Časopis pro pěstování matematiky

František Nožička

K problému afinní normály a indukované konexe nadplochy v afinním prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 2, 101--134

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117106`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 79 * PRAHA, 17. VI. 1954 * ČÍSLO 2

ČLÁNKY

K PROBLÉMU AFINNÍ NORMÁLY A INDUKOVANÉ KONEXE NADPLOCHY V AFINNÍM PROSTORU

FRANT. NOŽIČKA, Praha.

(Došlo 31. srpna 1953.)

DT 513.771
513.726

Obsahem předloženého článku je konstrukce afinní normály (t. zv. afinnormálního vektoru nadplochy v n-rozměrném afinním prostoru a konexe indukované tímto vektorem na nadploše ve speciálních případech, které byly v dřívější autorově práci (*Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. *75* (1950)) z úvah vyloučeny. Ukazuje se, že lze afinní normálu v těchto probíraných speciálních případech nadplochy definovat analogicky jako tomu bylo v citovaném článku, avšak definiční rovnice nevedou k jednoznačnosti. Teorii v tomto článku a v článku citovaném lze spojit v jedinou teorii. Jaký mají význam veličiny definované v obou článcích, osvětlí se na kvadrikách v obyčejném trojrozměrném afinním prostoru v přiložené II. části této práce.

I. část

V afinním prostoru A_n ($n > 2$) o souřadnicích ξ^α s danou symetrickou konexí o koeficientech $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$ je definována $(n-1)$-dimensionální nadplocha X_{n-1} parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a),\ \alpha = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, n-1\,. \tag{1}$$

Budeme předpokládat, že funkce $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$ mají spojité parciální derivace podle proměnných η^a potřebného řádu v uvažovaném oboru.

Dále předpokládáme, že hodnost matice

$$(B^1_a, B^2_a, \ldots, B^n_a),\ a = 1, \ldots, n-1,\ B^\nu_a \equiv \frac{\partial\xi^\nu}{\partial\eta^a}$$

je v uvažovaném oboru rovna $n-1$.

Tečným vektorem variety X_{n-1}, definované rovnicemi (1), nazýváme pak každý nenulový vektor t_ν, splňující rovnice

$$B^\nu_a t_\nu = 0,\ a = 1, \ldots, n-1\,. \tag{2}$$

Je-li t_ν nějaké řešení rovnic (2), pak též každý vektor $^*t_\nu$, pro nějž platí

$$^*t_\nu = P(\eta^\alpha)\, t_\nu,\ P \neq 0\,, \tag{3}$$

je řešením rovnic (2).

V afinní geometrii ploch má podstatný význam tensor h_{ab} takto definovaný

$$h_{ab} = B_a^\alpha \nabla_b t_\alpha\,, \tag{4}$$

kde ∇_b je symbol Langrangeovy derivace. Při transformaci (3) platí vztah

$$^*h_{ab} = P h_{ab}\,, \tag{5}$$

o čemž se snadno přesvědčíme.

V práci autorově „Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin“, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 75 (1950) byla konstruována afinní normála a konexe za předpokladu, že hodnost tensoru h_{ab}, definovaného rovnicemi (4), jest $n - 1$ v uvažovaném oboru. Úkolem této práce bude konstrukce afinní normály (afinnormálního vektoru) a konexe jím indukované za předpokladu, že hodnost tensoru h_{ab} je menší než $n - 1$.

Pokud se budeme v následujících úvahách odvolávat na výsledky shora citované práce, budeme ji citovat pro stručnost v poznámkách pod symbolem (I).

§ 1. Pomocné věty a definice

V celé této první části práce budeme uvažovat takové variety X_{n-1} ve V_n, pro které hodnost tensoru h_{ab}, definovaného v (4), je menší než $n - 1$ počítaje v to i ten případ, kdy h_{ab} je identicky roven nule v uvažovaném oboru.

Označme h hodnost tensoru h_{ab}, H hodnost matice determinantu

$$[\nabla_1 t_\nu, \nabla_2 t_\nu, \ldots, \nabla_{n-1} t_\nu, t_\nu]\,; \tag{1,1}$$

potom platí tato věta:

Věta 1. *Hodnost H matice* (1,1) *je o jednotku větší než hodnost h tensoru h_{ab}, t. j.*

$$H = h + 1\,. \tag{1,2}$$

Důkaz rozdělme na dvě v úvahu přicházející možnosti:

I. $$h = 0 \quad (t.\ j.\ h_{ab} \equiv 0)\,.$$

Podle předpokladu a definičních rovnic (4) jest

$$h_{ab} = B_a^\nu \nabla_b t_\nu \equiv 0\,,$$

odkud plyne, vzhledem k (2), existence takového vektoru u_b v X_{n-1}, že platí

$$\nabla_b t_\nu = u_b t_\nu,\ b = 1, \ldots, n - 1\,. \tag{1,3}$$

Poněvadž vektor t_ν je nenulový, plyne odtud, že hodnost matice (1,1) jest 1.

Je-li $H = 1$, potom, ježto vektor t_ν je nenulový, existuje vektoru u_b tak, že platí (1,3). Násobíme-li (1,3) veličinou B_a^ν a sečteme přes ν, dostaneme podle (3), (4): $h_{ab} = 0$, tedy $h = 0$. Je tedy v tomto případě tvrzení (1,2) správné.

II. $\qquad 0 < h < n - 1\,.$

Vzhledem k části I. důkazu věty platí pro hodnost H matice determinantu (1,1)

$$1 \leq H\,. \tag{1,4}$$

Jak je nyní známo z elementární algebry, lze za předpokladu, že $0 < h < n - 1$ vždy najít $n - h - 1$ lineárně nezávislých vektorů $\underset{(i)}{v^b}$, $i = 1, \dots, n - h - 1$ tak, že platí

$$h_{ab} \underset{(i)}{v^b} = 0, \; i = 1, \dots, n - h - 1\,. \tag{1,5}$$

Rovnice (1,5) můžeme vzhledem k definičním vztahům (4) přepsat na tvar

$$B^{\nu}_{a} \underset{(i)}{v^b} \nabla_b t_\nu = 0, \; i = 1, \dots, n - h - 1\,,$$

odkud plyne vzhledem k (2) existence skalárů $\underset{i}{\varrho}(\eta^a)$, $i = 1, \dots, n - h - 1$ tak, že

$$\underset{(i)}{v^b} \nabla_b t_\nu = \underset{i}{\varrho} t_\nu, \; i = 1, \dots, n - h - 1\,. \tag{1,6}$$

Poněvadž vektory $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, \dots, n - h - 1$ jsou dle předpokladu lineárně nezávislé, existuje aspoň jeden determinant $(n - h - 1)$-ho řádu matice $(\underset{(1)}{v^a}, \underset{(2)}{v^a}, \dots, \underset{(n-h-1)}{v^a})$ různý od nuly. Z (1,6) plyne pak, že můžeme $n - h - 1$ veličin $\nabla_{a_i} t_\nu$, $i = 1, \dots, n - h - 1$ vyjádřit jako lineární kombinaci veličin t_ν, $\nabla_{a_j} t_\nu$, $j = n - h, \dots, n - 1$. Tedy existují veličiny $\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}$, $i = 1, \dots, n - h - 1$; $j = n - h, \dots, n - 1$ a vektory u_{a_i} tak, že[1])

$$\nabla_{a_i} t_\nu = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} \nabla_{a_j} t_\nu + u_{a_i} t_\nu, \; i = 1, \dots, n - h - 1\,. \tag{1,7}$$

Z (1,7) plyne však, že pro hodnost matice determinantu (1,1) platí

$$H \leq h + 1\,. \tag{1,8}$$

Ježto předpokládáme, že pro hodnost h tensoru h_{ab} jest $0 < h < n - 1$, existuje

a) aspoň jeden determinant různý od nuly v uvažovaném bodě, t. j.

$$h_{[a_1|b_1|} h_{a_2|b_2|} \dots h_{a_h]b_h} \neq 0 \tag{1,9$_a$}$$

v případě, že $h < 1$,

b) aspoň jedna složka tensoru h_{ab} různá od nuly v uvažovaném bodě, t. j.

$$h_{a_1 b_1} \neq 0 \tag{1,9$_b$}$$

v případě $h = 1$.

V případě a) můžeme $(1,9)_a$ na základě definičních rovnic (4) přepsat na tvar

$$B^{\nu_1}_{b_1} B^{\nu_2}_{b_2} \dots B^{\nu_h}_{b_h} \nabla_{[a_1} t_{|\nu_1|}, \nabla_{a_2} t_{|\nu_2|}, \dots, \nabla_{a_h]} t_{\nu_h} \neq 0\,; \tag{1,10$_a$}$$

---

[1]) a_i jsou čísla přirozená z množiny $1, 2, \dots, n - 1$ v počtu $n - h - 1$ a navzájem různá, a_j jsou přirozená čísla rovněž z množiny čísel $1, 2, \dots, n - 1$ a vzájemně různá. Dále je $a_i \neq a_j$.

v případě b) pak

$$B^{\nu}_{a_1} \nabla_{b_1} t_\nu \neq 0 . \tag{1,10$_b$}$$

Z obou případů a), b) ihned usoudíme;

$$H \geq h . \tag{1,11}$$

Předpokládejme, že by platilo $H = h$.

Vektory $\nabla_{a_j} t_\nu$ (jakožto vektory v A_n) pro $j = n - h, \ldots, n - 1$ jsou v A_n lineárně nezávislé. To plyne bezprostředně z (1,7) a $(1{,}10)_a$ resp. $(1{,}10)_b$. Pak ovšem (za předpokladu, že $H = h$) by existovala taková A_j, $j = n - h, \ldots, n - 1$, že by platilo (lokálně ovšem)

$$t_\nu = \sum_{j=n-h}^{n-1} A_j \nabla_{a_j} t_\nu .$$

Odtud vynásobením veličinou B^{ν}_{b} a sečtením přes ν dostaneme vzhledem k (2), (4)

$$\sum_{j=n-h}^{n-1} A_j h_{ba_j} = 0,\ b = 1, \ldots, n - 1 , \tag{1,12}$$

což znamená, že v determinantu z tensoru h_{ab} je určitých h řádků (t. j. řádky a_j-té, $j = n - h, \ldots, n - 1$) lineárně závislých. Z (1,7) plyne však vynásobením veličinou B^{ν}_{b}:

$$h_{ba_i} = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{ba_j},\ i = 1, \ldots, n - h - 1 . \tag{1,13}$$

Z (1,12), (1,13) plyne však, že v matici z tensoru h_{ab} je nejméně $n - h$ řádků lineární kombinací $h - 1$ zbývajících řádků. To by však znamenalo, že hodnost h tensoru h_{ab} je $\leq h - 1$, což je ve sporu s předpokladem. Tedy

$$H \neq h . \tag{1,14}$$

Z (1,8), (1,11), (1,14) plyne pak ihned $H = h + 1$ jak bylo dokázat.

Poznámka 1. Jak z důkazu předchozí věty vyplývá, jsou za předpokladu, že hodnost tensoru h_{ab} jest h, $1 \leq h < n - 1$, vektory t_ν, $\nabla_{a_j} t_\nu$, $j = n - h, \ldots, n - 1$ lineárně nezávislé, v případě $h_{ab} = 0$ jsou vektory $\nabla_a t_\nu$ až na faktor rovny vektoru t_ν.

Poznámka 2. Z transformačního vztahu (3) a (5) ihned vyplývá, že hodnost tensoru h_{ab} nezávisí na volbě faktoru tečného vektoru t_ν. Totéž platí pak pro hodnost matice determinantu (1,1), jak plyne z (1,2).

Věta 2. *Pro veličiny* $\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}$, u_{a_i} *z* (1,7) *platí při transformaci* (3)

$$\overset{a_j}{\underset{a_i}{{}^*\lambda}} = \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}},\quad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n - h - 1 \\ j = n - h, \ldots, n - 1 \end{array} . \tag{1,15$_a$}$$

$$^*u_{a_i} = u_{a_i} - \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} P^{-1}\, \partial_{a_j} P + P^{-1}\, \partial_{a_i} P . \tag{1,15$_b$}$$

Důkaz: Podle (1,7) jest

$$\nabla_{a_i} {}^*t_\nu = \sum_{j=n-h}^{n-1} {}^*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} \nabla_{a_j} {}^*t_\nu + {}^*u_{a_i} {}^*t_\nu\,, \quad i = 1, \dots, n-h-1\,,$$

a tedy vzhledem k (3) a známým vlastnostem operace ∇_a dostaneme

$$P \nabla_{a_i} t_\nu + t_\nu \partial_{a_i} P = \sum_{j=n-h}^{n-1} {}^*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} (P \nabla_{a_j} t_\nu + t_\nu \partial_{a_j} P) + P {}^*u_{a_i} t_\nu\,.$$

Dosaďme sem za $\nabla_{a_i} t_\nu$ z (1,7). Dostaneme po úpravě

$$\sum_{j=n-h}^{n-1} P({}^*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} - \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}) \nabla_{a_j} t_\nu + \{P({}^*u_{a_i} - u_{a_i}) + \sum_{j=n-h}^{n-1} {}^*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} \partial_{a_j} P - \partial_{a_i} P\} t_\nu = 0\,.$$

Poněvadž vektory t_ν, $\nabla_{a_j} t_\nu$ $(j = n-h, \dots, n-1)$ jsou lineárně nezávislé,[2]) musí příslušné koeficienty u nich stojící se anulovat, což vede, jak snadno nahlédneme, ke vztahům $(1,15)_{a,b}$. Tím je věta dokázána.

V dalším budeme předpokládat, že pro hodnost h tensoru h_{ab} platí $1 \leq h < n-1$. Zřejmě nemůžeme pak k tensoru h_{ab} zavést kontragradientní tensor způsobem obvyklým v diferenciální geometrii.[3])

Zavedeme si tensor l^{ac} touto definicí

$$l^{ac} h_{ca_j} = \delta^a_{a_j}, \quad j = n-h, \dots, n-1;\ a = 1, \dots, n-1\,, \tag{1,16}$$

což je $(n-1)\,h$ podmínek pro $(n-1)^2$ neznámých l^{ac}. Systém rovnic má nekonečně mnoho řešení pro tensor l^{ac}, neboť a_j-té řádky $(j = n-h, \dots, n-1)$ v determinantu z tensoru h_{ab} jsou lineárně nezávislé a počet rovnic je menší než počet neznámých.[4])

Položme si především otázku, zda existuje symetrický tensor l^{ac}, vyhovující rovnicím (1,16). Vyslovme a dokažme nejdříve dvě pomocné věty:

Lemma 1. *Za shora uvedených předpokladů je determinant složený z a_j-tých řádků a a_j-tých sloupců $(j = n-h, \dots, n-1)$ v determinantu z tensoru h_{ab} různý od nuly,*[5]) *t. j.*

$$h_{[a_{n-h}|a_{n-h}|} h_{a_{n-h+1}|a_{n-h+1}|} \dots h_{a_{n-1}]a_{n-1}} \neq 0\,. \tag{1,17}$$

Důkaz: Kdyby determinant (1,17) byl roven nule v uvažovaném bodě variety X_{n-1}, potom by existovalo h čísel w^{a_j}, $j = n-h, \dots, n-1$ (ne vesměs rovných nule) tak, že by v uvažovaném bodě byly splněny vztahy

$$\sum_{j=n-h}^{n-1} w^{a_j} h_{a_j a_{j_1}} = 0 \text{ pro } j_1 = n-h, \dots, n-1\,. \tag{1,18}$$

---

[2]) Viz poznámku 1 za větou 1.

