Jaroslav Kurzweil
O Hausdorffově míře

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 2, 170--171

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117109`

Přitom jest ovšem věnovat pozornost tomu, zda jde o věci nové či nikoli. Jako studijní pomůcky používáme těchto pramenů: 1. Spisy klasiků, zejména Cauchyho, Weierstrasse a Kroneckera; 2. monografie, disertace a knižní díla starší i moderní, pokud mohou obsahovat užitečné údaje o Lerchových pracích; 3. příslušné statě v Encyklopedii; 4. recense Lerchových prací v časopise Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik; 5. jednotlivé články v časopisech, pokud mají vztah k Lerchovu dílu.

Organisačně je práce rozvržena na řadu spolupracovníků, při čemž je zajištěno, že jejich činnost vyústí vždy v jednolitý referát o celé skupině studovaných prací, ucelený obsahově i slohově. Některé z těchto referátů budou již v tomto roce 1954 dodány k uveřejnění.

V druhé části své přednášky jsem předvedl ukázku výsledků týkajících se Lerchova přínosu k theorii funkce gamma, čímž jsem navázal na právě vyšlý článek *V. V. Gussova* „Přínos ruských učenců v theorii funkce gamma" (Sovětská věda, Matematika-fysika-astronomie, roč. III, 1953, 540 a n.). V závěru jsem popsal všeobecné znaky Lerchova vědeckého díla. *Otakar Borůvka*, Brno.

O HAUSDORFFOVĚ MÍŘE

(Referát o přednášce akademika *Vojtěcha Jarníka*, přednesené v matematické obci pražské dne 18. ledna 1954.)

Přednášející promluvil o aplikacích Hausdorffovy míry na aritmeticky definované množiny na přímce. Nejdříve uvedeme definici *vnější Hausdorffovy míry:*

Budiž M množina na přímce a budiž $f(d)$ funkce definovaná pro $d > 0$ a monotonně klesající k nule pro $d \to 0$. Zvolme číslo $\varrho > 0$ a pokryjme množinu M posloupností intervalů $I_1, I_2, I_3, \ldots$, jejichž délky $|I_1|, |I_2|, |I_3|, \ldots$ nepřesahují ϱ. Položme

$$L_\varrho = \inf \sum_{i=1}^{\infty} f(|I_i|),$$

kde infimum bereme pro všechna možná pokrytí splňující uvedené předpoklady. Klesá-li ϱ k nule, potom L_ϱ neroste a tak definujeme

$$\mu(M, f) = \lim_{\varrho \to 0} L_\varrho.$$

$\mu(M, f)$ nazýváme vnější Hausdorffovou měrou — pro stručnost Hausdorffovou měrou — množiny M a snadno lze ukázat, že $\mu(M, f)$ je vnější míra ve smyslu Carathéodoryově.

Zřejmě platí:

Nechť $\dfrac{f_1(d)}{f_2(d)} \to 0$ *pro* $d \to 0$.

Jestliže $\mu(M, f_1) > 0$, *pak* $\mu(M, f_2) = \infty$;

jestliže $\mu(M, f_2) < \infty$, *pak* $\mu(M, f_1) = 0$.

Tím dostává oprávnění definice:

Hausdorffovou dimensí dané množiny M — označíme ji $\dim M$ — nazveme infimum takových čísel s ($s > 0$), že $\mu(M, x^s) = 0$.

Nyní přistoupíme k aplikacím těchto pojmů. Akademik Jarník nejprve dokázal tento obecný výsledek Folksmannův:

Nechť pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ je dáno g_n (> 0) intervalů, které se nepřekrývají a které mají všechny stejnou délku λ_n. Tyto intervaly nazveme intervaly řádu n. Nechť

každý interval řádu n je obsažen v některém intervalu řádu $n - 1$ ($n \geq 2$) a obsahuje alespoň jeden interval řádu $n + 1$. Nechť M_n je sjednocení všech intervalů řádu n,

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Položme

$$g_n = 2^{n\sigma_n}, \quad \sigma = \liminf_{n\to\infty} \sigma_n .$$

Nechť dále je

$$\lambda_n = 2^{-n(\nu + o(1))}, \quad \nu > 0 .$$

Potom platí

1. $\dim M \leq \frac{\sigma}{\nu}$;

2. jestliže mimo to každý interval řádu n obsahuje právě $\frac{g_{n+1}}{g_n}$ intervalů řádu $n + 1$ a jestliže posloupnost čísel $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$ je omezená, $n = 1, 2, 3, \ldots$, potom

$$\dim M = \frac{\sigma}{\nu} .$$

Jako aplikace této Folksmannovy věty akademik Jarník ukázal, že dimense Cantorova diskontinua je $\frac{\lg 2}{\lg 3}$ a že platí toto tvrzení:

Budiž $\mathfrak{A}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. $\alpha(n)$ nechť je počet prvků posloupnosti $\mathfrak{A}$, které nepřesahují n. Položme

$$D\mathfrak{A} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{n} .$$

Jestliže $\mathfrak{B}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, nechť $\gamma_{\mathfrak{B}}$ je takové číslo, jehož dyadický rozvoj je

$$0, e_1 e_2 e_3 \ldots ,$$

kde $e_i = 1$, jestliže $i \in \mathfrak{B}$, a $e_i = 0$ v opačném případě.

Nechť A je množina všech čísel $\gamma_{\mathfrak{B}}$, kde $\mathfrak{B}$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $\mathfrak{A}$. Potom platí

$$\dim A = D(\mathfrak{A}) .$$

Akademik Jarník dále vyložil některé hlubší výsledky Folksmannovy, Chinčinovy a Knichalovy. *Jaroslav Kurzweil*, Praha.