Josef Brejcha

O axiálních a duálně axiálních systémech čar na ploše v S_3, obsahujících konjugované sítě

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 3, 252--260

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117127

O AXIÁLNÍCH A DUÁLNĚ AXIÁLNÍCH SYSTÉMECH ČAR NA PLOŠE V S_3, OBSAHUJÍCÍCH KONJUGOVANÉ SÍTĚ

JOSEF BREJCHA, Brno.

(Došlo dne 17. prosince 1953.) DT: 513.621

V práci „*Sistemi coniugati e sistemi assiali di linea sopra una superficie dello spazio ordinario*" (Bolletino dell'Unione Matematica Italiana, Febbraio, 1924) řeší *E. Bompiani* otázku, *existují-li na ploše S v S_3 konjugované sítě, obsažené v systému axiálním*. Rozřešil zejména otázku, kdy těchto konjugovaných systémů je jednoparametrická soustava a dokázal, že je to možno jen tehdy, *když S je konstantní střední projektivní křivosti —16 a axiální systém je indukován kongruencí Γ_1 Greenových hran.*

V dalším se řeší obdobné otázky s tím rozdílem, že se klade podmínka, aby *jedna soustava konjugované sítě náležela do axiálního systému a druhá do axiálního systému reciprokého.* Je-li takových sítí jednoparametrická soustava, pak *plocha S je Čechova plocha o projektivní křivosti —2 a Γ_1 je její kongruencí Wilczynskiho direktrici.*

Otázka je podrobně studována též u ploch přímkových.

I. Budiž

$$\left.\begin{aligned} x_{uu} &= p_{11}x + \Theta_u x_u + \beta x_v\,, \\ x_{vv} &= p_{22}x + \gamma x_u + \Theta_v x_v\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

soustava parciálních dif. rovnic, jíž vyhovují normální Fubiniovy souřadnice ($\Theta = \log \beta\gamma$) bodu x nepřímkové ($\beta\gamma \neq 0$) plochy S trojrozměrného projektivního prostoru, vztažené na asymptotiky.

Ke každému bodu x plochy S přidružme jím procházející přímku l_1 a v jeho tečné rovině ležící přímku l_2, jež jsou definovány jako spojnice bodů

$$x, \quad x_{uv} - ax_u - bx_v\,, \tag{2}$$

resp. dvojice bodů

$$x_u - bx, \quad x_v - ax\,, \tag{3}$$

kde a, b jsou funkce asymptotických parametrů u, v. Snadno se vidí, že l_1, l_2 je dvojice polár v základní[1]) polaritě; proto kongruenci Γ_1 přímek l_1 a kongruenci Γ_2 přímek l_2 budeme nazývat *kongruencemi reciprokými*.

[1]) T. j. v polaritě vzhledem k Lieho kvadrice bodu x. Viz *Fubini-Čech*, La géométrie projective différentielle 1931, str. 64.

Kongruence Γ_1 resp. Γ_2 indukuje na ploše S systém Σ_1 axiálních čar, resp. systém Σ_2 duálních axiálních čar, definovaných takto:

Čára C_1 na S_1 náleží do systému Σ_1, když v každém jejím bodě x její oskulační rovina prochází přímkou l_1 bodu x.

Duálně čára C_2 na S_2 náleží do systému Σ_2, když bod vratu[2]) tečné roviny jejího bodu x leží na l_2.

Vyjádříme-li tyto podmínky, vychází snadno, že čára $v = v(u)$ náleží do Σ_1, resp. do Σ_2, když

$$v'' = -\beta + (\Theta_v - 2b)v' - (\Theta_v - 2a)v'^2 + \gamma v'^3 , \tag{4}$$

resp. když

$$v'' = \beta + (\Theta_u - 2b)v' - (\Theta_u - 2a)v'^2 - \gamma v'^3 . \tag{5}$$

Otázku, která je řešena v tomto článku (v části II. i pro plochy přímkové), lze nyní formulovati takto:

Existuje plocha S a k ní přidružená dvojice reciprokých kongruencí Γ_1 a Γ_2 *tak, aby indukovaný axiální systém Σ_1 obsahoval jednu soustavu a indukovaný duální axiální systém Σ_2 druhou soustavu konjugované sítě L čar na S?*

Buď

$$v' = M(u, v), \qquad M \neq 0 \tag{6}$$

dif. rovnice soustavy L_1 čar na S

a

$$v' = - M(u, v) \tag{7}$$

dif. rovnice druhé soustavy L_2, která spolu s prvou tvoří konjugovanou síť L.

