Zbyněk Šidák

Jedna methoda vyšetřování monotonie posloupností

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 2, 135--139

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117113`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

JEDNA METHODA VYŠETŘOVÁNÍ MONOTONIE POSLOUPNOSTÍ

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha.

(Došlo dne 12. srpna 1953.) DT:517.1

V tomto článku zavádím pojem konvexní a zobecněný pojem k-konvexní posloupnosti. Pokud je mi známo, v učebnicích se tyto pojmy nevyskytují, ačkoliv je jich někdy možno výhodně použít pro vyšetřování posloupností. Obsah článku jest ovšem zcela elementární, proto uvádím jen několik nejdůležitějších vět a důkazy provádím stručně; šlo mi v podstatě pouze o to, upozornit na tuto methodu. (V celém článku jde ovšem o posloupnosti reálných čísel). Výklad doprovázím několika příklady.

Definice 1. *Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ nazveme konvexní, jestliže platí* $a_n < \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ *pro* $n = 2, 3, \ldots$

Zřejmě existuje-li ryze konvexní funkce $f(x)$ taková, že $f(n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, pak posloupnost a_n je konvexní. Pojmu konvexní posloupnosti lze však někdy použít i tehdy, když vyšetřování monotonie pomocí derivací funkce $f(x)$ selže. Zvláště výhodné je v tom případě, když sečtením $a_{n-1} + a_{n+1}$ dostaneme jednoduchý výraz.

Věta 1. *Je-li posloupnost a_n konvexní, číslo $c_1 > 0$, c libovolné, pak jsou konvexní též posloupnosti $c_1 a_n + c$, $a_n + cn$, $a_n - cn$.*

Věta 2. *Je-li posloupnost a_n konvexní a její členy nezáporné, pak též posloupnost a_n^2 je konvexní.*

Věta 3. *Jsou-li posloupnosti a_n, b_n konvexní, pak též $a_n + b_n$ je posloupnost konvexní.*

O platnosti těchto vět se přesvědčíme prostým rozepsáním nerovností podle definice 1.

Věta 4. *Je-li posloupnost a_n konvexní neklesající, pak též posloupnost na_n je konvexní.*

Neboť $2na_n < na_{n-1} + na_{n+1} = (n - 1)a_{n-1} + (n + 1)a_{n+1} + a_{n-1} - a_{n+1} \leqq (n - 1)a_{n-1} + (n + 1)a_{n+1}$.

Věta 5. *Je-li posloupnost a_n konvexní, $\frac{a_n}{n}$ nerostoucí, pak $\frac{a_n}{n}$ je konvexní.*

Kdyby totiž pro nějaké N bylo $2\frac{a_N}{N} \geqq \frac{a_{N-1}}{N-1} + \frac{a_{N+1}}{N+1}$, bylo by $2a_N \geqq$ $\geqq \frac{N}{N-1}a_{N-1} + \frac{N}{N+1}a_{N+1} = a_{N-1} + a_{N+1} + \frac{a_{N-1}}{N-1} - \frac{a_{N+1}}{N+1} \geqq a_{N-1} +$ $+ a_{N+1}$, což je spor.

A nyní odvodíme nejdůležitější věty o konvexních posloupnostech.

Věta 6. *Je-li posloupnost a_n konvexní, pak nastane jeden z těchto tří případů:*

a) *a_n je klesající,*

b) *a_n je rostoucí,*

c) *existuje N tak, že konečná posloupnost $a_1, a_2, \dots a_N$ je klesající, posloupnost $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ je rostoucí.*

Důkaz: Jestliže pro všechna $n \geqq 1$ jest $a_{n+1} - a_n < 0$, nastává zřejmě případ a). Jestliže však existuje n tak, že $a_{n+1} - a_n \geqq 0$, vezmeme si první takový index a označíme jej N.

1. Nechť $N = 1$, t. j. $a_2 \geqq a_1$. Z této nerovnosti již snadno úplnou indukcí (s využitím předpokladu konvexity) plyne $a_{n+1} > a_n$ (pro $n = 2,3,\dots$), tedy nastává případ b) nebo c).

