) = A$. Tím je věta (3.1) úplně dokázána.

Kapitola 4

Věta 4.1. *Budiž ve čtverci P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ dána funkce $f(x, y)$, spojitá všude v P s výjimkou bodů, tvořících množinu $\mathfrak{N}$ míry nula, a taková, že $|f(x, y)| \leqq N$ v P (tedy měřitelná). Pak existuje jedna a (nejvýše s výjimkou bodů množiny $\mathfrak{N}$) jen jedna funkce $F(x, y, t)$, která*

1. *Vyhovuje diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{4.1}$$

(uvnitř P, $t > 0$).

2. *Je omezená pro všechny body x, y z P a $t \geqq 0$ konstantou N.*

3. *Je spojitá v P pro $t > 0$, při čemž*

$$F(0, y, t) = F(\pi, y, t) = F(x, 0, t) = F(x, \pi, t) = 0 \tag{4.2}$$
$$(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi,\ t > 0)\,.$$

4. *Je-li (x_0, y_0) vnitřní bod P, v němž $f(x, y)$ je spojitá, pak $F(x, y, t)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0, 0)$ jako funkce všech tří proměnných, a $F(x_0, y_0, 0) = f(x_0, y_0)$.*

Funkce $F(x, y, t)$ *je dána*

pro $t > 0$ *řadou*

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, \mathrm{e}^{-m^2 t}\Big) \sin ny\, \mathrm{e}^{-n^2 t} \tag{4.3}$$

$$\left(A_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_P f(x', y') \sin mx' \sin ny' \,\mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y'\right), \tag{4.4}$$

a *pro* $t = 0$ *vztahem*

$$F(x, y, 0) = f(x, y)\,. \tag{4.5}$$

Abychom dokázali větu (4.1), dokážeme nejprve následující lemmata:

Lemma 1. *Pro $t > 0$ funkce*

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, \mathrm{e}^{-m^2 t}\Big) \sin ny\, \mathrm{e}^{-n^2 t} \tag{4.6}$$

$$\left(A_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_P f(x', y') \sin mx' \sin ny' \,\mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y'\,,\right.$$
$$\left. f(x', y') \text{ měřitelná funkce v } P,\ |f(x', y')| < M\right)$$

a) *vyhovuje diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,, \tag{4.7}$$

b) *splňuje podmínky*

$$F(0, y, t) = F(\pi, y, t) = F(x, 0, t) = F(x, \pi, t) = 0\,, \tag{4.8}$$

c) *platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2t}\Big) \sin ny\, e^{-n^2t} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin ny\, e^{-n^2t}\Big) \sin mx\, e^{m^2t}\,. \tag{4.9}$$

Důkaz: a) Pro $t > 0$ je řada (4.6) a také řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{n}^{\infty} A_{mn}(-m^2) \sin mx\, e^{-m^2t}\Big) \sin ny\, e^{-m^2t}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2t}\Big)(-n^2) \sin ny\, e^{-n^2t}\,,$$

stejnoměrně konvergentní ($|A_{mn}| \leqq 4M$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-m^2t}\big) e^{-n^2t}$, $\sum_{m=1}^{\infty} \big(\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2t}\big) n^2 e^{-n^2t}$ konvergují), stačí tedy dokázat, že každý člen řady (4.6), t. j. člen

$$g_n(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx \sin ny\, e^{-(m^2+n^2)t} \tag{4.10}$$

splňuje diferenciální rovnici

$$\frac{\partial g_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_n}{\partial y^2}\,. \tag{4.11}$$

Ale to je evidentní, neboť řada (4.10) i její derivace opět konvergují stejnoměrně pro $t > 0$ a každý její člen vyhovuje zmíněné rovnici.

b) Že $F(x, y, t)$ splňuje podmínky (4.8) je zřejmé.

c) Zvolme určité $t > 0$. Dále zvolme určité k a označme

$$G_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{k} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2t}\Big) \sin ny\, e^{-n^2t}\,, \tag{4.12}$$

$$G_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{k} A_{mn} \sin ny\, e^{-n^2t}\Big) \sin mx\, e^{-m^2t}\,. \tag{4.13}$$

Dokážeme nejprve, že $G_1(x, y, t) = G_2(x, y, t)$.

Jistě je

$$\sum_{n=1}^{k} \Big(\sum_{m=1}^{l} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2t}\Big) \sin ny\, e^{-n^2t} = \sum_{m=1}^{l} \Big(\sum_{n=1}^{k} A_{mn} \sin ny\, e^{-n^2t}\Big) \sin mx\, e^{-m^2t}, \tag{4.14}$$

když k a l jsou konečná čísla.

Při našem pevně zvoleném $t > 0$ budiž

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2t} = K_1\,. \tag{4.15}$$

Protože $|A_{mn}| \leqq 4M$ můžeme najít L_1 tak, že pro všechna $l > L_1$ je

$$\sum_{m=l}^{\infty} |A_{mn}| \, e^{-m^2 t} < \frac{\varepsilon}{k}, \tag{4.16}$$

čili pro $l > L_1$ je

$$|G_1 - \sum_{m=1}^{k} (\sum_{m=1}^{l} A_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}) \sin ny \, e^{-n^2 t}| < \varepsilon . \tag{4.17}$$

Budiž při stejném t jako dříve

$$\sum_{n=1}^{k} e^{-n^2 t} = K_2 . \tag{4.18}$$

Můžeme najít L_2 tak, že pro všechna $l > L_2$ je

$$\sum_{m=l}^{\infty} 4MK_2 e^{-m^2 t} < \varepsilon , \tag{4.19}$$

čili

$$|G_2 - \sum_{m=1}^{l} (\sum_{n=1}^{k} A_{mn} \sin ny \, e^{-n^2 t}) \sin mx \, e^{-m^2 t}| < \varepsilon . \tag{4.20}$$

Označíme-li $L = \max (L_1, L_2)$, pak pro všechna $l > L$ platí (4.17) a (4.20), což implikuje vzhledem ke (4.14) a vzhledem k libovolnému ε rovnici

$$G_1(x, y, t) = G_2(x, y, t) . \tag{4.21}$$

Na základě rovnice (4.21) dokážeme již snadno (4.9). Označme levou stranu rovnice (4.9) $H_1(x, y, t)$, pravou stranu $H_2(x, y, t)$.