[3]) T. j. nemůžeme zavést tensor h^{ab} definicí $h^{ac} h_{cb} = \delta^c_b$ (δ^c_b je Kroneckerovo delta), jako v práci (I).

[4]) To plyne bezprostředně z (1,13) a z předpokladu, že hodnost tensoru h_{ab} je h $(1 \leq h < n-1)$. Kdyby totiž řádky a_j-té $(j = n-h, \dots, n-1)$ byly lineárně závislé potom, poněvadž řádky a_i-té $(i = 1, \dots, n-h-1)$ jsou podle (1,13) lineární kombinací řádků a_j-tých, by byla hodnost tensoru h_{ab} menší než h.

[5]) Jde, jako ve všech předchozích úvahách o lokální platnost.

Odtud by pak, vzhledem k (1,13), plynulo

$$\sum_{j=n-h}^{n-1} w^{a_j} h_{a_j a_i} = \sum_{j=n-h}^{n-1} w^{a_j} \sum_{j_1=n-h}^{n-1} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{a_j a_{j_1}} = \sum_{j_1=n-h}^{n-1} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} \sum_{j=n-h}^{n-1} w_{a_j} h_{a_j a_{j_1}} = 0$$

pro $i = 1, \ldots, n - h - 1$. Odtud a z (1,18) vyplývá

$$\sum_{j=n-h}^{n-1} w^{a_j} h_{a_j b} = 0 \text{ pro } b = 1, \ldots, n-1 .$$

Tyto předchozí vztahy však znamenají, že řádky a_j-té ($j = n - h, \ldots, n - 1$) jsou lineárně závislé. Poněvadž zbývající a_i-té řádky ($i = 1, \ldots, n - h - 1$) jsou (podle (1,13)) lineární kombinací řádků a_j-tých ($j = n - h, \ldots, n - 1$), je hodnost tensoru h_{ab} menší než h, což je spor s předpokladem.

Poznámka 3. V důkazu předchozí věty není vlastně obsažen důkaz pro $h = 1$. V tomto případě výrok (1,17) má tvar

$$h_{a_{n-1} a_{n-1}} \neq 0 . \tag{1,18}$$

Kdyby bylo $h_{a_{n-1} a_{n-1}}$ rovno nule, pak by bylo — podle (1,13) —

$$h_{a_{n-1} a_i} = \sum_{j=n-1}^{n-1} \overset{a_{n-1}}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{a_{n-1} a_{n-1}} = \overset{a_{n-1}}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{a_{n-1} a_{n-1}} = 0 \tag{1,19}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n - 2$. Rovněž podle (1,13) by bylo potom — vzhledem k (1,19)

$$h_{a_{i_1} a_i} = \overset{a_{n-1}}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{a_{i_1} a_{n-1}} = 0 \text{ pro } i_1 = 1, \ldots, n-1 . \tag{1,20}$$

Podmínky (1,19), (1,20) spolu s podmínkou $h_{a_{n-1} a_{n-1}} = 0$ mohli bychom psát stručněji ve tvaru $h_{ab} = 0$, což je ve sporu s předpokladem.

Lemma 2. *Nechť pro hodnost h tensoru h_{ab} platí $1 \leq h < n - 1$. Potom existuje nekonečně mnoho symetrických řešení $l^{ac} = l^{ca}$ rovnic* (1,16). *Zvolíme-li veličiny $l^{a_{i_1} a_{i_2}}$, $i_1, i_2 = 1, \ldots, n - h - 1$ pevně tak, aby platilo*

$$l^{[a_{i_1} a_{i_2}]} = 0 \tag{1,21}$$

a definujeme-li dále[6])

$$l^{a_j a_i} = - \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \overset{a_j}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} l^{a_i a_{i_1}} , \quad \begin{array}{l} i \in 1, \ldots, n - h - 1 , \\ j \in n - h, \ldots, n - 1 , \end{array} \tag{1,22}$$

potom za těchto podmínek mají rovnice (1,16) *jednoznačné řešení pro l^{ac}, při čemž*

$$l^{ac} = l^{ca} . \tag{1,23}$$

Důkaz: V uvažovaných bodech variety X_{n-1}[7]) definujme si veličiny $l^{a_{i_1} a_{i_2}}$, $i_1, i_2 = 1, \ldots, n - h - 1$ zcela libovolně (jakožto funkce η^a) tak, aby platilo (1,21) a dále definujme v těchto bodech veličiny $l^{a_j a_i}$, $j \in n - h, \ldots, n - 1$; $i \in 1, \ldots, n - h - 1$, podle (1,22).

Definiční rovnice (1,16) přepišme na tvar

$$\sum_{j_1=n-h}^{n-1} l^{a a_{j_1}} h_{a_{j_1} a_j} = \delta^a_{a_j} - \sum_{i=1}^{n-h-1} l^{a a_i} h_{a_i a_j} . \tag{1,24}$$

---

[6]) Při uvažované volbě veličin $l^{a_{i_1} a_{i_2}}$.

[7]) Kde platí (1,13).

Pro $a = a_{i_1}$, $i_1 \in 1, \ldots, n - h - 1$[8]) se zredukují vztahy (1,24) na tvar

$$\sum_{j_1=n-h}^{n-1} l^{a_{i_1}a_{j_1}} h_{a_{j_1}a_j} = - \sum_{i=1}^{n-h-1} l^{a_{i_1}a_i} h_{a_i a_j} . \tag{1,25}$$

Vzhledem k (1,13) můžeme (1,25) přepsat takto:

$$\sum_{j_1=n-h}^{n-1} (l^{a_{i_1}a_{j_1}} + \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{a_{i_1}a_i})\, h_{a_{j_1}a_j} = 0 .$$

Podle lemmatu 1 plyne odtud ihned

$$l^{a_{i_1}a_{j_1}} = - \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{a_{i_1}a_i}, \; i \in 1, \ldots, n - h - 1; \; j_1 \in n - h, \ldots, n - 1 . \tag{1,26}$$

Porovnáme-li (1,26) s definičními vztahy (1,22), zjistíme, že platí

$$l^{a_i a_j} = l^{a_j a_i}, \; i \in 1, \ldots, n - h - 1; \; j \in n - h, \ldots, n - 1 . \tag{1,27}$$

Pro volbu indexu $a = a_{j_3}$, $j_3 \in n - h, \ldots, n - 1$, $a_{j_3} \neq a_j$ plyne z (1,24)

$$\sum_{j_1=n-h}^{n-1} l^{a_{j_3}a_{j_1}} h_{a_{j_1}a_j} = - \sum_{i=1}^{n-h-1} l^{a_{j_3}a_i} h_{a_i a_j} . \tag{1,28}$$

Pravou stranu v (1,28) přepíšeme podle (1,13) a (1,22)

$$\sum_{i=1}^{n-h-1} l^{a_{j_3}a_i} h_{a_i a_j} = - \sum_{i=1}^{n-h-1} \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \sum_{j_1=n-h}^{n-1} \overset{a_{j_3}}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} l^{a_i a_{i_1}} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} h_{a_{j_1}a_j} .$$

Vzhledem k poslední identitě můžeme rovnice (1,28) přepsat na tvar

$$\sum_{j_1=n-h}^{n-1} (l^{a_{j_3}a_{j_1}} - \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{a_{j_3}}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{a_i a_{i_1}})\, h_{a_{j_1}a_j} = 0 .$$

Odtud plyne ihned podle lemmatu 1

$$l^{a_{j_3}a_{j_1}} = \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{a_{j_3}}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{a_i a_{i_1}}, \; j_3, j_1 \in n - h, \ldots, n - 1, \; j_3 \neq j_1 . \tag{1,29}$$

Z (1,29) plyne

$$l^{[a_{j_3}a_{j_1}]} = \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{[a_{j_3}}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} \overset{a_{j_1}]}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{a_i a_{i_1}} = \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{a_{j_3}}{\underset{a_{i_1}}{\lambda}} \overset{a_{j_1}}{\underset{a_i}{\lambda}} l^{[a_i a_{i_1}]}$$

a tedy vzhledem k podmínkám (1,21)

$$l^{[a_{j_3}a_{j_1}]} = 0 \text{ pro } j_3, j_1 \in n - h, \ldots, n - 1; \; j_3 \neq j_1 . \tag{1,30}$$

Z (1,27), (1,30) plyne ihned tvrzení (1,23). Jednoznačnost řešení při pevné volbě veličin $l^{a_{i_1}a_{i_2}}$, $i_1, i_2 \in 1, \ldots, n - h - 1$ a volbě (1,22) je pak z definičních rovnic (1,24) (což jsou vlastně rovnice (1,16)) a z lemmatu 1 zřejmá. Existence nekonečně mnoha symetrických řešení l^{ab} rovnic (1,16) spočívá v tom, že můžeme veličiny $l^{a_{i_1}a_{i_3}}$ $(i_1, i_3 = 1, \ldots, n - h - 1)$ volit zcela libovolně tak, aby platilo (1,2.)1

[8]) Viz poznámku [1]).

Na základě předchozí pomocné věty vyslovíme nyní tuto větu:

Věta 3. *Všechna symetrická řešení l^{ab} rovnic* (1,16) *jsou tvaru*

$$l^{ab} = \underset{0}{l}^{ab} + \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n-h-1} \overset{i_1 i_2}{g} \underset{(i_1)}{v}^a \underset{(i_2)}{v}^b , \tag{1,31}$$

kde $\underset{0}{l}^{ab}$ je symetrické řešení rovnic (1,16), *které odpovídá volbě*

$$\underset{0}{l}^{a a_i} = 0, \; a = 1, 2, \ldots, n-1; \; i = 1, \ldots, n-h-1 , \tag{1,32}$$

$\underset{(i)}{v}^a$, $i = 1, 2, \ldots, n-h-1$ jsou nezávislé vektory s vlastnostmi (1,5) *a $\overset{i_1 i_2}{g}$, $i_1, i_2 \in 1, \ldots, n-h-1$ jsou libovolné skalární veličiny v X_{n-1} s vlastností*

$$\overset{[i_1 i_2]}{g} = 0 . \tag{1,33$_a$}$$

Důkaz: Především ukážeme, že existuje symetrické řešení $\underset{0}{l}^{ab}$ rovnic (1,16) při volbě (1,32) a to jednoznačně. Volíme-li totiž $\underset{0}{l}^{a_i a_{i_1}} = 0$ pro $i, i_1 = 1, \ldots, n-h-1$, pak je podle (1,22) $\underset{0}{l}^{a_j a_i} = 0$ ($j = n-h, \ldots, n-1$; $i = 1, \ldots, n-h-1$), což můžeme stručněji psát ve tvaru (1,32). Podle lemmatu 2 existuje pak za těchto podmínek jednoznačné symetrické řešení rovnic (1,16). Vzhledem k (1,32) se rovnice (1,16) resp. (1,24) redukují na tvar

$$\sum_{j_1 = n-h}^{n-1} \underset{0}{l}^{a_{j_2} a_{j_1}} h_{a_{j_1} a_j} = \delta^{a_{j_2}}_{a_j}, \; j_2, j_1 = n-h, \ldots, n-1 \tag{1,33$_b$}$$

s jednoznačným řešením pro složky $\underset{0}{l}^{a_{j_2} a_{j_1}}$ (jak plyne z lemmatu 1). Víme nyní, že rovnice (1,16) mají symetrické řešení $\underset{0}{l}^{ab}$. Budiž l^{ab} jiné symetrické řešení rovnic (1,16). Označme

$$w^{ab} = l^{ab} - \underset{0}{l}^{ab} . \tag{1,34}$$

Vzhledem k tomu, že l^{ab}, $\underset{0}{l}^{ab}$ jsou řešeními rovnic (1,16), plyne odtud pro w^{ab} z (1,34)

$$w^{ab} h_{bc} = 0 .$$

Mysleme si index a pevný; potom při tomto pevném indexu a existují veličiny $\underset{(i)}{u}^a$, $i = 1, \ldots, n-h-1$ tak, že je

$$w^{ab} = \sum_{i=1}^{n-h-1} \underset{(i)}{u}^a \underset{(i)}{v}^b .^{9)} \tag{1,35}$$

Poněvadž jde o symetrická řešení l^{ab}, $\underset{0}{l}^{ab}$ rovnic (1,16), je $w^{[ab]} = 0$, což vede pro veličiny $\underset{(i)}{u}^a$ z (1,35) k podmínkám

$$\sum_{i=1}^{n-h-1} \underset{(i)}{u}^{[a} \underset{(i)}{v}^{b]} = 0 .$$

[9]) To plyne z (1,5), neboť všechna řešení v^a rovnic $v^a h_{ab} = 0$ jsou lineárními kombinacemi shora uvažovaných lineárně nezávislých vektorů $\underset{(i)}{v}^a$, $i = 1, \ldots, n-h-1$.

Myslíme-li si rozepsánu alternaci v předchozích vztazích a takto upravené je násobíme tensorem h_{bc} (a sečteme přes c), dostaneme z nich podle (1,5)

$$\sum_{i=1}^{n-h-1} \overset{(i)}{u^b} h_{bc} \underset{(i)}{v^a} = 0 .$$

Poněvadž vektory $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ jsou dle předpokladu lineárně nezávislé, plyne z hořeních vztahů

$$\overset{(i)}{u^b} h_{bc} = 0 .$$

Ze stejných důvodů jako shora již bylo postupováno můžeme psát

$$\overset{(i)}{u^b} = \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \overset{ii_1}{g} \underset{(i_1)}{v^b} . \tag{1,36}$$

Z (1,36) a (1,35) plyne

$$w^{ab} = \sum_{i=1}^{n-h-1} \sum_{i_1=1}^{n-h-1} \overset{ii_1}{g} \underset{(i)}{v^b} \underset{(i_1)}{v^a} .$$

Požadavek symetričnosti tensoru w^{ab} vyžaduje symetričnost veličin $\overset{ii_1}{g}$; to plyne z předpokladu lin. nezávislosti vektorů $\underset{(i)}{v^a}$. Tím je věta dokázána.

Poznámka 4. Předchozí věta byla vyslovena při pevně zvoleném tečném vektoru t_ν variety X_{n-1}. Věta následující se týká řešení rovnic (1,16), vyjdeme-li místo od vektoru t_ν od vektoru $*t_\nu$ vázaného s vektorem t_ν vztahem (3).

Věta 4. *Vyjdeme-li místo od tečného vektoru t_ν od vektoru $*t_\nu = Pt_\nu$ $(P \neq 0)$, potom všechna symetrická řešení rovnic*

$$*l^{ab} *h_{ba_j} = \delta^a_{a_j}, \; a = 1, \ldots, n - 1; \; j = n - h, \ldots, n - 1 . \tag{1,37}$$

jsou tvaru

$$*l^{ab} = Ql^{ab}, \; Q = P^{-1} , \tag{1,38}$$

kde l^{ab} jsou symetrická řešení rovnic (1,16), *tedy tvaru* (1,31).

