Zdeněk Koutský

Některá užití čísla sup $|a_n|^{1/n}$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 3, 273--277

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117129`

NĚKTERÁ UŽITÍ ČÍSLA sup $|a_n|^{\frac{1}{n}}$

ZDENĚK KOUTSKÝ, Praha

(Došlo 15. února 1952.)

DT: 517.91
517.522.2

V této práci je s pomocí čísla sup $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ (viz [1]), kde a_n jsou koeficienty mocninné řady, v důkaze existenční věty řešení diferenciálních rovnic sestrojena jednoduchá majoranta a methodou obdobnou Cauchyově získán odhad poloměru konvergence řady, která diferenciální rovnici řeší, při čemž tento odhad nelze již zpřesnit. Odhad platí i pro funkce v jistém oboru neomezené. Dále je sestrojen systém mocninných řad, jehož inversní systém má v určité třídě nejmenší obor konvergence.

1. Nechť v okolí (0,0) je definována analytická funkce komplexních proměnných $f(\eta, \zeta)$, již tedy je možno rozvinout v Taylorovu řadu. Potom o diferenciální rovnici

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = f(\eta, \zeta) \tag{1,1}$$

s počátečními podmínkami

$$\zeta = 0, \qquad \eta = 0 \tag{1,2}$$

platí známá existenční věta: *Existuje právě jedna analytická komplexní funkce η komplexní proměnné ζ, nabývající v bodě $\zeta = 0$ hodnoty $\eta = 0$ a vyhovující rovnici* (1,1).

Tuto větu dokáži nyní methodou, obdobnou Cauchyově [2]. Dostanu jednoduchou majorantu a odhad poloměru konvergence řady, jež řeší rovnici (1,1). Tento odhad nelze dále zpřesnit a platí (na rozdíl od Cauchyova) i pro funkce v jistém oboru neomezené.

Mám tedy dokázat, že existuje funkce

$$\eta = \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 + \ldots + \alpha_n\zeta^n + \ldots, \quad \left(\alpha_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n\eta}{d\zeta^n}\right)_{\zeta=0}\right) \tag{1,3}$$

mající vlastnosti uvedené v existenční větě.

Rozvedu-li funkci $f(\eta, \zeta)$ v Taylorovu řadu $\sum\limits_{i,k\geq 0} a_{ik}\eta^i\zeta^k$ a dosadím-li pak do (1,1) řadu $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\zeta^i$ za η a řadu $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i\alpha_i\zeta^{i-1}$ za $\frac{d\eta}{d\zeta}$, dostanu na obou stranách mocninné řady v proměnné ζ. Srovnání koeficientů u stejných mocnin ζ mi umožní určit vztahy mezi koeficienty α_n a a_{ik}.

Nyní najdu kladnou konstantu g tak, aby platilo

$$|a_{ik}|^{\frac{1}{i+k+1}} \leqq g \quad \left(a_{ik} = \frac{1}{i!\,k!}\left(\frac{\partial^{i+k} f}{\partial \eta^i \partial \zeta^k}\right)_{\substack{\eta=0\\ \zeta=0}}\right) \tag{1,4}$$

pro všechna celá nezáporná i, k. Takové g jistě existuje, protože, kdyby posloupnost $|a_{ik}|^{\frac{1}{i+k+1}}$ nebyla omezena, nebyla by řada v η, ζ pro žádná dvě čísla $\eta \neq 0$, $\zeta \neq 0$ konvergentní. K (1,1) utvořím majorantní (srovnávací) diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\zeta} = g + g^2(H + \zeta) + g^3(H^2 + H\zeta + \zeta^2) + \dots \tag{1,5}$$

a budu ji řešit řadou

$$H = \beta_1\zeta + \beta_2\zeta^2 + \beta_3\zeta^3 + \dots \tag{1,6}$$

Vztahy mezi β_n a g určím stejně jako vztahy mezi α_n a a_{ik}. Dále se snadno zjistí pomocí právě určených vztahů, že je pro všechna n

$$|\alpha_n| \leqq \beta_n\,. \tag{1,7}$$

Řada (1,6) je tedy majorantou řady (1,3). Následkem toho má (1,3) poloměr konvergence, který je větší nebo roven poloměru konvergence řady (1,6).