Při našem pevně zvoleném $t > 0$ budiž

$$\sum_{m=1}^{\infty} 4M e^{-m^2 t} = K_3 . \tag{4.22}$$

Pak vzhledem ke stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_3 e^{-n^2 t}$$

bude, zvolíme-li dostatečně velké L_3, pro všechna $l > L_3$

$$|H_1(x, y, t) - \sum_{n=1}^{t} (\sum_{m-1}^{\infty} A_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}) \sin ny \, e^{-n^2 t}| < \varepsilon . \tag{4.23}$$

Budiž obdobně

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} = K_4 . \tag{4.24}$$

Zvolíme-li dostatečně velké L_4, bude pro každé $l > L_4$

$$\sum_{m=l}^{\infty} |A_{mn}| \, e^{-m^2 t} > \frac{\varepsilon}{K_4} \tag{4.25}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=l}^{\infty}|A_{mn}|e^{-m^2t})e^{-n^2t} < \varepsilon\,,$$

čili

$$|H_2(x, y, t) - \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{l} A_{mn} \sin mx\, e^{-m^2t}) \sin ny\, e^{-n^2t}| < \varepsilon\,. \qquad (4.26)$$

Je-li $\bar{L} = \max(L_3, L_4)$, pak pro všechna $l > \bar{L}$ platí (4.23) a (4.26), a protože pro každé konečné l jsou si dvojné řady ve (4.23) a (4.26) rovny a ε je libovolné, je $H_1(x, y, t) = H_2(x, y, t)$, což bylo dokázati.

Zvolme nyní bod x_0, y_0 uvnitř R a určité $h > 0$ (h je menší (nejvýše rovno) než všechna z čísel: $x_0, y_0, \pi - x_0, \pi - y_0$). Čtverec P rozdělíme na čtyři obory, R_1, R_2, R_3 a R_4.

Obor R_1:

Čtverec o středu x_0, y_0 se stranami rovnoběžnými s osami souřadnicovými a délky $2h$, tedy obor

$$x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h\,, \quad y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h\,.$$

Obor R_2:

Pás $0 \leqq x \leqq \pi$, $y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$ s vyjmutím čtverce R_1, tedy,

$$0 \leqq x < x_0 - h\,, \quad x_0 + h < x \leqq \pi\,,$$
$$y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h\,.$$

Obor R_3:

Pás $x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h$, $0 \leqq y \leqq \pi$ s vyjmutím čtverce R_1, tedy

$$x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h\,,$$
$$0 \leqq y < y_0 - h\,, \quad y_0 + h < y \leqq \pi\,.$$

Obor R_4:

$$R_4 = P - R_1 - R_2 - R_3\,.$$

Lemma 2. *Budiž $f_1(x, y)$ definovaná a měřitelná v R_1, při čemž $|f_1(x, y)| \leqq M$. V $P - R_1$ budiž $f_1(x, y) = 0$.*

Pak funkce $F_1(x, y, t)$, definovaná pro $t > 0$ řadou

$$F_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sin mx\, e^{-m^2t}) \sin ny\, e^{-n^2t}\,, \qquad (4.27)$$

$$\left(B_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\iint_{R_1} f_1(x', y') \sin mx' \sin ny'\, dx'\, dy'\right), \qquad (4.28)$$

a pro $t = 0$ rovnicí

$$F_1(x, y, 0) = f_1(x, y)\,, \qquad (4.29)$$

je pro všechna x, y z P a $t \geqq 0$ v absolutní hodnotě omezená konstantou M.

Důkaz: Pro $t = 0$ je $F_1(x, y, t) = f_1(x, y)$, tedy podle předpokladu

$$|F_1(x, y, 0)| \leqq M .$$

Zvolme určité $t_0 > 0$.

Podle Fubiniovy věty je funkce $f(x, y)$ při pevném y měřitelná a integrovatelná podle x pro skoro všechna y z $\langle y_0 - h, y_0 + h\rangle$. Množinu těch y, pro něž $f(x, y)$ tuto vlastnost nemá, označíme $\mathfrak{A}$.

Definujme nyní pro $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y' \leqq \pi$ a $t_0 > 0$ funkci $G(x, y', t_0)$ takto:

Pro $y' \in \mathfrak{A}$ budiž

$$G(x, y', t_0) \equiv 0 .$$

Pro ostatní y' z $\langle 0, \pi\rangle$ budiž

$$G(x, y', t_0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \, e^{-m^2 t}, \tag{4.30}$$

$$\left(b_m = \frac{2}{\pi} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x', y') \sin mx' \, dx'\right). \tag{4.31}$$

Podle věty 2.1 je funkce $G(x, y', t_0)$ pro všechna y' z $\langle y_0 - h, y_0 + h\rangle$ (s výjimkou těch y', která patří do množiny $\mathfrak{A}$) omezená číslem M, a pro ostatní y' z $\langle 0, \pi\rangle$ je identicky rovna nule.