Důkaz: Z definičních rovnic (1,37) a ze vztahu (5) plyne přepis

$$*l^{ab}Ph_{ba_j} = \delta^a_{a_j}, \; j = n - h, \ldots, n - 1; \; a = 1, \ldots, n - 1 .$$

Podle věty 3, vztahů (1,31), je tedy

$$*l^{ab}P = l^{ab}, \text{ t. j. } *l^{ab} = Ql^{ab} .$$

Poznámka 5. Z (1,37) a z věty 3 plyne speciálně

$$\underset{0}{*l^{ab}} = Q\underset{0}{l^{ab}} . \tag{1,39}$$

Věta 5. *Jest*

$$l^{ab}h_{ab} = h \; (h \textit{ hodnost tensoru } h_{ab}) , \tag{1,40}$$

a to nezávisle na volbě řešení l^{ab} rovnic (1,16) *a nezávisle na volbě faktoru* (*nenulového*) *tečného vektoru t_ν.*

Důkaz: Pro levou stranu v (1,40) dostaneme vzhledem k (1,31), (1,5)

$$l^{ab}h_{ab} = (\underset{0}{l^{ab}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{n-h-1} \overset{i_1i_2}{g} \underset{(i_1)}{v^a} \underset{(i_2)}{v^b}) h_{ab} = \underset{0}{l^{ab}}h_{ab} ,$$

tedy levá strana v (1,40) nezávisí na volbě řešení l^{ab} rovnic (1,16). Vzhledem k (1,32), (1,27) a definičním vztahům (1,16) dostaneme

$$\underset{a}{l^{ab}h_{ab}} = \sum_{j_1, j_2 = n-h}^{n-1} \underset{0}{l^{a_{j_1} a_{j_2}}} h_{a_{j_1} a_{j_2}} = \sum_{j_2 = n-h}^{n-1} \delta^{a_{j_2}}_{a_{j_2}} = h \, .$$

Tím je dokázána platnost vztahu (1,40) a jeho nezávislost na volbě symetrického řešení l^{ac} rovnic (1,16). Nezávislost vztahu (1,40) na volbě faktoru tečného vektoru plyne bezprostředně z (5) a (1,38).

Definujme nyní jednak elementy $\begin{bmatrix} c \\ ab \end{bmatrix}$ jednak elementy L^c_{ab} takto:

$$\begin{bmatrix} c \\ ab \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} l^{cd}(\partial_a h_{db} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}) \, , \qquad (1,41)_a$$

$$L^c_{ab} \equiv l^{cd} \nabla_d \, t_\nu \nabla_a B^\nu_b \, . \qquad (1,41)_b$$

Lemma 3. *Při regulární transformaci parametrů v* X_{n-1}

$$\bar{\eta}^{\bar{a}} = \bar{\eta}^{\bar{a}}(\eta^a) \qquad (1,42)$$

platí[10])

$$\overline{\begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{a}\bar{b} \end{bmatrix}} = A^{\bar{c}}_c A^a_{\bar{a}} A^b_{\bar{b}} \begin{bmatrix} c \\ ab \end{bmatrix} + \tilde{\delta}^c_b A^{\bar{c}}_c \, \partial_{\bar{a}} A^b_{\bar{b}} \, , \qquad (1,43)_a$$

$$\bar{L}^{\bar{c}}_{\bar{a}\bar{b}} = A^{\bar{c}}_c A^a_{\bar{a}} A^b_{\bar{b}} L^c_{ab} + \tilde{\delta}^c_b A^{\bar{c}}_c \, \partial_{\bar{a}} A^b_{\bar{b}} \, ,\text{[11]}) \qquad (1,43)_b$$

kde

$$\tilde{\delta}^c_b \equiv l^{ca} h_{ab} \, . \qquad (1,44)$$

Transformační vztahy $(1,43)_{a,b}$ se ověří přímým výpočtem. Poznamenejme, že pro tensor $\tilde{\delta}^c_b$, zavedený v (1,44), platí především, jak plyne z definičních rovnic (1,16),

$$\tilde{\delta}^c_{a_j} = \delta^c_{a_j} \quad \left(\delta^c_{a_j} = < \begin{matrix} 0 \text{ pro } c \neq a_j \\ 1 \text{ pro } c = a_j \end{matrix} \right) \quad \begin{matrix} c = 1, \ldots, n-1 \, , \\ j = n-h, \ldots, -1 \, . \end{matrix} \qquad (145)_a$$

Dále je podle (1,13), (1,16)

$$\tilde{\delta}^c_{a_i} \equiv l^{ca} h_{aa_i} = l^{ca} \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\lambda}_{a_i} h_{aa_j} = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_i}{\lambda}_{a_j} \delta^c_{a_j} \, ,$$

tedy

$$\tilde{\delta}^c_{a_i} = < \left. \begin{matrix} \overset{a_j}{\lambda} \text{ pro } c = a_j, \; j = n-h, \ldots, n-1; \\ \overset{a_i}{0} \text{ pro } c = a_i, \; i_1 = 1, \ldots, n-h-1 \end{matrix} \right\} i = 1, \ldots, n-h-1 \, . \qquad (1,45)_b$$

---

10) Jde opět o okolí zkoumaného bodu, tedy o lokální zákonitosti.

11) $$A^a_{\bar{a}} = \frac{\partial \eta^a}{\partial \bar{\eta}^{\bar{a}}} \, , \quad \bar{A}^{\bar{c}}_c = \frac{\partial \bar{\eta}^{\bar{c}}}{\partial \eta^c} \, .$$

Věta 6. *Veličina M_a v X_{n-1} takto definovaná*

$$M_a = \frac{2}{h+2}\left(\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} - L^c_{ac}\right), \quad a = 1, \ldots, n-1 \tag{1,46}$$

má tyto vlastnosti:

a) *Jest kovariantním tensorem v X_{n-1}.*
b) *Je nezávislá na volbě řešení (symetrického) l^{ab} rovnic* (1,16).
c) *Vyjdeme-li místo od vektoru t_ν od vektoru $^*t_\nu$ vázaného s t_ν vztahem* (3),

pak jest

$$^*M_{a_j} = M_{a_j} + P^{-1}\,\partial_{a_j}P, \; j = n-h, \ldots, n-1\,, \tag{1,47$_a$}$$

$$^*M_{a_i} = M_{a_i} + \frac{h}{h+2}P^{-1}\,\partial_{a_i}P + \frac{2}{h+2}\sum_{j=n-h}^{n-1}\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}\,\partial_{a_j}P, \; i = 1, \ldots, n-h-1\,. \tag{1,47$_b$}$$

Důkaz: Z transformačních vztahů $(1,43)_{a,b}$ plyne, že diference $\begin{bmatrix} c \\ ab \end{bmatrix} - L^c_{ac}$ je tensorem v X_{n-1} a tedy kontrahovaná veličina $\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} - L^c_{ac}$ (sčítáno přes c) je vektorem v X_{n-1}. Tím je tvrzení a) věty dokázáno.

Z definičních rovnic $(1,41)_a$, $(1,41)_b$ plyne

$$\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}l^{cd}(\partial_a h_{dc} + \partial_c h_{ad} - \partial_d h_{ac}) = \tfrac{1}{2}l^{cd}\,\partial_a d_{dc}\,,^{12)} \tag{1,48$_a$}$$

$$L^c_{ac} = l^{cd}\,\nabla_d\, t_\nu\, \nabla_a B^\nu_c\,. \tag{1,48$_b$}$$

Podle (1,31) jest

$$\tfrac{1}{2}l^{cd}\,\partial_a h_{cd} = \tfrac{1}{2}(\underset{0}{l^{cd}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{n-h-1}\overset{i_1 i_2}{g}\,\underset{(i_1)}{v^c}\,\underset{(i_2)}{v^d})\,\partial_a h_{dc} = \tfrac{1}{2}\underset{0}{l^{cd}}\,\partial_a h_{dc} + \tfrac{1}{2}\sum_{i_1,i_2=1}^{n-h-1}\overset{i_1 i_2}{g}\,\underset{(i_1)}{v^c}\,\underset{(i_2)}{v^d}\,\partial_a h_{dc}\,.$$

Jest však vzhledem k (1,5)

$$\underset{(i_1)}{v^c}\,\underset{(i_2)}{v^d}\,\partial_a h_{dc} = -h_{dc}\,\partial_a\,\underset{(i_1)}{v^c}\,\underset{(i_2)}{v^d} = -h_{dc}\,\underset{(i_1)}{v^d}\,\partial_a\,\underset{(i_2)}{v^d} - h_{dc}\,\underset{(i_2)}{v^d}\,\partial_a\,\underset{(i_1)}{v^c} = 0\,.$$

Tedy

$$\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\underset{0}{l^{cd}}\,\partial_a h_{dc} \equiv \underset{0}{\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix}}\,. \tag{1,49$_a$}$$

Podobně dostaneme z $(1,48)_b$, (1,31), (4), (1,5) a (1,6)

$$l^{cd}\,\nabla_d\, t_\nu\,\nabla_a B^\nu_c = (\underset{0}{l^{cd}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{n-h-1}\overset{i_1 i_2}{g}\,\underset{(i_1)}{v^c}\,\underset{(i_2)}{v^d})\,\nabla_d\, t_\nu\,\nabla_a B^\nu_c =$$

$$= \underset{0}{l^{cd}}\,\nabla_d\, t_\nu\,\nabla_a B^\nu_c + \sum_{i_1,i_2=1}^{n-h-1}\overset{i_1 i_2}{g}\,\underset{(i_1)}{v^c}(\nabla_a B^\nu_c)\,\underset{(i_2)}{v^d}\,\nabla_d\, t_\nu =$$

---

[12]) Je totiž $l^{cd}\,\partial_c h_{ad} - l^{cd}\,\partial_d h_{ac} = 0$ vzhledem k symetričnosti tensoru l^{ab}.

$$= \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_c + \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n-h-1} \underset{(i_1)}{\overset{i_1 i_2}{g}} v^c \,.\, (\nabla_a B^\nu_c)\, \varrho_{i_2} t_\nu =$$

$$= \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_c + \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n-h-1} \underset{(i_1)}{g} \varrho_{i_2} v^c h_{ac} = \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_b \,;$$

tedy

$$L^c_{ac} = \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_c \equiv \underset{0}{L^c_{ac}} \,. \tag{1,49$_b$}$$

Z $(1{,}49)_{a,b}$ a z definičních vztahů (1,46) plyne ihned tvrzení b) věty. Vezmeme-li místo tečného vektoru t_ν tečný vektor $^*t_\nu = Pt_\nu$ ($P \neq 0$), a označíme-li hvězdičkou vlevo nahoře příslušné veličiny (při této volbě $^*t_\nu$), potom je podle definičních rovnic $(1{,}48)_{a,b}$ a vztahů $(1{,}49)_{a,b}$

$$^*\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\, {}^*l^{cd}\, \partial_a {}^*h_{dc} = \tfrac{1}{2}\, {}^*\underset{0}{l^{cd}}\, \partial_a {}^*h_{dc} \,, \tag{1,50$_a$}$$

$$^*L^c_{ac} = {}^*l^{cd} \nabla_d {}^*t_\nu \nabla_a B^\nu_c = {}^*\underset{0}{l^{cd}} \nabla_d {}^*t_\nu \nabla_a B^\nu_c \,. \tag{1,50$_b$}$$

Pro pravé strany v $(1{,}50)_{a,b}$ plyne pak na základě transformačních rovnic (3), (5), (1,39) a vztahů (1,40), (4), (1,44)

$$\tfrac{1}{2}\, {}^*\underset{0}{l^{cd}}\, \partial_a {}^*h_{dc} = \tfrac{1}{2} Q \underset{0}{l^{cd}}\, \partial_a P h_{dc} = \tfrac{1}{2} \underset{0}{l^{cd}}\, \partial_a h_{dc} + \tfrac{1}{2} h P^{-1} \partial_a P \,, \tag{1,51$_a$}$$

$$^*\underset{0}{l^{cd}} \nabla_a {}^*t_\nu \nabla_a B^\nu_c = Q \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d (Pt_\nu) \nabla_a B^\nu_c = \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_c - P^{-1} \underset{0}{l^{cd}} h_{ac}\, \partial_d P =$$

$$= \underset{0}{l^{cd}} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_c - P^{-1} \tilde{\delta}^d_a\, \partial_d P \,. \tag{1,51$_b$}$$

Z $(1{,}50)_{a,b}$, $(1{,}51)_{a,b}$, $(1{,}49)_{a,b}$ a definičních rovnic (1,46) dostaneme pro volbu indexu $a = a_j$, $j = n - h, \ldots, n - 1$, — použijeme-li ještě relace $(1{,}45)_a$ —

$$^*M_{a_j} \equiv \frac{2}{h+2} \left({}^*\begin{bmatrix} c \\ a_j c \end{bmatrix} - {}^*L^c_{a_j c} \right) = M_{a_j} + \frac{2}{h+2} \left(\frac{h}{2} + 1 \right) P^{-1}\, \partial_{a_j} P \,,$$

což po úpravě dává vztah $(1{,}47)_a$.

Pro volbu indexu $a = a_i$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ dostaneme z definičních rovnic (1,46) s přihlédnutím ke vztahům $(1{,}50)_{a,b}$, $(1{,}51)_{a,b}$, $(1{,}49)_{a,b}$, $(1{,}45)_b$

$$^*M_{a_i} = \frac{2}{h+2} \left({}^*\begin{bmatrix} c \\ a_i c \end{bmatrix} - {}^*L^c_{a_i c} \right) =$$

$$= M_{a_i} + \left(\frac{h}{2} P^{-1}\, \partial_{a_i} P + P^{-1} \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}\, \partial_{a_j} P \right) \frac{2}{h+2} \,,$$

odkud úpravou plyne vztah $(1{,}47)_b$.

Ke konci tohoto paragrafu připojme ještě jednu poznámku, užitečnou hlavně pro praktický výpočet:

Poznámka 6. V definičních rovnicích (1,46) můžeme, jak z tvrzení b) věty 6 vyplývá, psát místo symbolů $\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix}$, L^c_{ac} přímo symboly $\underset{0}{\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix}}$, $\underset{0}{L^c_{ac}}$ (viz $(1{,}49)_{a,b}$).

Tedy můžeme definovat přímo

$$M_a = \frac{2}{h+2}\left(\begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix}_0 - \underset{0}{L^c_{ac}}\right). \tag{1,52}$$

Složek M_{a_j} ($j = n - h, \ldots, n - 1$) vektoru M_a v X_{n-1} použijeme vhodně v dalším paragrafu při definici afinnormálního vektoru a konexe tímto vektorem indukované v X_{n-1}.

§ 2. Definice afinnormálního vektoru v případě $1 \leq h < n - 1$

V celém paragrafu budeme předpokládat, že pro hodnost h tensoru h_{ab} variety X_{n-1} platí v uvažovaném oboru

$$1 \leq h < n - 1 . \tag{2,1}$$

Za tohoto předpokladu definujeme při pevně zvoleném tečném vektoru t_ν variety X_{n-1} afinnormální vektor n^ν rovnicemi

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ n^\nu t_\nu = 1,\\
&\text{b)}\ n^\nu \nabla_{a_j} t_\nu = M_{a_j},\ j = n - h, \ldots, n - 1,\\
&\text{c)}\ n^\nu \nabla_{a_i} t_\nu = \sum_{j=n-h}^{n-1} \underset{a_i}{\overset{a_j}{\lambda}} M_{a_j} + u_{a_i},\ i = 1, \ldots, n - h - 1,
\end{aligned} \tag{2,2}$$

kde veličiny $\underset{a_i}{\overset{a_j}{\lambda}}, u_{a_i}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$; $j = n - h, \ldots, n - 1$ mají týž význam jako v rovnicích (1,7).

Především je třeba podotknout, že systém rovnic (2,2) pro neznámé u^ν ($\nu = 1, \ldots, n$), je řešitelný. Je-li totiž h hodnost tensoru h_{ab} (kde h je přirozené číslo, pro něž platí (2,1)), potom v determinantu $[\nabla_1 t_\nu, \nabla_2 t_\nu, \ldots, \nabla_{n-1} t_\nu, t_\nu]$ je $h + 1$ lineárně nezávislých řádků, jeden řádek z nich je tvořen složkami tečného vektoru t_ν, ostatní lineárně nezávislé řádky jsou pak ve smyslu dřívějšího označení $\nabla_{a_j} t_\nu$, $j = n - h, \ldots, n - 1$. Zbývající řádky, které jsme označili $\nabla_{a_i} t_\nu$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$, jsou pak lineární kombinací řádků a_j-tých (viz (1,7)).