Že všechny čáry soustavy L_1 náležejí do Σ_1 je vyjádřeno parciální dif. rovnicí pro M

$$M_u + MM_v = -\beta + (\Theta_u - 2b)M - (\Theta_v - 2a)M^2 + \gamma M^3 ; \tag{8}$$

obdobně vyjadřuje rovnice

$$- M_u + MM_v = \beta - (\Theta_u - 2b)M - (\Theta_v - 2a)M^2 + \gamma M^3 , \tag{9}$$

že čáry soustavy L_2 náležejí do Σ_2.

Odečtením a sečtením rovnic soustavy (8), (9) vychází nová soustava

$$M_u = -\beta + (\Theta_u - 2b)M \tag{10}$$

$$M_v = M[-(\Theta_v - 2a)] + \gamma M^2 \tag{11}$$

s jedinou podmínkou integrability $M_{uv} = M_{vu}$, t. j.

$$\beta(\Theta_v - 2a) + \beta_v + 2(a_u + b_v - \beta\gamma - \Theta_{uv})M + [\gamma(\Theta_u - 2b) + \gamma_u]M^2 = 0. \tag{12}$$

Z ní je patrno, že při obecných S, Γ_1, Γ_2 neexistuje žádná konjugovaná síť L čar na S požadované vlastnosti; ve zvláštních případech může existovati

[2]) Point de rebroussement, ***Fubini-Čech,*** **l. c., str. 109.**

jedna nebo dvě takové konjugované sítě podle toho, vyhovuje-li jeden nebo dva z kořenů rovnice (12), kvadratické v M, soustavě (10), (11).

V případě, že (12) je splněna identicky v M je

$$\begin{aligned} \beta(\Theta_v - 2a) + \beta_v &= 0\,, \\ \gamma(\Theta_u - 2b) + \gamma_u &= 0\,, \\ a_u + b_v - \beta\gamma - \Theta_{uv} &= 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Z prvých dvou těchto rovnic vychází

$$2a = \Theta_v + \frac{\beta_v}{\beta} = (\log \beta\gamma)_v + (\log \beta)_v = (\log \beta^2\gamma)_v\,,$$

$$2b = \Theta_u + \frac{\gamma_u}{\gamma} = (\log \beta\gamma)_u + (\log \gamma)_u = (\log \beta\gamma^2)_u\,;$$

t. j. zavedeme-li označení

$$\psi = (\log \beta^2\gamma)_v, \quad \varphi = (\log \beta\gamma^2)_u\,,$$

bude

$$a = \tfrac{1}{2}\psi, \quad b = \tfrac{1}{2}\varphi\,. \tag{14}$$

Kongruence Γ_1 je tedy vytvořena přímkou

$$l_1 = [x, x_{uv} - \tfrac{1}{2}\psi x_u - \tfrac{1}{2}\varphi x_v]\,,$$

t. j.[3]) *kanonickou přímkou (prvého druhu) s* $\lambda = -\frac{1}{2}$, *t. j. prvou Wilczynského direktricí*, kdežto Γ_2 je vytvořena druhou direktricí. Zatím co prvé 2 rovnice (13) určují Γ_1, Γ_2, z třetí vyplývá

$$-\frac{1}{\beta\gamma}\log(\beta\gamma)_{uv} = -2 \tag{15}$$

t. j. plocha S je Čechova plocha[4]) *o konstantní projektivní křivosti* -2. Srovnáním se soustavou rovnic pro ϱ na str. 151 cit. knihy[4]) (kde je klásti $m = -b$, $l = -a$) vychází, že soustava rovnic (10), (11) je s ní totožná, klademe-li $M = \dfrac{1}{\varrho}$. Z Liouvilleovy rovnice (15) pro $\beta\gamma$ plyne, že transformací asymptotických parametrů lze docíliti, aby bylo