Podle Fubiniovy věty je každý člen řady (4.30) při pevném x a t_0 ($t_0 > 0$) měřitelnou a integrovatelnou funkcí y' v $\langle 0, \pi\rangle$. Protože řada (4.30) konverguje stejnoměrně k funkci $G(x, y', t_0)$ v $\langle 0, \pi\rangle$, je také $G(x, y', t_0)$ měřitelná, a protože je omezená konstantou M, je integrovatelná v $\langle 0, \pi\rangle$. Lze tedy při každém x sestrojit opět obdobnou řadu k funkci $G(x, y', t_0)$, t. j. řadu

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_0-h}^{y_0+h} G(x, y', t_0) \sin ny' \, dy' \, . \sin ny \, e^{-n^2 t_0} = \tag{4.32}$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_0-h}^{y_0+h} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f_1(x', y') \sin mx' \, dx' \, . \sin mx \, e^{-m^2 t_0}\right) \sin ny' \, dy' \sin ny \, e^{-n^2 t}. \tag{4.33}$$

Protože $G(x, y', t_0)$ je omezená konstantou M, je také funkce, definovaná řadou (4.32), resp. (4.33) omezená touž konstantou M (podle věty 2.1).

Řada (4.30) konverguje stejnoměrně ($t_0 > 0$, $|b_m| \leqq 2M$), tedy

$$\int_{y_0-h}^{y_0+h} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f_1(x', y') \sin mx' \, dx' \sin mx \, e^{-m^2 t_0}\right) \sin ny' \, dy' =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \iint_{R_1} f_1(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy' \sin mx \, e^{-m^2 t_0}, \tag{4.34}$$

čili řada (4.32) resp. (4.33) není nic jiného než $F_1(x, y, t_0)$. Je tedy pro každé $t > 0$

$$|F_1(x, y, t)| \leqq M , \tag{4.35}$$

což bylo dokázati.

Lemma 3. *Budiž v R_2 dána měřitelná funkce $f_2(x, y)$, při čemž $|f_2(x, y)| \leqq K$. V $P - R_2$ definujme $f_2(x, y) = 0$.*

Pak funkce $F_2(x, y, t)$ definovaná v P pro $t > 0$ řadou

$$F_2(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}) \sin ny \, e^{-n^2 t} , \tag{4.36}$$

$$\left(C_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_{R_2} f_2(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right) \tag{4.37}$$

a pro $t = 0$

$$F_2(x, y, 0) = f_2(x, y) ,$$

je spojitou funkcí x, y, t uvnitř R_1 (t. j. ve všech vnitřních bodech R_1) pro $t \geqq 0$.

Důkaz: Obor R_1 je dán nerovnostmi $x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h$, $y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$. Zvolme libovolné $\eta > 0$, $\eta < h$. Obor

$$x_0 - (h - \eta) \leqq x \leqq x_0 + (h - \eta) , \quad y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$$

nazveme R_1'. Protože v R_1' je $F_2(x, y, 0) = 0$, stačí dokázat, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje $t_0 > 0$ tak, že pro všechna t, $0 < t < t_0$, je

$$|F_2(x, y, t)| < \varepsilon \tag{4.38}$$

v R_1'.[6])

Zvolme $\varepsilon > 0$. Funkce $f_2(x, y)$ je podle Fubiniovy věty integrovatelná podle x pro všechna y s výjimkou množiny $\mathfrak{B}$ míry nula.

Budiž

$$H(x, y', t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin mx \, e^{-m^2 t} , \tag{4.39}$$

kde

$$c_m = \frac{2}{\pi} \int f_2(x', y') \sin mx' \, dx' \tag{4.40}$$

pro všechna y' pro něž je $f(x', y')$ integrovatelná podle x'. Pro y' vně intervalu $\langle y_0 - h, y_0 + h \rangle$ je $H(x, y', t) \equiv 0$. Pro y' z $\mathfrak{B}$ definujme také $H(x, y', t) \equiv 0$.

Chceme nejprve dokázat, že existuje $t_0 > 0$, že

$$|H(x, y', t)| < \varepsilon$$

pro všechna x, y' z R_1' a $0 < t < t_0$. Nemůžeme zde použít ani stejnoměrné spojitosti, protože funkce $H(x, y', t)$ není obecně spojitá v R_1' pro žádné t, ani stej-

[6]) Že $F_2(x, y, t)$ je spojitá v R_1 pro $t > 0$ plyne ovšem ze stejnoměrné konvergence řady (4.36) a ze spojitosti jejích členů.

noměrné konvergence řady (4.39) pro $t \geqq 0$, protože ani tato podmínka není obecně splněna. Tato obtíž se však dá snadno překonat:

Vezměme určité y' z $\langle y_0 - h, y_0 + h\rangle$. Je $f_2(x', y') = 0$ pro x' z $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ a $|f_2(x', y')| \leqq K$ pro ostatní x'. Označme

$$\overline{H}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{c}_m \sin mx \, e^{-m^2 t} \quad (t > 0) \tag{4.41}$$

funkci, příslušnou k funkci $g(x', y')$, kde

$$\left.\begin{array}{l} g(x', y') = 0 \text{ pro } x_0 - h \leqq x' \leqq x_0 + h \\ g(x', y') = K \text{ pro ostatní } x' \end{array}\right\} y_0 - h \leqq y' \leqq y_0 + h$$

$$\left(\overline{c}_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x', y') \sin mx' \, dx'\right).$$

Pro y' vně intervalu $\langle y_0 - h, y_0 + h\rangle$ budiž $g(x', y') \equiv 0$.