Řešitelnost soustavy (2,2) plyne pak z toho, že hodnost matice determinantů soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy jsou stejné, jak je zřejmé z (1,7) a pravých stran v (2,2).

Při řešení systému (2,2) stačí se tedy omezit na řešení rovnic

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ n^\nu t_\nu = 1,\\
&\text{b)}\ n^\nu \nabla_{a_j} t_\nu = M_{a_j},\ j = n - h, \ldots, n - 1.
\end{aligned} \tag{2,3}$$

Potom všechna řešení rovnic (2,2) jsou řešeními rovnic (2,3) a obráceně.

Věta 7. *Je-li při pevně zvoleném tečném vektoru t_ν, $\underset{1}{n^\nu}$ jedno z řešení rovnic (2,2), potom každé řešení n^ν rovnic (2,2) je tvaru:*

$$n^\nu = \underset{1}{n^\nu} + B^\nu_c v^c , \tag{2,4}$$

kde v^c je vektorem v X_{n-1}, pro nějž platí

$$v^c h_{cb} = 0, \; b = 1, \ldots, n \,. \tag{2,5}$$

Důkaz: Budiž (při pevně zvoleném t_ν) $\underset{1}{n}^\nu$ řešením rovnic (2,2) a n^ν jiné řešení těchto rovnic. Poněvadž je determinant $[B^\nu_1 B^\nu_2 \ldots B^\nu_{n-1}, \underset{1}{n}^\nu] \neq 0$, můžeme psát n^ν jako lineární kombinaci vektorů $\underset{1}{n}^\nu$, B^ν_a, $a = 1, \ldots, n - 1$, tedy ve tvaru

$$n^\nu = a\underset{1}{n}^\nu + B^\nu_c v^c \,. \tag{2,6}$$

Poněvadž podle předpokladu je n^ν řešením rovnic (2,2), dostaneme — dosadíme-li z (2,6) do $(2,2)_b$ a přihlédneme-li k (2) — $a = 1$. Tedy n^ν je tvaru (2,4). Dosadíme-li z (2,4) do $(2,2)_b$ dostaneme

$$n^\nu \nabla_{a_j} t_\nu = (\underset{1}{n}^\nu + B^\nu_c v^c) \nabla_{a_j} t_\nu = M_{a_j} \,,$$

což, vzhledem k tomu, že pro $\underset{1}{n}^\nu$ platí $(2,2)_b$, vede k podmínce $v^c B^\nu_c \nabla_{a_j} t_\nu = 0$ a tedy — podle (4) — k podmínce $h_{ca_j} = 0$ pro $j = n - h, \ldots, n - 1$. Analogicky dojdeme k podmínce $v^c h_{ca_i} = 0$ pro $i = 1, \ldots, n - h - 1$ (dosadíme-li z (2,4) do $(2,2)_c$). Tím je věta dokázána.

Věta 8. *Vyjdeme-li místo od shora uvažovaného tečného vektoru t_ν od vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$ $(P \neq 0)$, potom všechna řešení rovnic*[13])

a) $^*n^\nu \, ^*t_\nu = 1$,

b) $^*n^\nu \nabla_{a_j} {}^*t_\nu = {}^*M_{a_j}$, $j = n - h - 1, \ldots, n - 1$, (2,6)

c) $^*n^\nu \nabla_{a_i} {}^*t_\nu = \sum\limits_{j=n-h}^{n-1} {}^*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} {}^*M_{a_j} + {}^*u_{a_i}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$,

jsou tvaru

$$^*n^\nu = Qn^\nu \quad (Q \equiv P^{-1}) \tag{2,7}$$

kde n^ν jsou řešeními rovnic (2,2).

Důkaz: Z rovnice $(2,6)_a$ a vztahu (3) plyne ihned, že $^*n^\nu$ je tvaru

$$^*n^\nu = Q(\underset{1}{n}^\nu + B^\nu_c w^c) \,,\text{[14])} \tag{2,8}$$

kde w^c je nějaký vektor v X_{n-1}. Dosadíme-li do $(2,6)_b$ za $^*n^\nu$, $^*t_\nu$, $^*M_{a_j}$ z transformačních vztahů (2,8), (1,3), $(1,47)_a$ dostaneme

$$Q(\underset{1}{n}^\nu + B^\nu_c w^c) \nabla_{a_j} P t_\nu = M_{a_j} + P^{-1} \, \partial_{a_j} P, \; (Q = P^{-1}) \,,$$

t. j. po úpravě (vzhledem k (2), (4), $(2,2)_a$)

$$\underset{1}{n}^\nu \nabla_{a_j} t_\nu + P^{-1} \, \partial_{a_j} P + w^c h_{ca_j} = M_{a_j} + P^{-1} \, \partial_{a_j} P$$

a tedy použijeme-li $(2,2)_b$,

$$w^c h_{ca_j} = 0 \text{ pro } j = n - h, \ldots, n - 1 \,. \tag{2,9$_a$}$$

[13]) Symbolem * označujeme veličiny vztažené k vektoru $^*t_\nu$.

[14]) $\underset{1}{n}$ je nějaké řešení rovnic (2,2).

Dosadíme-li do $(2,6)_c$ za $*t_\nu$, $*n^\nu$, $*M_{a_j}$, $*\overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}}$, $*u_{a_i}$ z transformačních vztahů (1,3) (2,8), $(1,47)_a$, $(1,15)_{a,b}$, dostaneme

$$Q(\underset{1}{n^\nu} + B^\nu_c w^c)(P \nabla_{a_i} t_\nu + t_\nu \partial_{a_i} P) =$$

$$= \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} (M_{a_j} + P^{-1} \partial_{a_j} P) + u_{a_i} - \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a}{\lambda}} P^{-1} \partial_{a_j} P + P^{-1} \partial_{a_i} P \,.$$

Odtud dostaneme po úpravě vzhledem k (2), (4)

$$\underset{1}{n^\nu} \nabla_{a_i} t_\nu + w^c h_{ca_i} = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} M_{a_j} + u_{a_i}$$

a tedy vzhledem k $(2,2)_c$

$$w^c h_{ca_i} = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, n - h - 1 \,. \tag{$(2,9)_b$}$$

Tedy, jak plyne z $(2,9)_{a,b}$, vektor w^c vyhovuje vztahům (2,5) z věty 7. Odtud a z (2,8), (2,4), plyne pak tvrzení věty.

Nyní vyslovme tuto důležitou větu:

Věta 9. *Nechť v daném afinním prostoru A_n $(n > 2)$ existuje regulární nadplocha X_{n-1} té vlastnosti, že v každém bodě uvažovaného oboru platí pro hodnost h tensoru h_{ab}: $1 \leq h < n - 1$.*

Označíme-li $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, 2, \ldots, n - h - 1$ libovolná lineárně nezávislá řešení rovnic

$$v^a h_{ab} = 0, \; b = 1, \ldots, n - 1 \,, \tag{(2,10)}$$

potom $(n - h)$-vektor o složkách

$$\underset{(1)}{v}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{v}^{\alpha_2} \ldots \underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}} n^{\alpha_{n-h}]} \,, \quad \underset{(i)}{v^\alpha} \equiv B^\alpha_a \underset{(i)}{v^a} \,, \tag{(2,11)}$$

kde n^ν je libovolné řešení rovnic (2,2), definuje v každém bodě variety X_{n-1} určitý $(n - h)$-směr, který má tyto vlastnosti:

a) *je nezávislý na volbě lineárně nezávislých řešení $\underset{(i)}{v^a}$ $(i = 1, \ldots, n - h - 1)$ rovnic (2,10);*

b) *je nezávislý na volbě řešení n^α rovnic (2,2);*

c) *je nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru t_ν variety X_{n-1}.*

Důkaz: Nechť $\underset{1}{n^\nu}$ je nějaké řešení rovnic (2,2); nechť $\underset{(i)}{v^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnic (2,10) a $\underset{(i)}{w^a}$, $i = 1, \ldots, n - h - 1$ jiný takový systém lineárně nezávislých řešení rovnic (2,10). Potom v každém bodě uvažovaného oboru variety X_{n-1} existují čísla $\overset{k}{\underset{i}{r}}$ $(i, k = 1, \ldots, n - h - 1)$ tak, že je

$$\underset{(i)}{w^a} = \sum_{k=1}^{n-h-1} \overset{k}{\underset{i}{r}} \underset{(k)}{v^a}, \; i = 1, \ldots, n - h - 1 \,, \tag{$(2,12)_a$}$$

při čemž je

$$determinant\ [\overset{k}{\underset{i}{r}}] = (n-h-1)!\, \overset{1}{r}{}_{[1}\overset{2}{r}{}_{2}\dots\overset{n-h-1}{r}{}_{n-h-1]} \neq 0\,.^{15)} \tag{2,12$_b$}$$

Definujeme-li $\underset{(i)}{w}^{\alpha} \equiv B^{\alpha}_{a}\underset{(i)}{w}^{a}$, pak $(2,12)_a$ můžeme přepsat na tvar

$$\underset{(i)}{w}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n-h-1} \overset{k}{\underset{i}{r}}\, \underset{(k)}{v}^{\alpha}, \quad \underset{(i)}{v}^{\alpha} \equiv B^{\alpha}_{a}\underset{(i)}{v}^{a}\,.$$

Odtud dostaneme

$$\underset{(1)}{w}^{[\alpha_1}\underset{(2)}{w}^{\alpha_2}\dots\underset{(n-h-1)}{w}^{\alpha_{n-h-1}}\underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]} = \sum \overset{k_1}{\underset{1}{r}}\,\overset{k_2}{\underset{2}{r}}\dots\overset{k_{n-h-1}}{\underset{n-h-1}{r}}\,\underset{(k_1)}{v}^{[\alpha_1}\underset{(k_2)}{v}^{\alpha_2}\dots\underset{(k_{n-h-1})}{v}^{\alpha_{n-h-1}}\underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]} =$$

$$= \underset{(1)}{v}^{[\alpha_1}\underset{(2)}{v}^{\alpha_2}\dots\underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}}\underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]}\sum(-1)^{p}\,\overset{k_1}{\underset{1}{r}}\,\overset{k_2}{\underset{2}{r}}\dots\overset{k_{n-h-1}}{\underset{n-h-1}{r}}\,,$$

kde ve vypsaném sumačním symbolu sčítáme přes všechny možné permutace čísel $k_1, \dots, k_{n-h-1} = 1, \dots, n-h-1$. Symbol p značí pak třídu příslušné permutace. Jak z předchozích rovnic vyplývá, můžeme psát

$$\underset{(1)}{w}^{[\alpha_1}\underset{(2)}{w}^{\alpha_2}\dots\underset{(n-h-1)}{w}^{\alpha_{n-h-1}}\underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]} = D\,.\,\underset{(1)}{v}^{[\alpha_1}\underset{(2)}{v}^{\alpha_2}\dots\underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}}\underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]}\,,$$

kde D je skalár v X_{n-1}, totiž determinant z $(2,12)_b$. Z předchozích vztahů vysvítá ihned platnost tvrzení a) věty 9.

Důkaz tvrzení b) věty 9 je velmi snadný. Je-li totiž n^{ν} řešením rovnic (2,2) různým od dříve uvažovaného řešení $\underset{1}{n}^{\nu}$ rovnic (2,2), potom můžeme na základě rovnic (2,4) z věty 7 psát

$$\underset{1}{v}^{[\alpha_1}\underset{2}{v}^{\alpha_2}\dots\underset{n-h-1}{v}^{\alpha_{n-h-1}}n^{\alpha_{n-h}]} =$$

$$= \underset{(1)}{v}^{[\alpha_1}\underset{(2)}{v}^{\alpha_2}\dots\underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}}\underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]} + \underset{1}{v}^{[\alpha_1}\underset{2}{v}^{\alpha_2}\dots\underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}}B^{\alpha_{n-h}]}_{a}v^{a}\,, \tag{2,13}$$

kde vektor v^a vyhovuje rovnicím (2,5). Vektor v^a můžeme tedy psát jako lineární kombinaci vektorů $\underset{(i)}{v}^{a}$, $i = 1, \dots, n-h-1$ a tedy vektor $v^{\alpha} \equiv B^{\alpha}_{a}v^{a}$ jako lineární kombinaci vektorů $\underset{(i)}{v}^{\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, n-h-1$. Odtud plyne však, že druhý sčítanec na pravé straně ve vztazích (2,13) je roven nule.

Platí tedy:

$$\underset{(1)}{v}^{[\alpha_1}\underset{(2)}{v}^{\alpha_2}\dots\underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}}n^{\alpha_{n-h}]} = \underset{(1)}{v}^{[\alpha_1}\underset{(2)}{v}^{\alpha_2}\dots\underset{(n-h-1)}{v}^{\alpha_{n-h-1}}\underset{1}{n}^{\alpha_{n-h}]}\,,$$

čímž je tvrzení b) ověřeno.

Nechť systém lineárně nezávislých vektorů $\underset{(i)}{v}^{a}$, $i = 1, \dots, n-h-1$ vyhovuje rovnicích (2,10). Vyjdeme-li nyní místo od tečného vektoru t_{ν} od tečného vektoru $^{*}t_{\nu} = Pt_{\nu}$, $P \neq 0$, potom je též $\underset{(i)}{v}^{a}\,{}^{*}h_{ab} = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n-h-1$, jak je zřejmé z (5). Můžeme tedy prohlásit vektory $\underset{(i)}{v}^{a}$ za nezávislé na transformačních vztazích (3). Odtud a z věty 8, rovnic (2,7) plyne pak:

15) To plyne z předpokladu lineární nezávislosti vektorů $\underset{(i)}{w}^{a}$, $i = 1, \dots, n-h-1$.

$$
\underset{(1)}{{}^*v}{}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{{}^*v}{}^{\alpha_2} \dots \underset{(n-h-1)}{{}^*v}{}^{\alpha_{n-h-1}}\, {}^*\eta^{\alpha_{n-h}]} = \underset{(1)}{v}{}^{[\alpha_1} \underset{(2)}{v}{}^{\alpha_2} \dots \underset{(n-h-1)}{v}{}^{\alpha_{n-h-1}} \eta^{\alpha_{n-h}]}\, Q\,,
$$

kde $Q = P^{-1}$. Je tedy i tvrzení c) věty správné. Tím je celá věta 9 dokázána.

Definice 1. *Privilegovaný $(n - h)$-směr z věty 9 budeme nazývat invariantním afinnormálním $(n - h)$-směrem variety X_{n-1}.*

Poznámka 7. Nyní je zřejmé, proč jsme v definičních rovnicích (2,2) pro vektor n^ν volili pravé strany poměrně složitě. Účelem bylo totiž zajistit invarianci $(n - h)$-směru z věty 9 vzhledem k transformaci tečného vektoru t_ν. A k tomu bylo třeba volit pravé strany v (2,2) tak, aby veličiny na těchto stranách měly takové vlastnosti při změně faktoru tečného vektoru jako mají právě zvolené veličiny M_{a_j}. Naše definice veličin M_{a_j} není náhodná. Je naprosto analogická veličinám symbolicky stejně označeným v dřívější práci, kdy šlo o afinnormální vektor variety X_{n-1} v A_n s předpokladem, že hodnost tensoru h_{ab} je $n - 1$.[16])

Poznámka 8. Hořením postupem — a to se dalo čekat — nedospěli jsme k jednoznačné definici afinnormálního vektoru pro varietu X_{n-1}, pro jejíž tensor h_{ab} platí (2,1). Za afinnormální vektor variety X_{n-1} můžeme vzít kterékoliv řešení n^ν rovnic (2,2). Kdybychom chtěli dosáhnout jednoznačnosti, t. j. definovat směr vektoru n^ν v A_n jednoznačně, pak bychom museli k podmínkám (2,2) přidat dalších $n - h - 1$ podmínek, které by nebyly ve sporu se vztahy (2,2), nebyly jejich důsledkem a také aby jedna z druhé neplynuly.