$$\beta\gamma = (u + v)^{-2}\,. \tag{16}$$

Nechť $\beta\gamma$ splňují rovnici (16). Pak lze klásti

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{1}{\gamma}\,\frac{k-u}{k+v}\cdot\frac{1}{u+v}\,, \\ M &= \beta\,.\,\frac{k-u}{u+v}\,(u+v)\,, \end{aligned}\right\}\,, \quad k = \text{konst.} \tag{16a}$$

---

[3]) *Fubini-Čech*, l. c. str. 100.

[4]) *Fubini-Čech*, Geometria proiettiva diferenziale I, 1926, str. 151.

Výsledky shrnuje **věta 1**[5]):

Je-li dána obecná plocha (nepřímková) S a na ní axiální systém Σ_1 a duální axiální systém Σ_2 čar, neexistuje obecně žádná konjugovaná síť L, jejíž jedna soustava čar náleží do Σ_1, druhá do Σ_2. Ve zvláštním případě mohou existovat jedna nebo dvě takové sítě. Aby bylo možno čáry systému Σ_1 rozložiti na jednoparametrický systém soustav čar, které náležejí do Σ_1 s konjugovanými soustavami, náležejícími do Σ_2, musí plocha S být konstantní projektivní křivosti — 2 a kongruence, indukující na S axiální systémy Σ_1, Σ_2 jsou vytvořeny prvými resp. druhými Wilczynského direktricemi. V tomto případě, jsou-li asymptotické parametry u, v voleny tak, aby platila rovnice (16), náležejí čáry soustavy o diferenciální rovnici (6) resp. (7) do Σ_1, resp. Σ_2, je-li M dáno kteroukoli z rovnic (16a) s libovolným k.

II. Nyní předpokládejme, že S je plocha přímková a to — nemá-li otázka ztratit smysl — nikoli rozvinutelná.

Nechť bod $x = y(v) + uz(v)$ při konstantním u vždy vytváří asymptotiku plochy S; také čáry C_y resp. C_z náležejí soustavě asymptotik (nepřímkových) plochy S. Naopak čáry u, t. j. $v = konst.$, jsou tvořicí přímky plochy. Faktor homogenity přímkových souřadnic a parametr v lze vždy normalisovat tak, aby determinant ze souřadnic bodů y, z, y', z' byl

$$(yz\ y'z') = \omega, \qquad (\omega^2 = 1) \tag{17}$$

a aby mezi koeficienty A, B, C soustavy diferenciálních rovnic

$$\left.\begin{aligned} y'' &= -(B + j)y + Az\,, \\ z'' &= -Cy + (B - j)z\,, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

jíž vyhovují $y^{(i)}(v)$, $z^{(i)}(v)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$,
platil vztah

$$B^2 - AC = \varepsilon\,, \tag{18a}$$

kde $\varepsilon^2 = 1$, nebo $\varepsilon = 0$ podle toho, jsou-li fleknodální čáry plochy různé či nikoliv (čárky značí derivace dle v). Neměníce smysl označení a, b z části I můžeme předpokládat, že kongruence Γ_1 je tvořena přímkou, spojující body

$$x, \; -az - by' + (1 - bu)z' \tag{19}$$

neboť zde je

$$\begin{aligned} x_u &= z,\ x_{uu} = 0,\quad x_v = y' + uz' \\ x_{vv} &= y'' + uz'' = \\ &= (-B - j + Cu)x + (A + 2Bu + Cu^2)x_u\,, \end{aligned} \tag{20}$$

při čemž poslední rovnice plyne z (18).

[5]) Srovnej s větou E. Bompianiho v Bolletine dell'Unione Matematica Italiana, Anno III, N. *1* — Febbraio 1924.