2. Nechť $N > 1$. Pak na posloupnost $a_N, a_{N+1}, \dots$ použijeme tvrzení sub 1. a zřejmě je tedy splněn případ c).

Korolár 1. *Je-li posloupnost a_n konvexní a z ní vybraná posloupnost klesající, pak a_n je klesající.*

To je zřejmé. Dále pak je též zřejmé, že každá konvexní posloupnost má limitu (aspoň nevlastní). Speciálně platí dokonce:

Věta 7. *Je-li posloupnost a_n konvexní a není-li klesající, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Důkaz: Podle věty 6 je posloupnost a_n od jistého N počínaje rostoucí. Tuto rostoucí posloupnost označme $b_1, b_2, \dots$ Tvrdím, že pro libovolné $n \geqq 3$ a pro $1 \leqq k \leqq n - 2$ jest $b_n > (k + 1)b_{n-k} - kb_{n-k-1}$. Vskutku pro $k = 1$ jest $b_n > 2b_{n-1} - b_{n-2}$, jak plyne z konvexity. Nechť tedy platí hořejší nerovnost pro $k - 1$. Pak $b_n > kb_{n-k+1} - (k - 1)b_{n-k} > 2kb_{n-k} -$ $- kb_{n-k-1} - (k - 1)b_{n-k} = (k + 1)b_{n-k} - kb_{n-k-1}$. Platí tedy také pro $k = n - 2$ nerovnost $b_n > (n - 1)b_2 - (n - 2)b_1 = (n - 2)(b_2 - b_1) + b_2$. Protože však $b_2 - b_1 > 0$, jest skutečně $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Mohli bychom ovšem také přesněji v definici 1 nazvati posloupnost a_n ryze konvexní a definovati ještě posloupnost neryze konvexní, dále pak ryze a neryze konkávní. Je jistě zbytečné prováděti to v tomto článku, protože všechno je zcela elementární. Věty o konvexních posloupnostech zde odvozené mají být vlastně jen ukázkou, jak je možno tyto pojmy aplikovat na theorii posloupností.

Pojem konvexní posloupnosti lze však zobecnit ještě takto:

Definice 2. *Budiž k pevné přirozené číslo, $k \geqq 2$. Posloupnost a_n nazveme k-konvexní, jestliže jsou pro všechna $n \geqq 1$ splněny tyto dvě podmínky:*

$$a_{n+1} < a_n + \frac{a_{n+k} - a_n}{k}, \quad a_{n+k-1} < a_n + \frac{(k-1)(a_{n+k} - a_n)}{k} .$$

(Tedy posloupnost 2-konvexní jest totéž jako konvexní.)

Pojmu k-konvexní posloupnosti můžeme zřejmě s výhodou užíti zejména tehdy, když výraz $a_{n+k} - a_n$ je jednoduchý. Platí opět řada podobných vět jako pro posloupnosti konvexní; omezíme se zde jen na dvě nejdůležitější.

Věta 8. *Je-li posloupnost a_n k-konvexní, pak nastává jeden z těchto tří případů:*

a) *a_n je klesající,*

b) *a_n je rostoucí,*

c) *existuje N tak, že konečná posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_N$ je klesající, posloupnost $a_{N+k-1}, a_{N+k}, \ldots$ je rostoucí.*

Důkaz: Jestliže pro všechna $n \geqq 1$ jest $a_{n+1} - a_n < 0$, nastává případ a). Jestliže však existuje n tak, že $a_{n+1} - a_n \geqq 0$, vezmeme si první takový index a označíme jej N.

1. Nechť $N = 1$. Předně z nerovností $a_1 \leqq a_2$, $a_2 < a_1 + \dfrac{a_{k+1} - a_1}{k}$ plyne $a_1 < a_{k+1}$. Za druhé jest $a_k < a_1 + \dfrac{(k-1)(a_{k+1} - a_1)}{k} < a_1 + a_{k+1} - a_1 = a_{k+1}$. Tvrdím nyní, že pro $n \geqq k$ platí tyto dvě nerovnosti: $a_{n+1-k} < a_{n+1}$, $a_n < a_{n+1}$. Pro $n = k$ platí podle předešlého. Nechť tedy platí pro n. Předně z nerovností $a_{n+2-k} < a_{n+1-k} + \dfrac{a_{n+1} - a_{n+1-k}}{k} < a_{n+1-k} + a_{n+1} - a_{n+1-k} = a_{n+1}$ a z nerovnosti $a_{n+1} < a_{n+2-k} + \dfrac{(k-1)(a_{n+2} - a_{n+2-k})}{k}$ plyne $a_{n+2-k} < a_{n+2}$. Za druhé pak též $a_{n+1} < a_{n+2-k} + \dfrac{(k-1)(a_{n+2} - a_{n+2-k})}{k} < a_{n+2-k} + a_{n+2} - a_{n+2-k} = a_{n+2}$. Nastává tedy případ b) nebo c).

2. Nechť $N > 1$. Na posloupnost $a_N, a_{N+1}, \ldots$ použijeme tvrzení sub 1. a je tedy splněn případ c).

Platí tedy také obdoba koroláru 1, což je zřejmé. Dokažme ještě obdobu věty 7.