Hořením postupem jsme získali určitou třídu afinnormálních směrů, která jako celek nezávisí na volbě faktoru tečného vektoru t_ν. K této třídě afinnormálních směrů lze nyní konstruovat určitou třídu konexí v X_{n-1}.

Budiž n^ν nějaké řešení rovnic (2,2). Definujeme veličiny $\underset{1}{B}{}^a_\nu$ takto[17])

$$
\underset{1}{B}{}^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b \quad \left(\delta^a_b = \begin{cases} 1 & \text{pro } a = b \\ 0 & \text{pro } a \neq b \end{cases}\right), \tag{2,14}
$$
$$
\underset{1}{B}{}^a_\nu \underset{1}{n}{}^\nu = 0 .
$$

Snadno nahlédneme, že systém rovnic (2,14) má jednoznačné řešení pro elementy $\underset{1}{B}{}^a_\nu$.[17])

Lemma 4. *Elementy $\underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab}$ takto definované*

$$
\underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab} \equiv B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b \tag{2,15}
$$

definují v X_{n-1} konexi.[18])

[16]) (I), str. 192, rovnice $(4,5)a$ a str. 195, rovnice $(4,12)_a$ a strana 197, rovnice (5,4).
[17]) (I), str. 182, rovnice (2,2).
[18]) Konexe ve smyslu afinní indukce (*Nožička*, La connexion et la normale de l'hypersurface dans l'espace riemannienne du point de vue de la géometrie affine, Czechoslovak mathematical Journal, vol. *1* (*76*), 1951, strana 20 (12).

Důkaz se provede poukazem na transformační zákonitost při regulární transformaci parametrů v X_{n-1}. Zde (pro jeho jednoduchost) není podán.

Definice 2. *Konexi o koeficientech definovaných v* (2,15) *nazýváme konexí indukovanou afinnormálním vektorem* n^ν *v* X_{n-1}.

Vezmeme-li nyní řešení n^ν rovnic (2,2) různé od řešení $\underset{1}{n}^\nu$, potom platí podle (2,4)

$$n^\nu = \underset{1}{n}^\nu + B^\nu_c v^c\,,$$

kde v^c vyhovuje rovnicím (2,5). Zavedeme-li elementy B^a_ν definicí analogickou definici elementů $\underset{1}{B}{}^a_\nu$, tedy

$$B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b,\ B^a_\nu n^\nu = 0\,,$$

potom platí mezi elementy B^a_ν, $\underset{1}{B}{}^a_\nu$ vztahy

$$B^a_\nu = \underset{1}{B}{}^a_\nu - v^a t_\nu\,. \tag{2,16}$$

Relace (2,16) se snadno ověří na základě definičních vztahů pro elementy B^a_ν, B^a_ν.[19])

Pro konexi indukovanou vektorem n^ν dostaneme na základě (2,16), (2,15)

$$\Gamma^c_{ab} \equiv B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = (\underset{1}{B}{}^c_\nu - v^c t_\nu) \nabla_a B^\nu_b = \underset{1}{\Gamma}{}^c_{ac} - v^c t_\nu \nabla_a B^\nu_b\,,$$

a tedy vzhledem k (4)

$$\Gamma^c_{ab} = \underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab} v^c\,. \tag{2,17}$$

Věta 10. *Třída afinnormálních vektorů variety* X_{n-1} *representovaná všemi řešeními* n^ν *rovnic* (2,2) *vede k třídě konexí indukovaných v* X_{n-1} *o koeficientech tvaru* (2,17), *kde* $\underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab}$ *je jedna z konexí této třídy a vektor* v^c *vyhovuje rovnicím* (2,5). *Ke každé konexi třídy* (2,17) *existuje jednoznačně vektor afinnormální* n^ν (*jenž je řešením rovnic* (2,2)), *který ji indukuje. Toto přiřazení konexe a afinnormálního vektoru je vzájemně jednoznačné. Uvažovaná třída indukovaných konexí je nezávislá na volbě faktoru tečného vektoru* t_ν.[20])

Část tvrzení věty byla dokázána v úvahách větě předcházejících; zbývá ověřit vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi třídou afinnormálních vektorů a třídou indukovaných konexí a dále invarianci třídy konexí vzhledem k transformaci tečného vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$.

Že vektoru n^ν, jenž je zvoleným řešením rovnic (2,2), je přiřazena konexe jím indukovaná jednoznačně, plyne ihned z definičních rovnic pro koeficienty konexe $\Gamma^c_{ab} \equiv B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b$, kde B^c_ν jsou jednoznačně svými definičními rovnicemi určeny. Budiž nyní dána konexe o koeficientech tvaru (2,17) s pevně zvoleným

[19]) Viz na př. práci citovanou v [14]), str. 24, 25, kde je analogický postup.

[20]) T. j. nezávislá v tom smyslu, že — vyjdeme-li místo od tečného vektoru t_ν od vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$, a tedy místo od vektoru n^ν od vektoru $^*n^\nu$ — dostaneme opět konexi třídy (2,17).

vektorem v^c vyhovujícím rovnicím (2,5). Potom vektor $n^\nu = \underset{1}{n^\nu} + B^\nu_c v^c$ indukuje tuto konexi. Kdyby existovalo jiné řešení $\bar{n}^\nu$ rovnic (2,2) indukující danou konexi ($\bar{n}^\nu \neq n^\nu$), potom by bylo $n^\nu + B^\nu_c \bar{v}^c = \bar{n}^\nu$, $\bar{v}^c \neq v^c$. Konexe $\overline{\Gamma}^c_{ab}$ indukovaná vektorem $\bar{n}^\nu$ je pak, podle (2,17)

$$\overline{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} + h_{ab}\bar{v}_c \,.$$

Rovnost $\overline{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}$ by implikovala $v^c = \bar{v}^c$, což je spor s předpokladem. Existuje tedy k dané konexi z třídy (2,17) afinnormální vektor n^ν ji indukující (jenž je řešením rovnic (2,2)) jednoznačně.

Vyjdeme-li nyní místo od tečného vektoru t_ν od tečného vektoru $*t_\nu = Pt_\nu$ ($P \neq 0$), potom všechna řešení rovnic (2,6) pro afinnormální vektor $*n^\nu$ jsou (podle věty 8, rovnic (2,7)) tvaru:

$$*n^\nu = Qn^\nu \,,$$

kde n^ν jsou řešeními rovnic (2,2). Definujeme-li veličiny $*B^a_\nu$ rovnicemi $*B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b$, $*B^a_\nu *n^\nu = 0$, potom mezi veličinami $*B^a_\nu$, B^a_ν [21]) platí vztah

$$*B^a_\nu = B^a_\nu \text{ [22])}$$

a tedy $*\Gamma^c_{ab} = *B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = \Gamma^c_{ab}$, čímž je poslední tvrzení věty dokázáno.

Položme si nyní otázku po definici a to jednoznačné, afinnormálního vektoru, který je z třídy shora uvažovaných afinnormálních vektorů. K tomu účelu definujeme kovariantní vektor m_a v X_{n-1} takto

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad m_{a_j} = M_{a_j}, \; j = n - h, \ldots, n - 1, \\ &\text{(b)} \qquad m_{a_i} = \sum_{j=n-h}^{n-1} \overset{a_j}{\underset{a_i}{\lambda}} M_{a_j} + u_{a_i}, \; i = 1, \ldots, n - h - 1. \end{aligned} \tag{2,18}$$

Vektor m_a definovaný v (2,18) představuje tedy pravé strany definičních rovnic $(2,2)_{b,c}$ pro vektor n^ν.

Lemma 5. *Vyjdeme-li místo od tečného vektoru t_ν od vektoru $*t_\nu = Pt_\nu$ ($P \neq 0$), potom platí*

$$*m_a = m_a + P^{-1}\,\partial_a P \,. \tag{2,19}$$

Správnost tohoto tvrzení byla ověřena pro $a = a_j$ ($j = n - h, \ldots, n - 1$) větou 6, vztahem $(1,47)_a$. Platnost vztahu (2,19) pro $a = a_i$ ($i = 1, \ldots, n - h - 1$) se snadno ověří z transformačních vztahů $(1,15)_{a,b}$, $(1,47)_a$.

Věta 11. *Definujme při pevně zvoleném tečném vektoru t_ν vektor $\underset{0}{n^\nu}$ takto:*

$$\underset{0}{n^\nu} \equiv \frac{1}{h} \underset{0}{l^{ab}}\{B^\nu_c \underset{0}{l^{cd}}(\nabla_d t_\alpha \nabla_a B^\alpha_b + h_{ab} m_d) - \nabla_a B^\nu_b\} \,. \tag{2,20}$$

Potom vektor $\underset{0}{n^\nu}$ je řešením rovnic (2,2) a jeho směr je nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru t_ν.

---

[21]) B^a_ν jsou definovány rovnicemi $B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b$, $B^a_\nu = n^\nu = 0$.

[22]) Můžeme totiž psát $*B^a_\nu$ jako lineární kombinaci veličin B^a_ν, t_ν, t. j. $*B^a_\nu = B^c_\nu T^a_c + r^a t_\nu$ odkud se dá odvodit $T^a_c = \delta^a_c$, $r^a = 0$.

Důkaz: Dokážeme, že vektor $\underset{0}{n}^\nu$ vyhovuje rovnicím (2,2). Je především, vzhledem k (2), (4), (1,40)

$$\underset{0}{n}^\nu t_\nu = -\frac{1}{h}\underset{0}{l}^{ab} t_\nu \nabla_a B_b^\nu = \frac{1}{h}\underset{0}{l}^{ab} h_{ab} = 1\,;$$

tedy vztah $(2,2\text{a})_a$ je splněn. Dále dostaneme z (2,20) s ohledem na vztahy (4) (1,44), (1,40), $(1,45)_a$

$$\underset{0}{n}^\nu \nabla_{a_j} t_\nu = \frac{1}{h}\underset{0}{l}^{ab}\{h_{ca_j}\underset{0}{l}^{cd}\nabla_d t_\alpha \nabla_a B_b^\alpha + h_{ca_j}\underset{0}{l}^{cd} h_{ab} m_d - \nabla_{a_j} t_\nu \nabla_a B_b^\nu\} =$$

$$= \frac{1}{h}\underset{0}{l}^{ab}\{\delta_{a_j}^d \nabla_d t_\alpha \nabla_a B_b^\alpha + \delta_{a_j}^d h_{ab} m_d - \nabla_{a_j} t_\nu \nabla_a B_b^\nu\} = \frac{1}{h}\underset{0}{l}^{ab} h_{ab} m_{a_j} = m_{a_j}$$

pro $j = n - h, \ldots, n - 1$. Je tedy též podmínka $(2,2)_b$ splněna. Podmínku $(2,2)_c$ si nemusíme již ověřovat, neboť, jak bylo na počátku tohoto paragrafu řečeno, jsou všechna řešení rovnic $(2,2)_{a,b}$ řešeními rovnic $(2,2)_{a,b,c}$ a obráceně. Tedy $\underset{0}{n}^\nu$ je řešením rovnic (2,2).

Vyjdeme-li nyní na místo od tečného vektoru t_ν od tečného vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$ $P \neq 0$), potom dostaneme z definičních rovnic (2,20), přihlédneme-li ke vztahům (1,39), (5), (3), (2,19), (4)

$$\underset{0}{{}^*n}^\nu \equiv \frac{1}{h}\,{}^*\underset{0}{l}^{ab}\{B_c^\nu\,{}^*\underset{0}{l}^{cd}(\nabla_d {}^*t_\alpha \nabla_a B_b^\alpha + {}^*h_{ab}{}^*m_d) - \nabla_a B_b^\nu\} =$$

$$= \frac{1}{h}\,Q\underset{0}{l}^{ab}\{B_c^\nu \underset{0}{l}^{cd} Q(\nabla_d Pt_\alpha \nabla_a B_b^\alpha + Ph_{ab}[m_d + P^{-1}\,\partial_d P]) - \nabla_a B_b^\nu\} =$$

$$= Q\left[\frac{1}{h}\underset{0}{l}^{ab}\{B_c^\nu \underset{0}{l}^{cd}(\nabla_d t_\alpha \nabla_a B_b^\alpha + h_{ab} m_d) - \nabla_a B_b^\nu\right] +$$

$$+ \frac{1}{h}\,Q^2 \underset{0}{l}^{ab}\underset{0}{l}^{cd} B_c^\nu t_\alpha \nabla_a B_b^\alpha\,\partial_d P + \tfrac{1}{2} Q\underset{0}{l}^{ab}\underset{0}{l}^{cd} h_{ab} B_c^\nu P^{-1}\,\partial_d P =$$

$$= Q\underset{0}{n}^\nu - \frac{1}{h}\,Q\underset{0}{l}^{ab}\underset{0}{l}^{cd} B_c^\nu(-P^{-1}\,\partial_d P + P^{-1}\,\partial_d P) = Q\underset{0}{n}^\nu\,.$$

Odtud je zbývající tvrzení věty zřejmé.

Věta 12. *Konexe indukovaná vektorem $\underset{0}{n}^\nu$ v X_{n-1} o koeficientech*

$$\underset{0}{\Lambda}{}_{ab}^c \equiv \underset{0}{B}{}_\nu^c \nabla_a B_b^\nu\,, \tag{2,21}$$

kde elementy $\underset{0}{B}{}_\nu^c$ jsou definovány rovnicemi

$$\begin{aligned} &\underset{0}{B}{}_\nu^a B_b^\nu = \delta_b^a\,, \quad \left(\delta_b^a = \begin{cases} 1 \text{ pro } a = b \\ 0 \text{ pro } a \neq b \end{cases}\right)^{23)} \\ &\underset{0}{B}{}_\nu^a n^\nu = 0\,, \end{aligned} \tag{2,22}$$

je nezávislá na volbě faktoru tečného vektoru t_ν.

---

[23]) Veličiny $\underset{0}{B}{}_\nu^a$ jsou rovnicemi (2,22) definovány jednoznačně.

Důkaz: Podle věty 11 platí při volbě $^*t_\nu = Pt_\nu$ $(P \neq 0)$

$$^*\underset{0}{n}^\nu = Q\underset{0}{n}^\nu, \; Q \equiv P^{-1} . \tag{2,23}$$

Zavedeme-li elementy $^*B^a_\nu$ jednoznačně definičními rovnicemi $^*B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b$, $^*B^a_\nu {}^*n^\nu = 0$, potom si snadno ověříme vztah $^*B^a_\nu = B^a_\nu$.[24]) Odtud plyne pak ihned

$$^*\underset{0}{\Lambda}{}^c_{ab} \equiv {}^*\underset{0}{B}{}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = \underset{0}{B}{}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = \Lambda^c_{ab} ,$$

čímž je věta dokázána.

Poznámka 9. Větou 11 a 12 byla zodpověděna otázka jednoznačné definice afinnormálního vektoru o směru nezávislém na volbě faktoru tečného vektoru a konexe nezávislé na této volbě.

V dalším paragrafu obrátíme se k dosud opomíjenému případu, kdy pro tensor h_{ab} variety X_{n-1} v A_n platí v celém jejím definičním oboru $h_{ab} \equiv 0$.