Označíme-li ještě fleknodální kvadratickou formu plochy S

$$A + 2Bu + Cu^2 = F(u) \tag{21}$$

(která je identicky nula pouze je-li S kvadrika, což vylučme), indukuje kongruence Γ_1 na S axiální systém čar o diferenciální rovnici

$$u'' = 2bu'^2 - 2au' - F(u), \tag{22}$$

zatím co reciproká kongruence Γ_2 indukuje na S duální axiální systém čar o dif. rovnici

$$u'' = 2bu'^2 - 2au' + F(u)\,. \tag{23}$$

Buď nyní

$$u' = M(u, v); \quad M \neq 0 \tag{24}$$

diferenciální rovnice soustavy L_1 čar na S, kdežto

$$u' = -M(u, v) \tag{25}$$

dif. rovnice konjugované soustavy L_2. Nechť prvá soustava této konjugované sítě L náleží do Σ_1, druhá do Σ_2. Podmínky pro to obdržíme z rovnice (22), kam klademe

$$u' = M, \quad u'' = M_v + MM_u\,,$$

a z rovnice (23) pro $u' = -M$, $u'' = -M_v + MM_u$. Vychází soustava rovnic

$$\left.\begin{aligned} M_v + MM_u &= 2bM^2 - 2aM - F(u)\,, \\ -M_v + MM_u &= 2bM^2 + 2aM + F(u)\,, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

z nichž sečtením a odečtením vzniká soustava

$$\left.\begin{aligned} M_u &= 2bM\,, \\ M_v &= -2aM - F(u)\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Podmínka integrability $M_{uv} = M_{vu}$ zde dává

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u} - 2bF(u) + 2\left(\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v}\right) M = 0\,. \tag{28}$$

Na rozdíl od obdobné rovnice (12) v části I. je rovnice (28) pouze lineární v M.

Aby byla splněna v M identicky, je třeba, aby bylo

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u} - 2bF(u) = 0\,,$$

$$\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial u} = 0\,.$$

Odtud vychází

$$b = \frac{1}{2}\frac{\partial \log F(u)}{\partial u}\,,$$

$$\frac{\partial a}{\partial u} = -\frac{\partial b}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log F(u)}{\partial u \partial v}\,, \tag{29}$$

t. j.

$$a = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log F(u)}{\partial v} + V\,, \tag{30}$$

kde V je funkce pouze parametru v.

Soustava (27) umožňuje k a, b, daným výrazy (29), (30), určiti M. Skutečně z rovnice

$$M_u = \frac{\partial \log F(u)}{\partial u} M$$

plyne

$$M = V_1 F(u), \qquad (V_1 \neq 0 \text{ funkce pouze } v)\,. \tag{31}$$

druhá z rovnic (27) dává

$$V = -\frac{1 + V_1'}{2V_1}\,.$$

Odtud vychází **věta 2:**

Na dané nerozvinutelné, nekvadratické přímkové ploše S existuje nekonečné množství axiálních systémů Σ_1, jejichž čáry lze uspořádati do nekonečného množství soustav L_1, k nimž konjugované soustavy L_2 náležejí do Σ_2. Určení takového axiálního systému závisí na jedné funkci jedné proměnné.

Z této věty plyne, že existuje nekonečné množství kongruencí Γ_1, jejichž paprsky tvoří komplex Γ_1^*.

Studujme ony soustavy paprsků l_1 komplexu Γ_1^*, které

a) při pevně zvolené funkci V procházejí body pevné tvořicí přímky (yz) plochy S,

b) při neurčeném V procházejí pevným bodem $x = y + uz$ plochy S,

c) při neurčeném V procházejí body pevné tvořící přímky (yz). Je možno psát podle (19), (29), (30):

$$l_1 = \left\{y + uz, \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \log F(u)}{\partial v} - V\right] z - \frac{1}{2}\frac{\partial \log F(u)}{\partial u} y' + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{2} u \frac{\partial \log F(u)}{\partial u}\right) z'\right\}, \tag{32}$$

t. j. nehledíme-li na faktor homogenity

$$l_1 = \{y + uz, \quad [\tfrac{1}{2}(A' + 2B'u + C'u^2) - V(A + 2Bu + Cu^2)]z, \\ - (B + Cu)y' + (A + Bu)z'\}\,,$$

t. j.