Tvrdím: pro libovolné $t > 0$ a y' z $\langle y_0 - h, y_0 + h\rangle$ je $\overline{H}(x, y', t) \geqq H(x, y', t)$. Důkaz je snadný, neboť funkce $g(x', y') - f_2(x', y')$ je všude nezáporná, a tedy $\overline{H}(x, y', t) - H(x, y', t)$ nemůže být také nikde záporná, jak plyne z poznámky k větě (2,1).

Avšak Fourierova řada

$$\sum_{m=1}^{\infty} \overline{c}_m \sin mx$$

je stejnoměrně konvergentní na R_1' a tedy $\overline{H}(x, y', t)$ je tam spojitá jako funkce všech tří proměnných pro $t \geqq 0$. Existuje tedy k našemu ε takové $t_0 > 0$, že

$$\overline{H}(x, y', t) < \varepsilon$$

pro všechna x, y' z R_1' a $0 < t < t_0$. Tím spíše je v R_1' pro $0 < t < t_0$

$$H(x, y', t) < \varepsilon .$$

Zcela stejně dokážeme, že při stejném t_0 je všude v R_1' pro $0 < t < t_0$

$$H(x, y', t) > -\varepsilon ,$$

čili

$$|H(x, y', t)| < \varepsilon .$$

Ale stejně jako jsme ukázali v předešlém lemmatu, je $H(x, y', t)$ integrovatelná pro $t > 0$ a platí

$$\frac{2}{\pi}\sum \int_0^{\pi} H(x, y', t) \sin ny' \, dy' \sin ny \, e^{-m^2 t} < \varepsilon \tag{4.42}$$

pro x, y z R_1' a $0 < t < t_0$. Ale výraz ve znaménkách pro absolutní hodnotu ve (4.42) není opět nic jiného než $F_2(x, y, t)$. Je tedy funkce $F_2(x, y, t)$ spojitá v R_1'. A protože jsme zvolili η libovolně, plyne z toho, že $F_2(x, y, t)$ je spojitá uvnitř celého R_1, což bylo dokázati.

Lemma 4. *Budiž v R_3 dána měřitelná funkce $f_3(x, y)$, $|f_3(x, y)| \leqq L$. V $P - R_3$ definujme $f_3(x, y) = 0$. Pak funkce $F_3(x, y, t)$, definovaná v P pro $t > 0$ řadou*

$$F_3(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}\right) \sin ny \, e^{-n^2 t} \tag{4.43}$$

$$\left(D_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_{R_3} f_3(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right), \tag{4.44}$$

a pro $t = 0$ vztahem

$$F_3(x, y, 0) = f_3(x, y), \tag{4.45}$$

je spojitou funkcí x, y, t uvnitř R_1 pro $t \geqq 0$.

Důkaz. Podle předešlého lemmatu (jen obory R_2 a R_3 a souřadnice x a y jsou zde zaměněny) je funkce $G_3(x, y, t)$, definovaná v P

pro $t > 0$ řadou

$$G_3(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \sin ny \, e^{-n^2 t}\right) \sin mx \, e^{-m^2 t} \tag{4.46}$$

(D_{mn} je definováno rovnicí (4.44))

a pro $t = 0$ vztahem

$$G_3(x, y, 0) = f_3(x, y),$$

spojitou funkcí x, y, t uvnitř R_1 pro $t \geqq 0$.

Ale podle lemmatu 1 je

$$F_3(x, y, t) \equiv G_3(x, y, t)$$

pro všechna $(x, y) \in P$ a $t \geqq 0$, čímž je lemma 4 dokázáno.

Lemma 5. *Budiž v R_4 dána měřitelná funkce $f_4(x, y)$, $|f_4(x, y)| \leqq T$. V $P - R_4$ budiž $f_4(x, y) = 0$. Pak funkce*

$$F_4(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} E_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}\right) \sin ny \, e^{-n^2 t} \quad (t > 0) \tag{4.47}$$

$$\left(E_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_{R_4} f_4(x', y') \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right), \tag{4.48}$$

$$(F_4(x, y, 0) = f_4(x, y)) \tag{4.49}$$

je spojitá jako funkce x, y, t uvnitř R_1 pro $t \geqq 0$.

Důkaz. Sestrojíme funkci $H_4(x, y', t)$ zcela obdobně jako v lemmatu 3, rov. (4.39), (4.40). Zvolíme $\eta > 0$ ($\eta < h$) a k danému $\varepsilon > 0$ najdeme opět $t_0 > 0$ tak, že

$$|H_4(x, y', t)| < \varepsilon \tag{4.50}$$

v oboru $x_0 - (h - \eta) \leqq x \leqq x_0 + (h - \eta)$, y vně intervalu $\langle y_0 - h, y_0 + h \rangle$

pro všechna t, $0 < t < t_0$. Pak také pro všechna tato t bude v $x_0 - (h - \eta) \leqq \leqq x \leqq x_0 + (h - \eta)$, y z $\langle 0, \pi \rangle$

$$F_4(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} H_4(x, y', t) \sin ny' \, dy' \sin ny \, e^{-n^2 t} \tag{4.51}$$

v absolutní hodnotě menší než ε. Protože $F_4(x, y, 0) = 0$ uvnitř R_1 a η jsme zvolili libovolně, plyne z nerovnosti

$$|F_4(x, y, t)| < \varepsilon$$

pro $x_0 - (h - \eta) \leqq x \leqq x_0 + (h - \eta)$, $y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$, $0 < t < t_0$ spojitost funkce $F_4(x, y, t)$ uvnitř celého R_1 pro $t \geqq 0$, což jsme měli dokázat.