§ 3. Případ totálně geodetických variet X_{n-1} v A_n

Existuje-li v daném afinním prostoru A_n $(n - 1)$-rozměrná variety X_{n-1}, pro niž platí

$$h_{ab} \equiv 0 \tag{3,1}$$

v jejím definičním oboru, pak tuto varietu nazýváme *totálně geodetickou nadplochou* v A_n. V dalším budeme existenci takovéto nadplochy X_{n-1} v A_n předpokládat.

Za platnosti předpokladu (3,1) existuje v X_{n-1} vektor u_b tak, že platí (1,3), t. j.

$$\nabla_b t_\nu = u_b t_\nu, \; b = 1, \ldots, n-1 \tag{3,2}$$

v každém uvažovaném bodě variety X_{n-1}.

Lemma 6. *Pro vektor u_b z (1,3) platí při transformaci (3) tečného vektoru t_ν,*

$$^*u_b = u_b + P^{-1}\, \partial_b P, \; b = 1, \ldots, n-1 . \tag{3,3}$$

Důkaz: Poněvadž vztah (3,2) je nezávislý na tom, jaké řešení t_ν rovnic $B^\nu_a t_\nu = 0$ si zvolíme (což plyne z toho, že hodnost tensoru h_{ab} je nezávislá na transformaci (3)), platí též

$$\nabla_b {}^*t_\nu = {}^*u_b {}^*t_\nu$$

a tedy, vzhledem k (3)

$$P \nabla_b t_\nu + t_\nu\, \partial_b P = {}^*u_b P t_\nu .$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za $\nabla_b t_\nu$ z (3,2), dostaneme po úpravě

$$(u_b + P\, \partial_b P^{-1} - {}^*u_b)\, t = 0 ,$$

což, vzhledem k tomu, že t_ν je nenulový vektor, vede ihned k (3,3).

Definujme nyní, při pevně zvoleném tečném vektoru t_ν, vektor n^ν rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad n^\nu t_\nu = 0, \\ &\text{b)} \quad n^\nu \nabla_a t_\nu = u_a, \; a = 1, \ldots, n-1 . \end{aligned}\right\} \tag{3,4}$$

[24]) Viz poznámku [22]).

Z (3,2) plyne, že hodnost matice determinantu soustavy (3,4) a rozšířené matice soustavy (3,4) jsou stejné a to rovny jedné. Všechna řešení n^ν soustavy rovnic (3,4) dostaneme tedy řešením jediné rovnice, a to rovnice $(3,4)_{a,b}$.

Lemma 7. *Všechna řešení n^ν rovnic* (3,4) *jsou tvaru*

$$n^\nu = \underset{1}{n} + B^\nu_c s^c\,, \tag{3,5}$$

kde $\underset{1}{n^\nu}$ je jedním z řešení rovnic (3,4) *a s^c je libovolný vektor v X_{n-1}.*

Důkaz: Nechť $\underset{1}{n^\nu}$ je řešením rovnic (3,4) a n^ν jiné takové řešení rovnic (3,4). Pak existuje skalár a a vektor s^c tak, že

$$n^\nu = a\underset{1}{n^\nu} + B^\nu_c s^c\,.$$

Poněvadž vektor n^ν je rovněž řešením rovnice $(3,4)_a$, plyne odtud ihned $a = 1$. Tedy vektor n^ν je tvaru (3,5). Z (3,1), (3,4) plyne

$$n^\nu \nabla_a t_\nu = \underset{1}{n^\nu} \nabla_a t_\nu + B^\nu_c s^c \nabla_a t_\nu = u_b + s^c h_{ac} = u_b\,.$$

Tedy vztahy $(3,4)_b$ jsou splněny při každé volbě vektoru s^c v X_{n-1}.

Lemma 8. *Vyjdeme-li místo od tečného vektoru t_ν od tečného vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$, potom všechna řešení $^*n^\nu$ rovnic*

$$\begin{aligned} &\text{a)} & {}^*n^\nu\, {}^*t_\nu &= 1\,,\\ &\text{b)} & {}^*n^\nu \nabla_a {}^*t_\nu &= {}^*u_a \end{aligned} \tag{3,6}$$

jsou tvaru

$$^*n^\nu = Qn^\nu \quad (Q = P^{-1})\,, \tag{3,7}$$

kde n^ν jsou řešení rovnic (3,4).

Důkaz: Z $(3,6)_a$ plyne vzhledem k (3) ihned, že $^*n^\nu$ je tvaru (3,7). Rovnice $(3,6)_b$ jsou pak splněny.

Budiž nyní — při pevném tečném vektoru t_ν — $\underset{1}{n^\nu}$ libovolným řešením rovnice $(3,4)_a$ (tedy i rovnic $(3,4)_{a,b}$). Definujme veličiny $\underset{1}{B^a_\nu}$ známým způsobem

$$\underset{1}{B^a_\nu} B^\nu_b = \delta^a_b, \quad \underset{1}{B^a_\nu}\underset{1}{n^\nu} = 0\,. \tag{3,8}$$

Tento systém rovnic má jednoznačné řešení pro veličiny $\underset{1}{B^a_\nu}$, jak tomu bylo v analogických případech z paragrafu 2. Definujme veličiny $\underset{1}{\Gamma^a_{bc}}$ způsobem známým z předchozího paragrafu

$$\underset{1}{\Gamma^c_{ab}} \equiv \underset{1}{B^c_\nu} \nabla_a B^\nu_b\,. \tag{3,9}$$

Tyto veličiny definují v X_{n-1} koeficienty určité konexe (jak tomu bylo v § 2 v analogických případech), konexe indukované vektorem $\underset{1}{n^\nu}$.

Platí nyní tato věta:

Věta 13. *Nechť existuje v daném afinním prostoru A_n $(n > 2)$ regulární* *nadplocha X_{n-1}, pro niž jest v každém bodě uvažovaného oboru $h_{ab} \equiv 0$. Budiž n^ν nějaké řešení rovnic (3,4). Potom konexe o koeficientech*

$$\underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab} \equiv B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b\,, \tag{3,10}$$

kde veličiny B^c_ν jsou takto definovány

$$B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b \quad \left(\delta^a_b = \left\langle\begin{matrix}1 \text{ pro } a = b\\ 0 \text{ pro } a \neq b\end{matrix}\right.\right), \tag{3,11}$$
$$B^a_\nu n^\nu = 0\,,$$

je nezávislá na volbě řešení n^ν rovnic (3,4) a na volbě faktoru tečného vektoru t_ν.

Důkaz: Nechť $\underset{1}{n}{}^\nu$ je řešením rovnic (3,4) a $\underset{1}{B}{}^a_\nu$ veličiny definované v (3,8). Budiž n^ν jiné řešení rovnic (3,4) různé od $\underset{1}{n}{}^\nu$. Pak je, podle lemmatu 7,

$$n^\nu = \underset{1}{n}{}^\nu + B^\nu_c s^c, \quad s^c \neq 0\,. \tag{3,12}$$

K vektoru n^ν definujme veličiny B^a_ν rovnicemi (3,11). Vektor (kovariantní v A_n) B^a_ν můžeme psát jako lineární kombinaci vektorů $\underset{1}{B}{}^a_\nu$, t_ν $(a = 1, \ldots, n-1)$, t. j.

$$B^a_\nu = \underset{1}{B}{}^c_\nu T^a_c + r^a t_\nu\,.$$

Násobíme-li předchozí vztah vektorem B^ν_b dostaneme, vzhledem k (2), (3,11), (3,8)

$$\delta^a_b = T^a_c \delta^c_b \Rightarrow T^a_b = \delta^a_b\,;$$

tedy

$$B^a_\nu = \underset{1}{B}{}^a_\nu + r^a t_\nu\,.$$

Násobíme-li předchozí vztah vektorem n^ν, dostaneme vzhledem k (3,11), (3,12), (3,4), (3,8)

$$0 = \underset{1}{B}{}^a_\nu(\underset{1}{n}{}^\nu + B^\nu_c s^c) + r^a = s^a + r^a, \text{ t. j. } r^a = -s^a\,.$$

Tedy

$$B^a_\nu = \underset{1}{B}{}^a_\nu - s^a t_\nu\,. \tag{3,13}$$

Pro konexi indukovanou vektorem n^ν dostaneme na základě vztahů (3,13) (3,9), (4)

$$\Gamma^c_{ab} \equiv B^b_\nu \nabla_a B^\nu_b = (\underset{1}{B}{}^c_\nu - s^c t_\nu) \nabla_a B^\nu_b = \underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab}\,. \tag{3,14}$$

Tedy konexe Γ^c_{ab} je nezávislá na volbě řešení n^ν rovnic (3,4).

Vyjdeme-li na místo od tečného vektoru t_ν od tečného vektoru $^*t_\nu = Pt_\nu$, potom všechna řešení rovnic (3,6) jsou tvaru (3,7) (podle lemmatu 8). Potom, podle předchozího, je konexe $^*\Gamma^c_{ab}$ indukovaná v X_{n-1} nezávislá na volbě řešení $^*n^\nu$ rovnic (3,6). Budiž tedy $^*n^\nu$ jedno z řešení rovnic (3,6). Definujeme veličiny $^*B^a_\nu$ známým způsobem.

$$^*B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b, \quad {}^*B^a_\nu\, {}^*n^\nu = 0\,.$$

Podle (3,7) je $^*n^\nu = Qn^\nu$, kde n^ν je řešením rovnic (3,4). Nechť při uvažovaném n^ν mají veličiny B^a_ν význam z (3,11). Snadno si ověříme, že mezi veličinami $^*B^a_\nu$, B^a_ν platí vztah

$$^*B^a_\nu = B^a_\nu .$$

Odtud plyne pak, vzhledem k (3,14)

$$^*\Gamma^c_{ab} \equiv {}^*B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = \underset{1}{\Gamma}{}^c_{ab} .$$

Označíme-li $\Gamma^c_{ab} \equiv \underset{0}{\Lambda}{}^c_{ab}$, jsme s důkazem věty hotovi.

Poznámka 10. Podstatné pro náš případ je, že získaná konexe o koeficientech $\underset{0}{\Lambda}{}^c_{ab}$ je nezávislá na volbě faktoru tečného vektoru t_ν. Při její konstrukci je ta výhoda, že za afinnormální vektor variety X_{n-1} (pro niž platí $h_{ab} \equiv 0$) můžeme mít jakýkoliv vektor v bodech variety X_{n-1}, který v ní neleží.

Závěr

Neuvažujeme-li poměrně jednoduchý případ popsaný v § 3, t. j. případ totálně geodetické nadplochy a v afinním prostoru A_n, potom celou předchozí teorii lze ryze formálním způsobem zobecnit na případ, kdy hodnost h tensoru h_{ab} variety X_{n-1} v A_n jest rovna $n - 1$. Jde tedy o zobecnění na variety X_{n-1} v A_n, o nichž pojednává má dřívější práce: Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'éspace affin, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. *75* (1950), str. 179—208.

Zde je na místě podotknouti toto: Velmi často se říká neuváženě těm případům variet X_{n-1} v A_n, pro něž je hodnost tensoru h_{ab} rovna $n - 1$, případy „obecné" variet X_{n-1}. Zde však teorie „speciálních případů" (kdy $1 \leq n < n - 1$), dá se ihned rozšířit i na případ $h = n - 1$, nikoliv obráceně.

Abychom doplnili teorii z § 2 i o případ $h = n - 1$, stačí uvážit, že v tomto případě je hodnost matice determinantu (1,1) rovna n.[25]) Systém rovnic

$$\begin{aligned} n^\nu t_\nu &= 1 \\ n^\nu \nabla_a t_\nu &= m_a, \quad a = 1, \dots, n - 1 \end{aligned} \tag{*}$$

má pak, při daném vektoru m_a, jediné řešení n^ν. V případě $h = n - 1$ jsou všechny řádky determinantu z tensoru h_{ab} lineárně nezávislé a můžeme zde definovat tensor l^{ab} takto:

$$l^{ab} h_{bc} = \delta^a_c .$$ [26])

Je tedy v případě $h = n - 1$: $l^{ab} \equiv h^{ab}$, kde h^{ab} je kontragredientní tensor k tensoru h_{ab}. Veličiny M_a, definované v (1,46), přejdou pak přímo ve veličiny stejně symbolicky označené v dřívější práci.[27]) Definice $m_a = M_a$, v rovnici (*)

[25]) (I), str. 181, věta (1,1).
[26]) Viz (1,16).
[27]) (I), str. 192, $(4,5)_a$.

vede pak k jedinému řešení $\underset{0}{n}^\nu$ rovnic (*), kde $\underset{0}{n}^\nu$ je směru nezávislého na volbě faktoru tečného vektoru t_ν.[28]) Příslušný vektor $\underset{1}{n}^\nu$ je popsán rovnicemi (2,20), kde klademe $h = n - 1$, $\underset{0}{l}^{ab} \equiv h^{ab}$. Konexe indukovaná pak tímto vektorem $\underset{0}{n}^\nu$[29]) je pak tvaru (2,21).

Pro variety X_{n-1} v A_n uvažované v § 2 bylo by možno nalézt jiné invariantní afinnormální směry a konexe, tak jak to je provedeno ve shora citované práci pro případ $h = n - 1$. To je však už záležitost ryze formální.

To, že teorie probraná jak v této, tak i v dřívější práci (o afinnormálním směru a konexi) má pro afinní geometrii význam a není pouhou konstrukcí a formalismem, ukážeme na jednoduchých příkladech (a to na kvadrikách v obyčejném trojrozměrném afineuklidovském prostoru A_3) v II. části práce.

II. část

Tato část je věnována jednoduchým příkladům z afinní geometrie ploch v afineuklidovském trojrozměrném prostoru E_3, tedy v prostoru A_3 o koeficientech konexe vesměs rovných nule. Symboly x, y, z budou v dalším značit kartézské souřadnice bodů v uvažovaném prostoru. Příklady se týkají kvadrik — přesněji — afinní normály a jejího významu u nesingulárních kvadrik a afinní normály a afinnormální roviny u singulárních kvadrik. Podrobný výpočet zde nebude proveden, početní výsledky budou citovány a to v takovém pořadí, aby byla patrna metoda výpočtu.

Příklad 1. [1*]) Parametrickými rovnicemi

$$x = u \cos v, \; y = u \sin v, \; z = ku, \; k \neq 0 \,, \tag{1,1}^*$$

kde $u \in (-\infty, \infty)$, $v \in \langle 0, 2\pi)$, je dán v E_3 kvadratický kužel ve speciální poloze. Položme $\eta^1 = u$, $\eta^2 = v$. Pro veličiny $B_a^\alpha \equiv \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \eta^a}$ dostaneme

$$\begin{aligned} B_1^1 &= \cos v, \; B_1^2 = \sin v, \; B_1^3 = k \,, \\ B_2^1 &= -u \sin v, \; B_2^2 = u \cos v, \; B_2^3 = 0 \,. \end{aligned} \tag{1,2}^*$$

Pro tečný vektor t_ν variety $(1,1)^*$ dostaneme jako jedno z řešení rovnic (2)

$$t_1 = -ku \cos v, \; t_2 = -ku \sin v, \; t_3 = u \,. \tag{1,3}^*$$

Z $(1,2)^*$, $(1,3)^*$ spočteme snadno podle (4) složky tensoru h_{ab}:

$$h_{11} = h_{12} = h_{21} = 0, \; h_{22} = -ku^2 \,. \tag{1,4}^*$$

Vyloučíme-li hodnotu $u = 0$, která odpovídá vrcholu kužele (vrchol je v počátku systému souřadného), potom v každém bodě plochy $(1,1)^*$ je hodnost tensoru h_{ab} rovna jedné, jak plyne z $(1,4)^*$. Tedy

$$h = 1 \;\; (u \neq 0) \,. \tag{1,5}^*$$

[28]) (I), str. 197, rovnice (5,4), (5,5).
[29]) (I), str. 197, rovnice (5,3).
[1*]) Tento prvý příklad bude proveden podrobněji s odvoláním na formule v části I.