$$l_1 = (y + uz, \quad \bar{y} + u\bar{z})\,, \tag{33}$$

kde $\bar{y}$ a $\bar{z}$ jsou na u nezávislé body

$$\bar{y} = (\tfrac{1}{2}A' - VA)z - By' + Az'\,,$$
$$\bar{z} = -(\tfrac{1}{2}C' - VC)y + (B' - 2BV)z - Cy' + Bz'\,.$$

Vychází odtud

a) při pevně zvoleném V přímky kongruence Γ_1, protínající pevnou tvořicí přímku (yz) plochy S, vytvořují regulus resp. rovinný svazek, jakožto místo spojnic přidružených bodů $y + uz$, $\bar{y} + u\bar{z}$ v projektivitě bodových řad na přímkách (yz), $(\bar{y}, \bar{z})$[6]), jež jsou

α) mimoběžkami při různých fleknodech,

β) různoběžkami při splývajících fleknodech na (yz).

b) Jsou-li u, v pevná a V proměnné, opisuje l_1 rovinu

$$\mu = [y, z, -By' + Az' + u(-Cy' + Bz')] \,. \tag{34}$$

α) Pokud jsou oba fleknody na (yz) různé, opisuje rovina μ při měnícím se u svazek o ose (yz), projektivní s řadou bodů $y + uz$ na (yz), při čemž fleknodům jsou přidruženy roviny fleknodální.

β) Jestliže však fleknody na (yz) splývají (na př. v bodě y, takže $A = B = 0$, $C \neq 0$), je rovina μ pevná [za uvedených předpokladů $\mu = (y, z, y')$] a ztotožňuje se s rovinou fleknodální.

c) Mění-li se u, V při současně pevném $v = v_0$, přímky komplexu Γ_1^* vytvořují

α) při různých fleknodech na (yz) speciální lineární kongruenci o ose (yz),

β) při ztotožňujících se fleknodech přímkové pole, jehož nositelkou je rovina fleknodální.

Snadný, plně analogický rozbor struktury reciprokého komplexu Γ_2^* zde pomíjím.

Ukončivše takto studium soustav přímek komplexů Γ_1^* resp. Γ_2^* v bodech, resp. v tečných rovinách pevné tvořicí přímky (yz), předpokládejme, že (yz) se mění na S. Rovnice (31) pak dává při pevné volbě funkce V_1 proměnné v diferenciální rovnici soustavy L_1 a při $-V_1$ soustavy L_2 konjugované sítě L tak, že čáry z L_1 náležejí do Σ_1, čáry L_2 náležejí do Σ_2.

Obě diferenciální rovnice

$$u' = V_1 F(u) \tag{35}$$

$$u' = -V_1 F(u) \tag{36}$$

soustavy L_1, resp. L_2 jsou Ricattiovy; proto L_1 i L_2 patří mezi soustavy čar na nerozvinutelných přímkových plochách, nazvané *O.* MAYEREM[7]) *soustavy R*. Jsou to však soustavy R speciální tím, že buď dvojicí jejich *základních křivek* (t. j. místa bodů, ve kterých se čára soustavy dotýká asymptotiky) jest dvojice fleknodálních čar plochy, jsou-li různé,

nebo, jestliže fleknodální čáry splývají, čáry soustavy L_1 i L_2 mají ve fleknodech fleknodální tečny za tečny inflexní.

---

[6]) Je $(y, z, \bar{y}, \bar{z}) = (y, z, -By' + Az', -Cy' + Bz') = -(B^2 - AC)(y, z, y', z') = -\varepsilon\omega$; viz (17), (18a).

[7]) *O. Mayer*, Étude sur les surfaces réglées, Buletinul Facultatii de Stiinte din Cernauti *2*, 1928.