Lemma 6. *Budiž $f_6(x, y) = k$ pro všechna x, y v P. Pak funkce*

$$F_6(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} F_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t}\right) \sin ny \, e^{-n^2 t} \quad (t \geqq 0) \tag{4.52}$$

je spojitou funkcí x, y, t uvnitř P pro $t \geqq 0$.

$$\left(F_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_P k \sin mx' \sin ny' \, dx' \, dy'\right). \tag{4.53}$$

Věta je triviální, neboť řada

$$G_6(x, y', t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn} \sin mx \, e^{-m^2 t} \quad (t \geqq 0) \tag{4.54}$$

$$\left(f_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mx' \, dx'\right)$$

konverguje stejnoměrně v každém uzavřeném oboru, ležícím uvnitř P pro $t \geqq 0$ a definuje tam tedy spojitou funkci x, y', t pro $t \geqq 0$. Stejnou vlastnost má i řada

$$F_6(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} G_6(x, y', t) \sin ny' \, dy' \sin ny \, e^{-n^2 t}, \tag{4.55}$$

a protože jednotlivé členy jsou spojité funkce x, y, t, je $F_6(x, y, t)$ spojitá na každém uzavřeném oboru, ležícím uvnitř P pro $t \geqq 0$, čili všude uvnitř P pro $t \geqq 0$, což bylo dokázati.

Důkaz věty (4.1). Na základě uvedených lemmat dokážeme již snadno, že funkce $F(x, y, t)$ má zmíněné vlastnosti.

Vlastnosti 1 a 3 vyplývají z lemmatu 1. (Rovnice (4.2) jsou evidentní, spojitost pro $t > 0$ vyplývá ze stejnoměrné konvergence řad a ze spojitosti jednotlivých členů.)

Vlastnost 2 plyne z lemmatu 2, položíme-li $R_1 = P$.

Zbývá dokázat bod 4.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Vezměme určitý bod x_0, y_0 uvnitř P, v němž je $f(x, y)$ spojitá. Existuje tedy takové $h > 0$ (při čemž h volíme menší než x_0, $\pi - x_0$, y_0, $\pi - y_0$), že

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \,, \tag{4.56}$$

pokud x, y leží v oboru $x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h$, $y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$. Tento obor nazveme shodně s předcházejícím R_1. Stejným způsobem jako dříve definujeme obory R_2, R_3 a R_4 (viz příslušné definice před lemmatem 2).

Budiž $f(x_0, y_0) = k$ a definujme nyní funkce $f_1(x, y)$ až $f_5(x, y)$ takto:

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= f(x, y) - k \quad \text{v } R_1 \\
&= 0 \qquad\qquad\quad\ \text{v } P - R_1 \\
f_2(x, y) &= f(x, y) - k \quad \text{v } R_2 \\
&= 0 \qquad\qquad\quad\ \text{v } P - R_2 \\
f_3(x, y) &= f(x, y) - k \quad \text{v } R_3 \\
&= 0 \qquad\qquad\quad\ \text{v } P - R_3 \\
f_4(x, y) &= f(x, y) - k \quad \text{v } R_4 \\
&= 0 \qquad\qquad\quad\ \text{v } P - R_4 \\
f_5(x, y) &= k \qquad\qquad\quad\ \text{v } P\,.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Je zřejmě

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{5} f_i(x, y)$$

v P, při čemž $|f_1(x, y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ v R_1.

Máme dokázat, že existuje jisté okolí bodu $(x_0, y_0, 0)$ tak, že

$$|F(x, y, t) - k| < \varepsilon \,, \tag{4.58}$$

pokud x, y, t leží v tomto okolí.

Nechť funkce $F_i(x, y, t)$ přísluší funkcím $f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ podle definic v lemmatech 2 až 6. Pak

$$F(x, y, t) = \sum_{i=1}^{5} F_i(x, y, t)\,. \tag{4.59}$$

Ale pro $F_1(x, y, t)$ platí, že

$$|F_1(x, y, t)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{4.60}$$

pro všechna x, y z P a pro $t \geqq 0$ (lemma 2). Ostatní funkce jsou spojité uvnitř R_1 pro $t \geqq 0$ (lemma 3 až 6).

Tedy existují pro každou z těchto funkcí taková ϱ_i $(i = 2, 3, 4, 5)$, při čemž $\varrho_i < h$, že

$$|F_i(x, y, t) - F_i(x_0, y_0, 0)| < \tfrac{1}{8}\varepsilon \quad (i = 2, \ldots, 5) \tag{4.61}$$

pro všechna x, y, t $(t \geqq 0)$, pro něž

$$\varrho(x, y, t; x_0, y_0, 0) < \varrho_i$$

$[\varrho(x, y, t; x_0, y_0, 0)$ je vzdálenost bodu (x, y, t) od bodu $(x_0, y_0, 0)]$. Označíme-li ϱ_0 nejmenší z těchto ϱ_i, pak bude

$$|F(x, y, t) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \tag{4.62}$$

pro všechna x, y, t ($t \geqq 0$), pro něž

$$\varrho(x, y, t; x_0, y_0, 0) < \varrho_0 ,$$

což bylo dokázati.

Poznámka: Důkaz zůstává v platnosti i tehdy, jestliže bod x_0, y_0 neleží uvnitř P. Pak je ovšem nutno, aby $f(x_0, y_0) = 0$, a funkce $f(x, y)$ aby byla v bodě x_0, y_0 spojitá zevnitř, t. j. aby k libovolnému $\varepsilon > 0$ existovalo takové okolí bodu x_0, y_0, aby $|f(x, y)| < \varepsilon$ pro všechna x, y tohoto okolí, pokud $(x, y) \in P$.

Doposud jsme nikde nepoužili toho, že $f(x, y)$ je skoro všude spojitá v P (stačilo nám, že je měřitelná a že $|f(x, y)| < N$ v P). Této vlastnosti použijeme teprve teď, při důkazu jednoznačnosti řešení.