Podle (1,32), (1,16) dostaneme pro tensor $\underset{0}{l}^{ab}$:

$$\underset{0}{l}^{11} = \underset{0}{l}^{12} = \underset{0}{l}^{21} = 0,\ l^{22} = -\frac{1}{ku^2}\ (\text{pro } u \neq 0)\,. \tag{1,6*}$$

Z definičních rovnic (2,20) plyne pro normální vektor n^ν na základě vztahů (1,4)*, (1,6)*, (1,5)*

$$\underset{0}{n}^\nu = \underset{0}{l}^{22}\{B_2^\nu \underset{0}{l}^{22}(\partial_2 t_\alpha\, \partial_2 B_b^\alpha + h_{22} m_2) - \partial_2 B_2^\nu\}\,. \tag{1,7*}$$

Pro m_2 dostaneme z definičních rovnic $(2,18)_a$, (1,52), $(1,49)_a$, $(1,49)_b$ s přihlédnutím k (1,4)*, (1,5)*, (1,6)*,

$$m_2 = M_2 = \frac{2}{3}\left(\begin{bmatrix} c \\ 2c \end{bmatrix} - L_{2c}^c\right) = \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}\underset{0}{l}^{cd}\, \partial_2 h_{dc} - \underset{0}{l}^{cd}\, \partial_d t_\alpha\, \partial_2 B_c^\alpha) =$$

$$= \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2} l^{22}\, \partial_2 h_{22} - \underset{0}{l}^{22}\, \partial_2 t_\alpha\, \partial_2 B_2^\alpha) = \frac{2}{3}\frac{1}{ku^2}\, \partial_2 t_\alpha\, \partial_2 B_2^\alpha\,,$$

a tedy, vzhledem k (1,2)*, (1,3)* (jak snadno spočteme)

$$m_2 = 0\,. \tag{1,8*}$$ [2*]

Z (1,8)*, (1,6)* a z poznámky [2*] plyne pro vektor $\underset{0}{n}^\nu$ v (1,7)*

$$\underset{0}{n}^\nu = \frac{1}{ku^2}\, \partial_2 B_2^\nu,\quad (u \neq 0)\,,$$

což rozepsáno dává podle (1,2)*

$$\underset{0}{n}^1 = -\frac{1}{ku}\cos v,\ \underset{0}{n}^2 = -\frac{1}{ku}\sin v,\ \underset{0}{n}^3 = 0\ \ (u \neq 0)\,. \tag{1,9*}$$

Jsou tedy rovnice (parametrické) hledané afinní normály variety (1,1)* bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$, $\underset{0}{u} \neq 0$,

$$X = \underset{0}{u}\cos \underset{0}{v} - \tau\frac{1}{k\underset{0}{u}}\cos \underset{0}{v},\ Y = \underset{0}{u}\sin \underset{0}{v} - \tau\frac{1}{k\underset{0}{u}}\sin \underset{0}{v},\ Z = k\underset{0}{u}\,,$$

kde τ je parametr.

Zavedeme-li místo parametru τ parametr $t = -\tau\dfrac{1}{k\underset{0}{u}^2}$, pak parametrické vyjádření afinní normály je

$$X = \underset{0}{u}\cos \underset{0}{v}(1 + t),\ Y = \underset{0}{u}\sin \underset{0}{v}(1 + t),\ Z = k\underset{0}{u}\,, \tag{1,10*}$$

kde X, Y, Z, jsou běžné body afinní normály. Všimněme si, že pro $t = -1$ je $X = 0$, $Y = 0$, $Z = k\underset{0}{u}$. Tedy afinní normály v bodech variety (1,1)* (s výjimkou bodu [0, 0, 0], jenž je vrcholem kužele a kde není normála definována) protínají osu z souřadnicového systému. Osa z je zřejmě osou kužele.

[2*]) Je totiž pro naši varietu $\partial_b t_\alpha\, \partial_b B^\nu = 0$.

Pro asymptotický směr v bodě (u, v), $u \neq 0$, t. j. směr vyhovující vztahu $h_{ab} \,.\, v^b = 0$ v bodě (u, v), dostaneme (bez ohledu na multiplikační faktor) $v^1 = 1$, $v^2 = 0$, a tedy pro jeho složky v E_3 plyne podle (1,2)*

$$v^\nu\,[\cos v,\ \sin v,\ k]\,. \tag{1,11)*}$$

Je tedy v^ν nezávislý na u. Parametrické čáry $v =$ konst jsou čarami asymptotickými. Jsou to povrchové přímky kužele. Invariantní afinnormální bivektor z věty 9 a definice 1, representovaný vektory v^ν, $\underset{0}{n}{}^\nu$, vede v našem případě k rovině invariantního směru,[3*]) jejíž rovnice v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$, $\underset{0}{u} \neq 0$, jest:

$$\begin{vmatrix} X - \underset{0}{x}, & Y - y_0, & Z - z_0 \\ (v^1)_0, & (v^2)_0, & (v^3)_0 \\ (\underset{0}{n}{}^1)_0, & (\underset{0}{n}{}^2)_0, & (\underset{0}{n}{}^3)_0 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{A}$$

kde $\underset{0}{x}, y_0, z_0$ je bodem variety (1,1)* pro hodnoty $\underset{0}{u}, \underset{0}{v}$. Dosazení do předchozí rovnice z (1,1)*, (1,9)*, (1,11)* dává po úpravě rovnici

$$X \sin \underset{0}{v} - Y \cos \underset{0}{v} = 0\,, \tag{1,12)*}$$

což je rovnice průměrové roviny kvadratického kužele (1,1)* v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$. Při proměnném $\underset{0}{v}$ dostáváme jednoparametrický svazek průměrových rovin s osou splývající s osou z souřadnicového systému. Poznamenejme ještě, že geometrický význam afinního normálního vektoru $\underset{0}{n}{}^\nu$ a invariantního afinnormálního bivektoru shora popsaný pro varietu (1,1)*, tedy pro kvadratický kužel, zůstává, ať má tento kužel v E_3 jakoukoli polohu. Přesněji řečeno, my jsme uvažovali kužel ve speciální poloze v E_3. Avšak ten fakt, že afinní normály o směru $\underset{0}{n}{}^\nu$ procházejí osou kužele a že afinnormální bivektor vede k průměrovým rovinám kužele, je nezávislý na regulární afinní transformaci souřadnic v E_3,

$$\bar{x}^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta + D^\alpha,\ \textit{determinant}\ [A^\alpha_\beta] \neq 0\,,$$

kde A^α_β, D^α, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ jsou konstanty.

U dalších dvou příkladů citujeme pouze výsledky bez odvolání na formule z části I, do nichž dosazujeme. Budeme uvažovat opět speciální polohy v E_3. Je samozřejmé, že příslušné geometrické interpretace afinní normály a invariantního afinnormálního bivektoru jsou nezávislé na shora zmíněné afinní grupě transformací v E_3.

Příklad 2. Parametrickými rovnicemi

$$x = a \cos u,\ y = b \sin u,\ z = v,\quad \begin{matrix} u \in \langle 0, 2\pi)\,, \\ v \in (-\infty, \infty)\,, \end{matrix} \tag{2,1)*}$$

[3*]) T. j. nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru t_ν.

kde $a > 0$, $b > 0$, jsou konstanty, je dán v E_3 eliptický válec ve speciální poloze. Pro tuto varietu dostaneme (nehledíme-li k faktoru)

$$h_{11} = ab,\ h_{12} = h_{21} = h_{22} = 0\,. \tag{2,2}^*$$

Tedy ve všech bodech plochy je hodnost tensoru h_{ab} rovna jedné. Pro složky afinnormálního vektoru $\underset{0}{n}{}^{\nu}$ v běžném bodě (u, v) variety (2,1)* spočteme

$$\underset{0}{n}{}^1 = \frac{1}{b}\cos u,\ \underset{0}{n}{}^2 = \frac{1}{a}\sin u,\ \underset{0}{n}{}^3 = 0\,. \tag{2,3}^*$$

Rovnicí afinní normály o směru $\underset{0}{n}{}^{\nu}$ můžeme dát v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ variety (2,1)* tvar

$$\begin{aligned} X &= a\cos \underset{0}{u}(1 + t)\,, \\ Y &= b\sin \underset{0}{u}(1 + t)\,,\quad t \in (-\infty, \infty)\,. \\ Z &= \underset{0}{v}\,. \end{aligned} \tag{2,4}^*$$

Z rovnic (2,4)* je zřejmé, že afinní normála o směru $\underset{0}{n}{}^{\nu}$ prochází osou z souřadnicového systému, jež je osou daného eliptického válce. Vektor v^{ν} o složkách

$$v^{\nu}[0, 0, 1] \tag{2,5}^*$$

udává asymptotický směr v každém bodě variety (2,1)*. Invariantní afinnormální bivektor representovaný vektory v^{ν}, $\underset{0}{n}{}^{\nu}$ v každém bodě variety (2,1)* představuje v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ rovinu o rovnici (A) z příkladu 1, která po rozepsání a úpravě se dá vzhledem k (2,1)*, (2,4)*, (2,5)* přepsat na tvar

$$Xb\sin \underset{0}{u} - Ya\cos \underset{0}{u} = 0\,, \tag{2,6}^*$$

kde X, Y, Z jsou běžné souřadnice bodů této roviny v E_3. Jako v příkladě 1, značí rovnice (2,6)* při proměnném $\underset{0}{u}$ svazek rovin s osou splývající s osou válce. Je to svazek průměrových rovin válce.

Příklad 3. Parametrickými rovnicemi

$$x = a\cosh u,\ y = b\sinh u,\ z = v,\ u, v \in (-\infty, \infty)\,, \tag{3,1}^*$$

kde $a > 0$, $b > 0$ jsou konstanty, je dán v E_3 hyperbolický válec ve speciální poloze. Pro složky tensoru h_{ab} spočteme

$$h_{11} = -ab,\ h_{12} = h_{21} = h_{22} = 0\,. \tag{3,2}^*$$

Je tedy v bodech dané variety hodnost tensoru h_{ab} rovna jedné.

Pro složky vektoru $\underset{0}{n}{}^{\nu}$ v běžném bodě (u, v) spočteme

$$\underset{0}{n}{}^1 = \frac{1}{b}\cosh u,\ \underset{0}{n}{}^2 = \frac{1}{a}\sinh u,\ \underset{0}{n}{}^3 = 0\,. \tag{3,3}^*$$

Parametricky můžeme afinní normálu o směru $\underset{0}{n}^\nu$ v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ variety (3,1)* popsat rovnicemi tvaru

$$\begin{aligned} X &= a \cosh \underset{0}{u}(1 + t) \,, \\ Y &= b \sinh \underset{0}{u}(1 + t), \quad t \in (-\infty, \infty) \,. \\ Z &= \underset{0}{v} \,. \end{aligned} \tag{3,4*}$$

Z těchto rovnic je zřejmé, že afinní normála (3,4)* prochází osou z souřadného systému, jež je osou daného válce. Podobně jako v příkladě 2, vektor v^ν o složkách $v^1 = 0$, $v^2 = 0$, $v^3 = 1$ leží v asymptotickém směru v každém bodě dané variety. Invariantní afinnormální bivektor representovaný vektory $\underset{0}{n}^\nu$, v^ν vede k rovině, která má v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ rovnici

$$Xb \sinh \underset{0}{u} - Ya \cosh \underset{0}{v} = 0 \,, \tag{3,5*}$$

analogickou rovnici (2,6)*. Tato rovina prochází osou válce. Je to jeho průměrová rovina. Při proměnném $\underset{0}{u}$ představuje rovnice (3,5)* svazek průměrových rovin daného hyperbolického válce s osou v ose válce.

Příklad 4. Parametrickými rovnicemi

$$x = u, \; y = u^2, \; z = v, \; u, v \in (-\infty, \infty) \tag{4,1*}$$

je dán v E_3 parabolický válec ve speciální poloze. Tensor h_{ab} má v tomto případě složky (až na multiplikační faktor)

$$h_{11} = 2, \; h_{12} = h_{21} = h_{22} = 0 \,. \tag{4,2*}$$

Hodnost tensoru h_{ab} je tedy jedna ve všech bodech variety. V našem případě dostaneme pro směr $\underset{0}{n}^\nu$:

$$\underset{0}{n}^1 = 0, \; \underset{0}{n}^2 = -1, \; \underset{0}{n}^3 = 0 \,. \tag{4,3*}$$

Souřadnice afinní normály o směru $\underset{0}{n}^\nu$ jsou v bodě $\underset{0}{u}, \underset{0}{v}$ variety (4,1)*

$$\begin{aligned} X &= \underset{0}{u} \,, \\ Y &= \underset{0}{u}^2 - t, \quad t \in (-\infty, \infty) \,. \\ Z &= \underset{0}{v} \,, \end{aligned} \tag{4,4*}$$

což je rovnice přímky jdoucí $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ dané variety a rovnoběžné s osou y.

Asymptotický směr variety (4,1)* je jako v předchozím případě udáván vektorem v^ν o složkách 0, 0, 1 v každém bodě dané plochy. Invariantní afinnormální bivektor representovaný vektory $\underset{0}{n}^\nu$, v^ν, vede v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ plochy (4,1)* k rovině, popsané rovnicí

$$X = \underset{0}{u} \,. \tag{4,5*}$$

Při proměnném $\underset{0}{u}$ představuje rovnice (4,5)* svazek rovin rovnoběžných s rovinou yz. Jsou to průměrové roviny parabolického válce.

Výsledky z příkladů 1—4 s přihlédnutím k poznámkám o regulární afinní transformaci souřadnic v E_3 (v příkladě 1) můžeme shrnout takto:

1°. *Geometrický význam invariantního afinnormálního bivektoru*[4*]) *pro singulární (reálné) kvadriky je ten, že rovina jdoucí bodem kvadriky a obsahující uvažovaný bivektor v tomto bodě jest průměrovou rovinou příslušné singulární kvadriky.*[5*])

Poznámka. Další příklady budou se zabývat geometrickým významem afinnormálního vektoru $\underset{0}{n}^\nu$ (a tedy příslušné afinní normály) pro nesingulární (reálné) kvadriky v E_3. Následující příklad 5 bude proveden poněkud podrobněji s odvoláním na výsledky a formule z části I a z dřívějšího článku, citovaného na str. 102 a v poznámkách pod znakem (I). Vzhledem k tomu, co bylo řečeno v závěru první části, lze též přímo aplikovat výsledky a formule z I. části.