Skutečně má býti v těchto bodech $u' = 0$, t. j. podle (35), (36)

$$V_1 F(u) = 0, \text{ t. j. poněvadž } V_1 \neq 0$$

je $F(u) = 0$, což bylo dokázati.

Každá ze soustav L_1 na ploše S bude určena, udáme-li jednu její nikoli fleknodální čáru C_1. Je-li její rovnice $u = u(v)$, je patrné, že rovnicí (35) je určeno příslušné V_1. Ostatně tečna k c_1 v $y + uz$, jakož i fleknodální tečny ve fleknodech na (yz) tvoří trojici tvořících přímek tečného hyperboloidu plochy S podél (yz), jehož tvořící přímky jedné soustavy jsou tečnami čar soustavy L_1 v jejich průsečících s (yz). Na ploše je tak určeno pole směrů, určující čáry soustavy L_1 jako čáry integrální.

Příslušný L_2 je konjugovaný.

III. Nakonec uveďme, že pro nerozvinutelné kvadriky je $A = B = C = 0$, $(yz\,y'z') = \omega$ a dif. rovnice (22) a (23) axiálního systému Σ_1, jakož i duálního axiálního systému Σ_2 se ničím neliší, takže oba systémy se ztotožňují. Pro tyto plochy je řešení zde uvedených otázek totéž jako řešení E. Bompianiho v citované práci.

Pracováno v semináři diferenciální geometrie (prof. Klapky) Matematického ústavu ČSAV v Brně. Prosinec 1953.

Резюме

ОБ АКСИАЛЬНЫХ И ДВОЙСТВЕННО АКСИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ КРИВЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ В S_3, СОДЕРЖАЩЕЙ СОПРЯЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ

ЙОЗЕФ БРЕЙХА (Josef Brejcha), Брно.
(Посмунило в редакциу 17. XII. 1953г.)

В работе „*Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario*“ (Bolletino dell'Unione Matematica Italiana, Febbraio, 1924), Э. Бомпиани решает вопрос, *существуют ли на поверхности S в S_3 сопряженные сети, содержащиеся в аксиальной системе*. В частности, он дал ответ на вопрос, когда система таких сопряженных сетей является однопараметрической, и доказал, что это возможно только в том случае, *если с имеет постоянную среднюю проективную кривизну* —16, *а аксиальная система порождена конгруэнцией Γ_1 ребер Грина.*

В дальнейшем решаются подобные вопросы лишь с той разницей, что ставится условие, чтобы *одно семейство сопряженной сети принадлежало аксиальной системе, и второе — двойственной аксиальной системе.* Если таких сетей однопараметрическое множество, то *поверхность S является*

поверхностью Чеха, проективная кривизна которой -2, *и* Γ_1 *является ее конгруэнцией директрисс Вильчинского.*

Вопрос подробно изучается также для случая линейчатых поверхностей.

Résumé.

SUR LES SYSTÉMES AXIAUX ET DUELLEMENT AXIAUX DE LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE QUI CONTIENNENT DES RÉSEAUX CONJUGUÉS

Par JOSEF BREJCHA, Brno.

(Reçu le 17. décembre 1953.)

Dans son travail „*Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario*" (Bolletino dell'Unione Matematica Italiana, Febbraio, 1924) E. Bompiani résout la question de savoir *s'il existe sur une surface S dans S_3 des réseaux conjugués contenus dans un système axial.* Il a résolu, en particulier, le problème d'existence d'une famille à un paramètre de tels réseaux et il a démontré que cela n'est possible que *si S est une surface à courbure moyenne projective constante égale à* -16, *le système axial étant induit par la congruence Γ_1 des arêtes de Green.*

Dans ce qui suit, on traite des problèmes analogues avec la différence que l'on pose la condition qu' *une des deux familles de réseaux appartienne à un système Γ_1 et l'autre au système réciproque.* S'il existe une famille à un paramètre de tels réseaux, *la surface S est de type (Čech) à courbure projective égale à* -2, *Γ_1 étant la congruence des directrices de Wilczynski.*

La question est étudiée en détail aussi pour les surfaces réglées.