Jednoznačnost řešení.

Mějme dvě řešení $F_1(x, y, t)$ a $F_2(x, y, t)$ vlastností, uvedených ve větě 4.1. Označme

$$u(x, y, t) = F_1(x, y, t) - F_2(x, y, t) . \tag{4.63}$$

Máme dokázat, že $u(x, y, t) \equiv 0$ pro $t > 0$. Sestrojme integrál

$$J(t) = \iint_P u^2(x, y, t)\, dx\, dy . \tag{4.64}$$

Funkce u je podle své definice (4.63) pro $t > 0$ spojitá v P, při čemž je rovna nule na všech čtyřech stranách čtverce P. Dále je $|u| \leqq 2N$ v P a pro $t \geqq 0$.

Pro $t = 0$ je $u(x, y, t)$ spojitá a rovná nule v P až na množinu $\mathfrak{N}$ míry nula. Je tedy

$$J(0) = 0 .$$

Mimo to k $\varepsilon > 0$ existuje $t_0 > 0$, že

$$J(t) < \varepsilon \tag{4.65}$$

pro všechna t, $0 < t < t_0$.

O platnosti (4.65) se snadno přesvědčíme.

Zvolme $\varepsilon > 0$, $A > 0$. Množinu všech x, y, t, pro něž $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$, $0 \leqq t \leqq A$, nazveme $\mathfrak{R}$. Sestrojme v P otevřenou množinu $\mathfrak{N}_1$ tak, že $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_1$, $m\mathfrak{N} < \frac{\varepsilon}{8N^2}$. To lze, protože $\mathfrak{N}$ je množina míry nula. Dále sestrojme v $\mathfrak{R}$ množinu $\overline{\mathfrak{N}}$ tak, že $(x, y, t) \in \overline{\mathfrak{N}}$ když a jen když $(x, y) \in \mathfrak{N}_1$ a $0 \leqq t \leqq A$.

$\overline{\mathfrak{N}}$ je otevřená v $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{N}}$ je kompaktní, a protože u je v $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{N}}$ spojitá, je tam stejnoměrně spojitá. Pro $t = 0$ je v $\mathfrak{R} - \mathfrak{N}$ $u = 0$. Tedy existuje

$t_0 > 0$ $(t_0 \leqq A)$, že $|u| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi^2}}$ v $\Re - \mathfrak{N}$ pro všechna t $(0 \leqq t \leqq t_0)$. Z toho plyne (4.65).

Tedy $J(t)$ je funkce spojitá v počátku a $J(0) = 0$. Pro $t > 0$ má $J(t)$ derivaci podle t[7]) a je

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 2\int_P\int u\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\int_P\int u\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\int_P\int\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \quad (4.66)$$

Ale

$$\int_P\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,, \quad (4.67)$$

protože u je na stranách čtverce rovno nule, tedy, jak plyne z (4.66),

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} \leqq 0 \text{ pro všechna } t > 0\,. \quad (4.68)$$

Podle věty o střední hodnotě (která platí vzhledem ke spojitosti funkce $J(t)$ v bodě $t = 0$), je

$$J(t) \leqq J(0) = 0\,, \quad (4.69)$$

a protože

$$J(t) \geqq 0$$

pro všechna t (podle definice (4.63)), je

$$J(t) \equiv 0\,. \quad (4.70)$$

Ale $u(x, y, t)$ je funkce spojitá pro $t < 0$, a tedy

$$u(x, y, t) \equiv 0$$

pro všechna $t > 0$, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Stejně jako při důkazu jednoznačnosti řešení problému 3.1 mohou také vzniknout oprávněné námitky proti derivování za integračním znaménkem a proti rovnici (4.67). Nápravu bychom opět mohli zjednat vyřčením nových předpokladů o derivacích funkce $F(x, y, t)$, při čemž bychom byli zcela ve shodě s fysikálním názorem.

Z matematického hlediska dosáhneme nápravy zcela stejným způsobem jako v poznámce k důkazu jednoznačnosti řešení v kapitole 3. Tam jsme se opírali o větu o jednoznačnosti řešení harmonického problému, je-li příslušná harmo-

[7]) Srv. následující poznámku.

nická funkce spojitá na uzavřeném oboru. Tato věta plyne z věty o maximu a minimu harmonické funkce. Ale tuto větu máme dokázánu i pro náš druhý problém ($|F(x, y, t)| \leqq M$ pro všechna $x \in P$ a $t \geqq 0$). Zbytek důkazu je úplně stejný jako v citované poznámce (kap. 3). Zvolíme opět $t_0 > 0$ a předpokládáme, že $u(x_0, y_0, t_0) = A \neq 0$ (x_0, y_0 je vnitřní bod čtverce P).

Bude nutně

$$u(x_0, y_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} E_{mn}^{(a)} \sin mx_0\, e^{-m^2(t_0-a)}\right) \sin ny_0\, e^{-n^2(t_0-a)}$$

(označení je stejné jako ve třetí kapitole).

Obdobně budiž

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\frac{t_0}{2}}\right) e^{-n^2\frac{t_0}{2}} = S .$$

Pro každé a, $0 < a < \frac{1}{2}t_0$, bude

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2(t_0-a)}\right) e^{-n^2(t_0-a)} < S .$$

Zvolíme a tak malé, aby $|A_{mn}^{(a)}| < \dfrac{|A|}{S}$.