Pokud $|\zeta| < \dfrac{1}{g}$, $|H| < \dfrac{1}{g}$, mohu psát (1,5) ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{g}{(1 - gH)(1 - g\zeta)}\,. \tag{1,8}$$

Tuto diferenciální rovnici snadno řeším separací proměnných s výsledkem

$$H - \tfrac{1}{2}gH^2 = \log\frac{1}{1 - g\zeta} + \text{konst.} \tag{1,9}$$

Integrační konstantu v (1,9) určím tak, že pro log $(1 - g\zeta)$ volím tu hodnotu, jež pro $\zeta = 0$ je rovna nule, a dosadím do (1,9) za podmínek (1,2). Je *konst.* $= 0$. Tedy

$$H = \frac{1}{g} \pm \sqrt{\frac{1}{g^2} - \frac{2}{g}\log\frac{1}{1 - g\zeta}}\,. \tag{1,10}$$

Vzhledem k (1,2) platí pouze znaménko minus. Pokud $|\zeta| < \dfrac{1}{g}$, je logaritmus analytickou funkcí. Rozvětvovací bod odmocniny a tedy i funkce je pro

$$\log\frac{1}{1 - g\zeta} = \frac{1}{2g} \quad \text{čili} \quad \text{pro } \zeta = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2g}}}{g}\,. \tag{1,11}$$

Mocninná řada (1,6) pro H tedy konverguje, pokud

$$|\zeta| < \frac{1 - e^{-\frac{1}{2g}}}{g}$$

a tedy i řada (1,3) má poloměr konvergence

$$\varrho \geqq \frac{1 - e^{-\frac{1}{2g}}}{g}\,. \tag{1,12}$$

Tento odhad je nejlepší možný, neboť pro speciální funkci f (na př. řadu v (1,5) je přesný, t. j. pro ζ, která jsou v prosté hodnotě větší než mez (1,12), řada (1,6) diverguje. Z (1,8) plyne, že funkce $f(\eta, \zeta)$ nemusí být omezená pro $|\zeta| < \frac{1}{g}$, $|\eta| < \frac{1}{g}$.

Poznámka: Důkaz unicity je shodný s důkazem Cauchyovým.

2. Budiž dán systém mocninných řad

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + \Sigma a_{ik}z_1^i z_2^k\,, \\ w_2 &= b_{10}z_1 + b_{01}z_2 + \Sigma b_{ik}z_1^i z_2^k\,. \end{aligned} \tag{2,1}$$

Nechť obě mocninné řady systému (2,1) konvergují v jistém okolí bodu (0,0). Budiž dále

$$D = a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} \neq 0\,. \tag{2,2}$$

Potom Jacobiův determinant je v počátku od nuly různý a existuje tedy inversní systém mocninných řad

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_{10}w_1 + \alpha_{01}w_2 + \Sigma\alpha_{ik}w_1^i w_2^k\,, \\ z_2 &= \beta_{10}w_1 + \beta_{01}w_2 + \Sigma\beta_{ik}w_1^i w_2^k\,, \end{aligned} \tag{2,3}$$

jež jsou opět konvergentní v jistém okolí bodu (0,0).

Poznámka: Čtenář snadno zjistí, že za předpokladu $D > 0$ jsou čísla α_{10}, α_{01}, β_{10}, β_{01} v systému (2,3) nezáporná, právě když v původním systému (2,1) platí $a_{10} > 0$, $b_{01} > 0$, $a_{01} \leqq 0$, $b_{10} \leqq 0$.

Mějme nyní systém S tvaru (2,1), který má tyto vlastnosti:

a) a_{ik}, b_{ik} jsou pro $i + k = 1$ reálná a přitom $a_{10} > 0$, $b_{01} > 0$, $a_{01} \leqq 0$, $b_{10} \leqq 0$;

b) $D = a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} > 0$.