Věta 9. *Je-li posloupnost a_n k-konvexní a není-li klesající, pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Důkaz: Nechť posloupnost a_n má členy $a_0, a_1, \ldots$ Podle věty 8 jest a_n od nějakého indexu n_0 rostoucí. Limita jistě existuje (aspoň nevlastní), stačí tedy vyšetřit nějakou vybranou posloupnost. Uvažujme posloupnost $a_0, a_k, a_{2k}, \ldots \ldots a_{rk}, \ldots$. Tvrdím, že tato posloupnost je konvexní, tedy že $2a_{rk} < a_{(r-1)k} +$

$+ a_{(r+1)k}$. Z předpokladu, že a_n je k-konvexní, plynou tyto nerovnosti: $a_{rk} < \frac{1}{k} a_{(r-1)k+1} + \frac{k-1}{k} a_{rk+1}$, $a_{(r-1)k+1} < \frac{k-1}{k} a_{(r-1)k} + \frac{1}{k} a_{rk}$, $a_{rk+1} < \frac{k-1}{k} a_{rk} + \frac{1}{k} a_{(r+1)k}$. Tedy jest $a_{rk} < \frac{k-1}{k^2} a_{(r-1)k} + \frac{1}{k^2} a_{rk} + \frac{(k-1)^2}{k^2} a_{rk} + \frac{k-1}{k^2} a_{(r+1)k}$. Úpravou dostaneme $(k^2 - (k-1)^2 - 1) a_{rk} < (k-1) a_{(r-1)k} + (k-1) a_{(r+1)k}$, tedy vskutku $2a_{rk} < a_{(r-1)k} + a_{(r+1)k}$. Z věty 7 pak plyne $\lim\limits_{r\to\infty} a_{rk} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, což bylo dokázati.

Bylo by opět možno ještě zavésti pojem k-konkávní posloupnosti atd. a odvodit příslušné věty, to však zajisté již zde nemusíme provádět.

Příklad: K vypracování uvedené methody jsem byl přiveden jedním problémem z matematické statistiky. Při řešení tohoto problému bylo nutno dokázat, že posloupnost o obecném členu $a_n = (n+1)\left(\frac{n\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} - 1\right)$ jest klesající. Předně přímým výpočtem dokážeme, že vybraná posloupnost sudých (resp. lichých) členů je klesající. Dále rovněž výpočtem se přesvědčíme, že posloupnost $\frac{n^2\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ je konvexní a posloupnost $\frac{n\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ klesající. (Všechny výpočty jsou dosti dlouhé, ale téměř mechanické, proto je neuvádím). Z toho již pomocí našich vět o konvexních posloupnostech plyne, že též a_n je konvexní a podle koroláru 1 je také klesající.

Cvičení:

1. Je dána posloupnost: liché členy $a_{2n-1} = \lg \frac{2n+1}{2n-1}$, sudé členy $a_{2n} = \lg \frac{n+1}{n}$. Pomocí koroláru 1 dokažte, že tato posloupnost je klesající.

2. Použitím věty 7 dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$ pro $a > 0$.

3. Posloupnost a_n budiž dána takto: $a_{3n} = 9n^2 + 3n$, $a_{3n-1} = 9n^2 - 3n$, $a_{3n-2} = 9n^2 - 9n + 2$. Dokažte, že tato posloupnost je 3-konvexní a rostoucí.

4. Sudé členy posloupnosti buďtež $a_{2n} = (n-1)!$, liché členy $a_{2n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2^n}\sqrt{\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Vyšetřete monotonii této posloupnosti a dokažte $\lim a_n = \infty$. (Jde vlastně o posloupnost $a_n = \Gamma(\frac{1}{2}n)$, $n = 2, 3, \ldots$). K následujícímu cvičení je potřeba t. zv. Wallisovy formule: $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^2 . 4^2 \ldots (2n)^2}{1^2 . 3^2 \ldots (2n-1)^2 . (2n+1)}$.

5. Posloupnost b_n budiž dána takto:

$$b_{2n+1} = (2n+1)\,\frac{1^2 \,.\, 3^2 \ldots (2n-1)^2}{2^2 \,.\, 4^2 \ldots (2n)^2}\,\pi, \quad b_{2n} = 2n\,\frac{2^2 \,.\, 4^2 \ldots (2n-2)^2}{1^2 \,.\, 3^2 \ldots (2n-1)^2} \,.\, \frac{4}{\pi} \,.$$

Dokažte, že je klesající. (Je to vlastně posloupnost $b_n = \dfrac{n\Gamma^2\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}$).