Potom

$$|u(x_0, y_0, t_0)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}^{(a)} \sin mx_0\, e^{-m^2(t_0-a)}\right) \sin ny_0\, e^{-n^2(t_0-a)}\right| <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|A|}{S}\, e^{m^2(t-a)}\right) e^{-n^2(t-a)} < |A| . \tag{4.71}$$

Ale nerovnost (4.71) je ve sporu s předpokladem

$$u(x_0, y_0, t_0) = A ,$$

čímž je věta 4.1 úplně dokázána.

Резюме.

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

КАРЕЛ РЕКТОРИС (Karel Rektorys), Прага.

(Поступило в редакцию 4/II 1954 г.)

При решении уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

с данными краевыми и начальными условиями, так же как и при доказательстве однозначности решения, к непрерывности и непрерывной дифференцируемости функций, фигурирующих в этих условиях, предъявляются обычно большие требования (помимо требований, предъявляемых к самой области, в которой проблема формулирована). Однако, в реальных математически формулированных физических и технических задачах эти требования редко выполняются, как при краевых условиях (тело в тепловой ванне), так и при начальных условиях внутри тела (тепловое касание двух или более тел, образующих одно целое). Чаще всего мы встречаемся с классом кусочно-непрерывных функций, где с математической точки зрения возникают уже значительные затруднения.

В своей диссертации (,,Однозначность решения дифференциальных уравнений в частных производных теории теплопроводности при разрывных краевых условиях") автор занимался случаем, когда один размер рассматриваемого тела преобладал над другими двумя, так что задачу можно было считать плоской. Кроме того автор предполагал, что поперечное сечение рассматриваемоготела прямоугольно (для простоты рассматривалось квадратное сечение, от чего характер задачи не изменился) и что краевые условия (т. е. тепловая ванна) не изменяются во времени. Исходя из предположения, что фигурирующие в краевых и начальных условиях функции (и их производные) кусочно-непрерывны, в работе выводятся различные важные с физической точки зрения свойства решения и доказывается однозначность решения; кроме того автор занимается вопросами численных расчетов, в особенности равномерной сходимостью бесконечных рядов, представляющих собой решение уравнения. С физической точки зрения проблема разрешена в цитированной работе вполне удовлетворительным образом.

С математической точки зрения, однако, работа возбуждает внимание к решению нескольких интересных вопросов. Коэффициенты бесконечных рядов, о которых упоминалось выше, зависят от начальных и краевых условий проблемы. Ряды сходятся при значительно более общих начальных и краевых условиях, чем условия кусочно-непрерывности (функции). Возникает вопрос, какими свойствами будут обладать функции, определенные этими рядами, в частности, когда эти функции еще будут ,,непрерывно приближаться" к начальным и краевым условиям.

Этой проблематике и посвящена настоящая работа. Ядро работы образует доказательство следующих двух теорем (встречаемся здесь с понятиями интегрируемая функция и измеримая функция (множество); эти понятия применяются в смысле Лебега):

Проблема I (стационарный случай теплопроводности): Пусть в интервале $\langle 0, \pi \rangle$ дана функция $f(x)$, непрерывная во всех точках этого интервала за исключением точек, образующих множество $\mathfrak{M}$ меры нуль, причем $|f(x)| \leqq M$ в $\langle 0, \pi\rangle$. Отыщем функцию $V(x, y)$, определенную в квадрате $P(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$, с такими свойствами:

1. $V(x, y)$ является гармонической внутри P, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi)\,. \tag{1}$$

2. $V(x, y)$ ограничена в P константой M (той же, как и функция $f(x)$ в $\langle 0, \pi\rangle$).

3. $V(x, y)$ непрерывна в области $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 < y \leqq \pi$, причем

а) $V(0, y) = V(\pi, y) = 0 \quad (0 < y \leqq \pi)\,,$ (2)

б) $V(x, \pi) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)\,.$ (3)

4. В каждой внутренней точке x_0 интервала $\langle 0, \pi\rangle$ $(y = 0)$, в которой $f(x)$ непрерывна, и $V(x, y)$ будет непрерывной как функция переменных x и y, причем имеет место

$$V(x_0, 0) = f(x_0)\,.$$

Мы утверждаем:

Теорема I. *Существует одна и (с точностью до точек множества $\mathfrak{M}$) только одна функция $V(x, y)$ с такими свойствами и эта функция дана для $y > 0$ рядом*

$$(Vx, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx\, \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \tag{4}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x') \sin nx'\, \mathrm{d}x'\right), \tag{5}$$

для $y = 0$

$$V(x, 0) = f(x)\,. \tag{6}$$

Проблема II (Случай зависимости от времени): Пусть в квадрате $P(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ задана функция $f(x, y)$ $(f(x, y), \leqq N)$, непрерывная во всех точках квадрата P за исключением точек, образующих множество $\mathfrak{N}$ меры нуль. Отыщем функцию $F(x, y, t)$, ограниченную в P и для $t \geqq 0$ той же самой константой N, непрерывную в P для $t > 0$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \text{внутри } P, t > 0\,, \tag{7}$$

причем

а) $F(0, y, t) = F(\pi, y, t) = F(x, 0, t) = F(x, \pi, t) = 0 \quad (t > 0)\,,$ (8)

б) во всех точках, в которых $f(x, y)$ непрерывна, и $F(x, y, t)$ для $t = 0$

будет непрерывной как функция переменных x, y, t, и далее в этих точках имеет место $F(x, y, 0) = f(x, y)$.[1])

Мы утверждаем:

Теорема II. *Существует одна и (с точностью до точек множества* $\mathfrak{N}$*) только одна функция* $F(x, y, t)$ *с такими свойствами и эта функция дана для* $t > 0$ *рядом*

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx \, \mathrm{e}^{-m^2 t}\right) \sin ny \, \mathrm{e}^{-n^2 t} \tag{9}$$

$$\left(A_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_P f(x', y') \sin mx' \sin ny' \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y'\right), \tag{10}$$

а для $t = 0$

$$F(x, y, 0) = f(x, y) . \tag{11}$$

Summary

TWO THEOREMS CONCERNING THE EQUATION

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

KAREL REKTORYS, Praha.