Označme dále

$$g_1 = \sup_{i+k\geqq 2} |a_{ik}|^{\frac{1}{i+k}}\,, \qquad g_2 = \sup_{i+k\geqq 2} |b_{ik}|^{\frac{1}{i+k}}\,.$$

K systému S utvořme třídu T všech systémů

$$\begin{aligned} w_1 &= a'_{10}z_1 + a'_{01}z_2 + \Sigma a'_{ik}z_1^i z_2^k\,, \\ w_2 &= b'_{10}z_1 + b'_{01}z_2 + \Sigma b'_{ik}z_1^i z_2^k\,, \end{aligned} \tag{2,1a}$$

kde a'_{ik}, b'_{ik} jsou komplexní čísla, pro něž platí

c) $|a'_{ik}| = |a_{ik}|$, $|b'_{ik}| = |b_{ik}|$ pro $i + k = 1$,
d) $|a'_{ik}| \leqq g_1^{i+k}$, $|b'_{ik}| \leqq g_2^{i+k}$ pro $i + k \geqq 2$.

(Vztah d) bychom mohli zapsat též takto: Je-li $g'_1 = \sup\limits_{i+k\geqq 2} |a'_{ik}|^{\frac{1}{i+k}}$, je $g'_1 \leqq g_1$ a podobně pro g_2.)

Všimněme si, že pro libovolný systém z třídy T platí

$$|a'_{10}b'_{01} - a'_{01}b'_{10}| \geqq |a'_{10}b'_{01}| - |a'_{01}b'_{10}| = a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} > 0 ,$$

takže ke každému systému ze třídy T existuje systém inversní.

Platí nyní tato věta:

(V) *Ze všech inversních systémů, utvořených k systémům třídy T, má ten systém nejmenší obor konvergence, který je inversní k systému*

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{10}z_1 + a_{01}z_2 - \Sigma g_1^{i+k}z_1^iz_2^k , \\ w_2 &= b_{10}z_1 + b_{01}z_2 - \Sigma g_2^{i+k}z_1^iz_2^k . \end{aligned} \tag{2,4}$$

Poznámka: Splňuje-li původní systém S podmínky $D < 0$, $a_{10} \leqq 0$, $b_{01} \leqq 0$, $a_{01} > 0$, $b_{10} > 0$, můžeme stejným způsobem utvořit třídu T a dokázat pro ni větu (V).

Pro důkaz této věty potřebuji dvě pomocné věty.

Věta 1. *Buďte c_{11}, c_{22} kladná, c_{12}, c_{21}, K_1, K_2 nezáporná čísla. Nechť $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$. Nechť c'_{ik}, K'_i jsou komplexní čísla, pro něž platí $|c'_{ik}| = c_{ik}$, $|K'_i| \leqq K_i$ $(i, k = 1, 2)$. Nechť čísla x_1, x_2, x'_1, x'_2 vyhovují vztahům*

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 - c_{12}x_2 &= K_1 , \\ -c_{21}x_1 + c_{22}x_2 &= K_2 , \\ c'_{11}x'_1 + c'_{12}x'_2 &= K'_1 , \\ c'_{21}x'_1 + c'_{22}x'_2 &= K'_2 . \end{aligned}$$

Potom $|x'_1| \leqq x_1$, $|x'_2| \leqq x_2$.

Tuto větu snadno dokážeme přímým výpočtem.

Věta 2. *Každá dvojice koeficientů α_{ik}, β_{ik} vyhovuje soustavě*)*

$$\begin{aligned} a_{10}\alpha_{ik} + a_{01}\beta_{ik} &= A , \\ b_{10}\alpha_{ik} + b_{01}\beta_{ik} &= B , \end{aligned} \tag{2,5}$$

kde pro $i + k > 1$ platí

$$A = -\Sigma a_{pq} \prod_{n=1}^{p} \alpha_{j_nl_n} \prod_{m=1}^{q} \beta_{r_ms_m} ,$$

při čemž

$$\sum_{n=1}^{p} j_n + \sum_{m=1}^{q} r_m = i, \quad \sum_{n=1}^{p} l_n + \sum_{m=1}^{q} s_m = k, \quad p + q > 1 ,$$

*) Rozumí se, že a_{ik}, b_{ik} se vztahují k nějakému systému tvaru (2,1) a α_{ik}, β_{ik} k příslušnému inversnímu systému tvaru (2,3).

a kde B má analogický tvar, jen místo a_{pq} piši b_{pq}; pro $i = 1$, $k = 0$ je $A = 1$, $B = 0$, pro $i = 0$, $k = 1$ je $A = 0$, $B = 1$.