Příklad 5. Elipsoid v E_3 je dán parametrickými rovnicemi

$$X = a \sin\vartheta \cos\varphi,\ y = b \sin\vartheta \sin\varphi,\ z = c\cos\vartheta,\ \begin{matrix}\varphi \in \langle 0, 2\pi), \\ \vartheta \in \langle 0, \pi\rangle.\end{matrix} \qquad (5,1)^*$$

Pro plochu (5,1)* jest (položíme-li $\eta^1 = \vartheta$, $\eta^2 = \varphi$)

$$\begin{aligned} B_1^1 &= a\cos\vartheta\cos\varphi,\ B_1^2 = b\cos\vartheta\sin\varphi,\ B_1^3 = -c\sin\vartheta, \\ B_2^1 &= -a\sin\vartheta\sin\varphi,\ B_2^2 = b\sin\vartheta\cos\varphi,\ B_2^3 = 0. \end{aligned} \qquad (5,2)^*$$

Vektor t_ν o složkách

$$t_1 = bc\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ t_2 = ac\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ t_3 = ab\cos\vartheta\sin\vartheta \qquad (5,3)^*$$

jest tečným vektorem variety (5,1)*. Pro složky tensoru h_{ab} při hoření volbě tečného vektoru t_ν vychází

$$\begin{aligned} h_{11} &\equiv -t_\alpha\,\partial_1 B_1^\alpha = abc\sin\vartheta,\ h_{12} = h_{21} \equiv -t_\alpha\,\partial_1 B_2^\alpha = 0, \\ h_{22} &= abc\sin^3\vartheta. \end{aligned} \qquad (5,4)^*$$

Pro determinant tensoru h_{ab} spočteme na základě předchozího: $h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = a^2b^2c^2\sin^4\vartheta$. Jestliže z definičního oboru naší variety vyloučíme body, pro které je $\vartheta = 0, \pi$, potom v ostatních bodech plochy (5,1)* je hodnost tensoru h_{ab} rovna dvěma. Pro tensor h^{ab} kontragredientní k tensoru h_{ab} vyjde

$$h^{11} = \frac{1}{h_{11}} = \frac{1}{abc\sin\vartheta},\ h^{12} = h^{21} = 0,\ h^{22} = \frac{1}{h_{22}} = \frac{1}{abc\sin^3\vartheta}, \qquad (5,5)^*$$

při čemž zde a v dalším vylučujeme případ $\vartheta = 0, \pi$. Definujeme afinnormální

[4*]) Zavedeného definicí 1 v části I. práce.

[5*]) Průměrovou rovinou rozumíme rovinu jdoucí asymptotickou přímkou a osou singulární kvadriky (jde-li o kužel resp. o eliptický nebo hyperbolický válec), v případě parabolického válce pokládejme rovinu definovanou uvažovaným bivektorem, za definici průměrové roviny.

vektor $\underset{0}{n}^{\nu}$ tak jako dříve rovnicemi (2,20), kde místo tensoru $\underset{0}{l}^{ab}$ píšeme h^{ab} a místo m_a rovnou M_a;[6*)]

$$\underset{0}{n}^{\nu} = \tfrac{1}{2}h^{ab}\{B^{\nu}_{c}h^{cd}(\partial_d t_\alpha\ \partial_a B^{\alpha}_{b} + h_{ab}M_d) - \partial_a B^{\nu}_{b}\}\ .^{7*)} \tag{5,6}*$$

Pro vektor M_d v (5,6) je podle (1,52), $(1,49)_{ab}$

$$M_d = \tfrac{2}{4}\,[\tfrac{1}{2}h^{ab}\ \partial_d h_{ab} - h^{ab}\ \partial_d t_\nu\ \partial_a B^{\nu}_{b}]\ .^{8*)} \tag{5,7}*$$

Z (5,7)* spočteme podle (5,2)*, (5,3)*, (5,4)*, (5,5)*

$$M_1 = \operatorname{cotg}\vartheta,\ M_2 = 0\ . \tag{5,8}*$$

Nyní bychom mohli přímým dosazováním spočtených veličin spočítat vektor $\underset{0}{n}^{\nu}$ podle (5,6)*. Tato cesta je však poněkud zdlouhavá. Zde se vyplácí řešit přímo systém rovnic (*) v závěru I. části práce,[9*)] t. j. řešit rovnice

$$\underset{0}{n}^{\nu}t_\nu = 1\ ,$$
$$\underset{0}{n}^{\nu}\ \partial_a t_\nu = M_a,\ a = 1, 2\ ,$$

jichž je vektor $\underset{0}{n}^{\nu}$ v (5,6)* jednoznačným řešením. Řešením těchto rovnic nebo přímým výpočtem podle (5,6)* dostaneme v běžném bodě (ϑ, φ) variety (5,1)* $(\vartheta \neq 0, \pi)$

$$\underset{0}{n}^{1} = \frac{1}{bc}\cos\varphi,\ \underset{0}{n}^{2} = \frac{1}{ac}\sin\varphi,\ \underset{0}{n}^{3} = \frac{1}{ab}\operatorname{cotg}\vartheta\ . \tag{5,9}*$$

V bodě $(\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi})$, $\underset{0}{\vartheta} \neq 0$ můžeme tedy afinní normálu o směru $\underset{0}{n}^{\nu}$ v tomto bodě popsat parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned}
X &= a\sin\underset{0}{\vartheta}\cos\underset{0}{\varphi} + \tau\frac{1}{bc}\cos\underset{0}{\varphi}\ ,\\
Y &= b\sin\underset{0}{\vartheta}\sin\underset{0}{\varphi} + \tau\frac{1}{ac}\sin\underset{0}{\varphi},\ \tau \in (-\infty, \infty)\ .\\
Z &= c\cos\underset{0}{\tau} + \tau\frac{1}{ab}\operatorname{cotg}\underset{0}{\tau}\ .
\end{aligned} \tag{5,10}*_a$$

Zavedeme-li místo parametru τ parametr t vztahem

$$t = 1 + \frac{\tau}{abc\sin\underset{0}{\vartheta}}$$

6*) Viz závěr části I a definiční rovnice (1,16), (2,18)-.
7*) (I), str. 197, (5,5), (5,3) a str. 185, (2,14).
8*) (I), str. 192, (4,1), (4,3), (4,5).
9*) (I), str. 197, (5,4), (5,5).

dostaneme, vyjádříme-li z předchozího vztahu τ a dosadíme do $(5,10)_a$

$$\begin{aligned} X &= a \sin \underset{0}{\vartheta} \cos \underset{0}{\varphi}\, t\,, \\ Y &= b \sin \underset{0}{\vartheta} \sin \underset{0}{\varphi}\, t\,,\ t \in (-\infty, \infty)\,. \\ Z &= c \cos \underset{0}{\vartheta}\,, \end{aligned} \qquad (5,10)_b$$

což jsou rovnice hledané afinní normály v bodě $(\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi})$. Vztahy $(5,10)^*_b$ mají smysl též pro $\underset{0}{\vartheta} = 0, \pi$. Porovnáním (5,1)*, (5,10)* zjistíme ihned, že afinní normála prochází počátkem systému souřadnicového (t. j. středem daného elipsoidu) a je tedy v uvažovaném bodě jeho průměrem. Náš elipsoid měl speciální polohu v souřadnicovém systému. Avšak ten fakt, že námi definovaná afinní normála o směru $\underset{0}{n^\nu}$ prochází středem elipsoidu, platí pro každý elipsoid v každé poloze v E_3. Je to poznatek nezávislý na lineární regulární transformaci afinní v E_3. O tom je možné snadno se přesvědčit.

Příklad 6.

Parametrickými rovnicemi

$$x = a \cosh \vartheta \cos \varphi,\ y = b \cosh \vartheta \sin \varphi,\ z = c \sinh \vartheta\,, \qquad (6,1)^*$$

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi),\ \vartheta \in (-\infty, \infty) \qquad (6,1)^*$$

je popsán v E_3 hyperboloid jednodílný.[10*] Pro složky tensoru h_{ab} vychází (až na faktor)

$$h_{11} = abc \cosh \vartheta,\ h_{12} = h_{21} = 0,\ h_{22} = -abc \cosh^3 \vartheta\,. \qquad (6,2)^*$$

Pro determinant z tensoru h_{ab} dostaneme $h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = -a^2b^2c^2 \cosh^4 \vartheta$. Je tedy uvažovaný determinant v každém bodě dané variety záporný a je tedy jeho hodnost rovna dvěma. Pro složky afinnormálního vektoru definovaného v (5,6)* se dostane

$$\underset{0}{n^1} = -\frac{1}{bc}\cos\varphi,\ \underset{0}{n^2} = -\frac{1}{ac}\sin\varphi,\ \underset{0}{n^3} = -\frac{1}{ab}\,\mathrm{tgh}\,\vartheta\,. \qquad (6,3)^*$$

V bodě $(\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi})$ dané variety jsou tedy parametrické rovnice afinní normály o směru $\underset{0}{n^\nu}$:

$$\begin{aligned} X &= a \cosh \underset{0}{\vartheta} \cos \underset{0}{\varphi} - \tau \frac{1}{bc} \cos \underset{0}{\varphi}\,, \\ Y &= b \cosh \underset{0}{\vartheta} \sin \underset{0}{\varphi} - \tau \frac{1}{ac} \sin \underset{0}{\varphi}\,,\ \tau \in (-\infty, \infty)\,. \\ Z &= c \sinh \underset{0}{\vartheta} - \tau \frac{1}{ab}\,\mathrm{tgh}\, \underset{0}{\vartheta}\,. \end{aligned} \qquad (6,4a)^*$$

[10*]) Je totiž $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Zavedeme-li nový parametr t vztahem

$$t = \frac{\tau}{abc \cosh \underset{0}{\vartheta}} - 1$$

potom rovnice (6,4)* lze přepsat na tvar

$$\begin{aligned} X &= -a \cosh \underset{0}{\vartheta} \cos \underset{0}{\varphi} \,.\, t\,, \\ Y &= -b \cosh \underset{0}{\vartheta} \sin \underset{0}{\varphi} \,.\, t\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,. \\ Z &= -c \sinh \underset{0}{\vartheta} t\,. \end{aligned} \qquad (6,4)^*_b$$

Z rovnic $(6,4)^*_b$ je ihned zřejmé, že afinní normály o směru $\underset{0}{n^\nu}$ procházejí počátkem systému souřadnicového, který je středem jednodílného hyperboloidu (podobně jako tomu bylo pro elipsoid v příkladě pátém).

Příklad 7. Plocha v E_3 daná parametrickými rovnicemi

$$x = a \sinh \vartheta \cos \varphi,\ y = b \sinh \vartheta \sin \varphi,\ z = c \cosh \vartheta\,, \qquad (7,1)^*$$
$$\vartheta \in (-\infty, \infty),\ \varphi \in \langle 0, 2\pi)$$

kde a, b, c jsou nezáporné konstanty, jest dvojdílným hyperboloidem ve speciální poloze.[11*]) Pro takto danou varietu spočteme

$$h_{11} = -abc \sinh \vartheta,\ h_{12} = h_{21} = 0,\ h_{22} = -abc \sinh^3 \vartheta \qquad (7,2)^*$$

a tedy

$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = a^2b^2c^2 \sin h^4\vartheta > 0 \text{ pro } \vartheta \neq 0\,.$$

Vyloučíme-li případ $\vartheta = 0$, potom k tensoru h_{ab} můžeme definovat kontragredientní tensor h^{ab}, pro jehož složky vypočteme

$$h^{11} = -\frac{1}{abc \sinh \vartheta}\,,\quad h^{22} = -\frac{1}{abc \sinh^3 \vartheta}\,,\ h^{12} = h^{21} = 0\,.$$

Spočteme-li afinnormální vektor $\underset{0}{n^\nu}$, definovaný v (5,6)*, máme v bodě $(\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi})$ $\underset{0}{\vartheta} \neq 0$,

$$\underset{0}{n^1} = \frac{1}{bc} \cos \underset{0}{\varphi},\ \underset{0}{n^2} = \frac{1}{ac} \sin \underset{0}{\varphi},\ \underset{0}{n^3} = \frac{1}{ab} \operatorname{cotgh} \underset{0}{\vartheta}\,. \qquad (7,3)^*$$

Pro afinní normálu v uvažovaném bodě $(\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi})$ dostaneme analogickým způsobem jako v příkladech předchozích parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} X &= a \sinh \underset{0}{\vartheta} \cos \underset{0}{\varphi} \,.\, t\,, \\ Y &= b \sinh \underset{0}{\vartheta} \sin \underset{0}{\varphi} \,.\, t\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,. \\ Z &= c \cosh \underset{0}{\vartheta} \,.\, t\,, \end{aligned} \qquad (7,4)^*$$

Rovnicemi (7,4)* je definována afinní normála též ve vyloučeném dříve případě $\underset{0}{\vartheta} = 0$. Z rovnic (7,4)* je současně patrné, že při všech hodnotách $\underset{0}{\vartheta}, \underset{0}{\varphi}$ pro-

[11*]) Je totiž $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

chází afinní normála počátkem souřadnic, což je střed dvojdílného hyperboloidu; je tedy námi definovaná afinní normála, právě tak jako v předchozích dvou případech, průměrem uvažované kvadriky.

Na základě výsledků z příkladů 5, 6, 7 můžeme vyslovit toto tvrzení:[12*])

2°. *Pro nesingulární (reálné) středové kvadriky má afinní normála o směru* $\underset{0}{n}^{\nu}$, *definovaném v (5,6)*, ten geometrický význam, že v uvažovaném bodě obsahuje průměr kvadriky v tomto bodě, nebo, což je totéž, prochází středem kvadriky.*

Příklad 8. Parametrickými rovnicemi

$$x = u,\ y = v,\ z = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{p} + \varepsilon\frac{v^2}{q}\right),\ \varepsilon = \pm 1,\ p > 0,\ q > 0 \qquad (8,1)^*$$

(p, q jsou konstanty), je popsán v E_3 paraboloid a to eliptický, je-li $\varepsilon > 0$, hyperbolický, je-li $\varepsilon > 0$. Pro složky tensoru h_{ab} vyjde

$$h_{11} = -\frac{1}{p},\ h_{12} = h_{21} = 0,\ h_{22} = -\frac{\varepsilon}{q} \qquad (8,2)^*$$

a tedy pro determinant z tensoru h_{ab}:

$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \frac{\varepsilon}{pq} \neq 0\,.$$

Tedy hodnost tensoru h_{ab} je dvě v každém bodě plochy. Pro vektor $\underset{0}{n}^{\nu}$ dostaneme

$$\underset{0}{n}^1 = 0,\ \underset{0}{n}^2 = 0,\ \underset{0}{n}^3 = 1\,.$$

Pro parametrické vyjádření afinní normály o směru $\underset{0}{n}^{\nu}$ dostaneme v bodě $(\underset{0}{u}, \underset{0}{v})$ plochy (8,1)*

$$X = \underset{0}{u},\ Y = \underset{0}{v},\ Z = \frac{1}{2}\left(\frac{\underset{0}{u}^2}{p} + \varepsilon\frac{\underset{0}{v}^2}{q}\right) + t,\ t \in (-\infty, \infty)$$

Tvoří tedy afinní normály o směru $\underset{0}{n}^{\nu}$ v případě plochy typu (8,1)* svazek přímek rovnoběžných s osou z souřadného systému. Máme tak výsledek:

3°. *Pro nesingulární nestředové kvadriky tvoří afinní normály o směru* $\underset{0}{n}^{\nu}$ *svazek rovnoběžných přímek, které odpovídají průměrům těchto kvadrik, tak jak se o nich pojednává v metrice.*

Závěrečná poznámka. Jak již bylo shora řečeno, mají tvrzení 1°, 1°, 3° platnost při libovolné poloze příslušných variet v E_3. To se dokáže velmi snadno, vyjdeme-li od grupy afinních lineárních transformací v E_3. To by však přesahovalo rámec této práce. Předchozí příklady byly pouze ukázkou a jednoduchou aplikací na dřívější theorii. Z příkladů samotných je zřejmé, že pojmy jako osa singulárních kvadrik průměrová rovina, průměr a střed regulárních kvadrik jsou pojmy afinní. Rovněž je zřejmé, že je možno vybudovat shora naznačeným způsobem obecnou afinní teorii kvadrik a jejich afinní klasifikaci.

[12*]) Z uvedených tří příkladů není jasné, že platí pro jakoukoli polohu těchto typů kvadrik v E_3. Platnost se však dá snadno dokázat.