(Received February 4, 1954.)

When boundary value problems for the differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

are solved and existence and uniqueness theorems established, considerable restrictions are put as to the continuity and differentiability of functions, appearing in the boundary conditions, taking no account of restrictions, put on the region itself, in which the problem is defined. But in the mathematically formed problems of the practice, these restrictions are rarely fulfilled, indeed as well in boundary conditions (a body in a thermic bath) as in initial conditions in the interior of the body (thermal contact of two or several bodies, forming one single body). The most freguent case of functions, that we meet in boundary conditions, are the sectionally continuous ones. From the mathematical point of view, considerable difficulties arise in this case, when the belonging boundary value problem is solved.

---

[1]) К приведенным двум проблемам сводится по существу общая проблема теплопроводности в прамоугольных областях при неизменяющихся во времени краевых условиях.

In his dissertation („Uniqueness theorems for partial differential equations for heat — conduction when discontinuous boundary conditions are prescribed") the author dealt with the case, when one dimension of the body considered was considerably large in regard to the two remaining, so that the problem could be taken as twodimensional. In addition, the author supposed rectangular profile of the body (to get the problem more simple, the profile was supposed to be a square, which does not change the character of the problem, of course), and the boundary conditions (e. g. the thermic bath) not changing with the time.

On the supposition, that functions (and their derivatives), appearing in boundary and initial conditions, are sectionally continuous, several properties of the solution, important from the physical stand of view, are derived, unicity theorems are proved, and in addition, the author deals with several questions, touching the numerical calculation, especially with the uniform convergence of infinite series, by which the solution is defined. From the physical standpoint, the problem is solved in the mentioned dissertation in a considerably sufficient manner.

From the mathematical standpoint, the work suggests the solving of some curious questions. The coefficients of the quoted unfinite series are depending on initial and boundary conditions (functions) of the problem. The series converge for much more general initial and boundary functions than are the sectionally continuous ones. A question arises about the properties of the functions, defined by these series in this case, namely under what suppositions these functions will „continuously fit" to initial and boundary conditions.

These problems are being solved in this work.

The essence of the work is formed by the two following theorems (when the terms „integrable function" and „measurable function" are used, they are understood in the Lebesgue — sense):

I. Problem (Stationary Heat — Conduction):

Let $f(x)$ be continuous in the interval $\langle 0, \pi\rangle$ with the exception of points forming a set $\mathfrak{M}$ of measure zero. Let $|f(x)| \leqq M$ in $\langle 0, \pi\rangle$. A function $V(x, y)$ defined in a square P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ of following properties is found:

1. $V(x, y)$ is harmonic in the interior of P, e. g. satisfies the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi)\,. \tag{1}$$

2. $V(x, y)$ is bounded in P by the same constant M as the function $f(x)$ in $\langle 0, \pi\rangle$.

3. $V(x, y)$ is continuous in the region $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 < y \leqq \pi$ and

a) $V(0, y) = V(\pi, y) = 0 \quad (0 < y \leqq \pi)$, (2)

b) $V(x, \pi) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$. (3)

4. In each interior point x_0 of the interval $\langle 0, \pi \rangle$ $(y = 0)$, in which $f(x)$ is continuous, the function $V(x, y)$ is continuous as function of the both variables x, y, and

$$V(x_0, 0) = f(x_0) .$$

For the I. problem holds

Theorem I. *There exists one and (with the exception of points of the set $\mathfrak{M}$) only one function $V(x, y)$ of the required properties, and this function is defined for $y > 0$ by the series*

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \tag{4}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x') \sin nx' \,\mathrm{d}x'\right) , \tag{5}$$

and for $y = 0$ by

$$V(x, 0) = f(x) . \tag{6}$$

II. Problem (Time-Variable Heat-Conduction)

Let $f(x, y)$ be continuous in the square P $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$ with the exception of the set $\mathfrak{N}$ of measure zero. Let $|f(x, y)| > N$ in P. A function $F(x, y, t)$ is found in P and for $t \geqq 0$, continuous in P for $t > 0$ and bounded in P, $t \geqq 0$ by the same constant N as the function $f(x, y)$, such that

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \text{ in the interior of } P,\ t > 0 , \tag{7}$$

while

a) $F(0, y, t) = F(\pi, y, t) = F(x, 0, t) = F(x, \pi, t) = 0 \quad (t > 0)$, (8)

b) in each point, where $f(x, y)$ is continuous, $F(x, y, t)$ is continuous as function of all the three variables x, y, t for $t = 0$, and $F(x, y, 0) = f(x, y)$ there.[1])

It holds

Theorem II. *There exists one and (with the exception of the points of the set $\mathfrak{N}$) only one function $F(x, y, t)$ of the properties required, and this function is defined for $t < 0$ by the series*

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx\, \mathrm{e}^{-m^2 t}\right) \sin ny\, \mathrm{e}^{-n^2 t} \tag{9}$$

$$\left(A_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_P f(x', y') \sin mx' \sin ny' \,\mathrm{d}x' \,\mathrm{d}y'\right) \tag{10}$$

and for $t = 0$ by

$$F(x, y, 0) = f(x, y) . \tag{11}$$

---

[1]) To these two quoted problems it is possible to reduce a general heat — conduction problem in rectangular regions when boundary conditions do not vary with time.