Tuto větu nahlédneme, dosadíme-li ze systému (2,3) do systému (2,1) a porovnáme koeficienty u $w_1^i w_2^k$.

Poznámka: Ze vztahů $\sum_{n=1}^{p}(j_n + l_n) + \sum_{m=1}^{q}(r_m + s_m) = i + k$, $j_n + l_n \geqq 1$, $r_m + s_m \geqq 1$, $p + q > 1$ plyne, že v součtu, kterým je určeno A, je vždy $j_n + l_n < i + k$, $r_m + s_m < i + k$. Známe-li tedy α_{jl}, β_{jl} pro $j + l < i + k$, můžeme z (2,5) vypočítat α_{ik}, β_{ik}.

A nyní důkaz hlavní věty (V). Zvolme libovolný systém z třídy T o koeficientech a'_{ik}, b'_{ik}; příslušný inversní systém nechť má koeficienty α'_{ik}, β'_{ik}. Nechť α^*_{ik}, β^*_{ik} značí koeficienty systému, který je inversní k (2,4). Stačí zřejmě dokázat, že pro všechna i, k platí

$$|\alpha'_{ik}| \leqq \alpha^*_{ik}, \quad |\beta'_{ik}| \leqq \beta^*_{ik} . \tag{2,6}$$

Z vět 1 a 2 plyne ihned, že tento vztah platí pro $i + k = 1$. Zvolme nyní indexy i, k, kde $i + k > 1$, a předpokládejme, že vztahy (2,6) jsou splněny pro všechny dvojice indexů, jejichž součet je menší než $i + k$. (Podle tohoto předpokladu jsou tedy α^*_{jl}, β^*_{jl} nezáporná čísla, pokud $j + l < i + k$.) Pravé strany rovnic tvaru (2,5), z nichž počítáme α^*_{ik}, β^*_{ik} (resp. α'_{ik}, β'_{ik}), označme A^*, B^* (resp. A', B'). Jsou-li a^*_{ik}, b^*_{ik} koeficienty systému (2,4), je $a^*_{pq} = -g_1^{p+q}$, $b^*_{pq} = -g_2^{p-q}$ pro $p + q > 1$; A^* (a podobně B^*) je tedy součtem nezáporných čísel. Protože podle d) platí $|a'_{pq}| \leqq g_1^{p+q} = -a^*_{pq}$, $|b'_{pq}| \leqq g_2^{p+q} = -b^*_{pq}$ a protože podle indukčního předpokladu je $|\alpha'_{jl}| \leqq \alpha^*_{jl}$, $|\beta'_{jl}| \leqq \beta^*_{jl}$ pro $j + l < i + k$, je A' (resp. B') součtem čísel, která mají prostou hodnotu nejvýš rovnou odpovídajícím číslům, jejichž součet je A^* (resp. B^*). Je tedy $|A'| \leqq A^*$, $|B'| \leqq B^*$; podle věty 1 platí též $|\alpha'_{ik}| \leqq \alpha^*_{ik}$, $|\beta'_{ik}| \leqq \beta^*_{ik}$, což bylo dokázati. Systém inversní k (2,5) je tedy majorantní ke všem ostatním inversním systémům a má proto nejmenší obor (absolutní) konvergence, jak praví věta (V).

LITERATURA

[1] *M. Kössler:* O významu čísla sup $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ v theorii mocninných řad. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. *74* (1949), str. 47.

[2] *K. Petr:* O diferenciálních rovnicích.