Časopis pro pěstování matematiky

Miloslav Hampl

Napjatost desky s dvěma zalisovanými kruhovými čepy

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 79 (1954), No. 1, 65--75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117101

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

# NAPJATOST DESKY S DVĚMA ZALISOVANÝMI KRUHOVÝMI ČEPY

MILOSLAV HAMPL, Praha.

(Došlo dne 2. října 1953.) DT 621.81-41 : 539.3/.4

Do nekonečné rovinné desky se dvěma kruhovými otvory (poloměr $a$, vzdálenost středů $2e$) jsou za tepla zalisovány kruhové čepy s poloměry $a(1 + \alpha)$. Jde o určení napjatosti desky a čepů.

Předpokládáme při tom, že materiál desky i čepů je homogenní, a má stejné elastické vlastnosti.

Zalisování čepů se provede tím způsobem, že desku ohřejeme tak, aby kruhové otvory se teplotou zvětšily a čepy (neohřáté) se daly do těchto otvorů zalisovati. Po vychladnutí desky vznikne mezi čepem a kruhovým otvorem tlak a tím deska i čepy se dostanou do napjatého stavu, jehož zjištění je obsahem této práce.

Jde o nalezení napjatosti v desce a v čepech, které musí vyhovovat podmínkám:

a) ve styčné kružnici čepy a desky musí býti průvodiče a napětí radiální a smykové v čepu i v desce stejné,

b) radiální a smykové napětí desky v nekonečnu musí býti nulové.

Řešení problému je provedeno vhodnou volbou t. zv. *Airyho biharmonické funkce napětí* (Brit. Assoc. Rep. 1862, Trans. Roy. Soc. vol. *153*, 1863, p. 49) pro případ dvojdimensionální napjatosti. Je známo, že parciálními derivacemi druhého řádu této jediné funkce se dají vyjádřiti všechna tři napětí v rovině (radiální, obvodové a smykové). Viz na př. Technický průvodce, *III*, 1944, str. 442).

*Značení:*

| | |
|---|---|
| $x\ y$ | souřadnicový systém, |
| $r, \vartheta; r_1, \vartheta_1; r_2, \vartheta_2$ | polární souřadnice podle obr. 1., |
| $e$ | vzdálenost středu kruhového otvoru pro čep od počátku, |
| $a$ | poloměr otvoru, |
| $a\alpha$ | přesazení čepu (= rozdíl poloměrů čepu a kruhovéh ootvoru) |
| $\Phi$ | Airyho funkce napětí, |
| $\nabla^2\Phi \quad =$ | $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2}$, |
| $u, v$ | radiální resp. obvodová deformace, |
| $\widehat{rr}, \widehat{\vartheta\vartheta}, \widehat{r\vartheta}$ | radiální, resp. obvodové a smykové napětí v souřadnicích $r, \vartheta$, |

E modul pružnosti v tahu,

$\nu$ Poissonův poměr (0,3 u oceli).

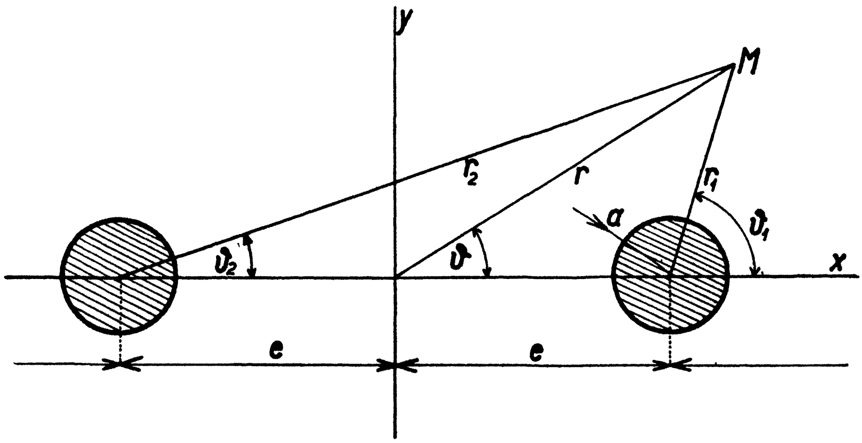
Index $c$ resp. $d$ se vztahuje na čep resp. na desku.

Podstata řešení problému je založena na známém řešení napjatosti jednoho kruhového čepu zalisovaného do otvoru v nekonečné rovině. V tomto případě mají Airyho funkce napětí tvar:

a) pro desku $\Phi_d = A \log \frac{r_1}{a}$ ,

b) pro čep $\Phi_c = B\, r_1^2$ .

Těmito funkcemi (resp. jejich derivacemi) se dá vyjádřit napjatost v každém místě desky a čepu.




Obr. 1.

Přičteme-li k těmto funkcím touž biharmonickou (po případě harmonickou) funkci, znamená to, že jsme na původní stav napjatosti superponovali nový, který sice změní napětí ve styčné kružnici čepu s deskou, ale tak, že obě změny budou stejné, takže krajové podmínce a) bude zase vyhověno.

Za tuto superponovanou Airyho funkci volíme $A \log \frac{r_2}{a}$ a dokážeme v dalším, že všem krajovým podmínkám je vyhověno a kromě toho vypočteme napětí v čepu a v desce, do níž jsou zalisovány dva čepy (se stejnými poloměry).

Zvolme tedy tyto Airyho funkce napětí:

1. pro desku:

$$\Phi_d = A \log \frac{r_1}{a} + A \log \frac{r_2}{a} , \qquad (1,0)$$

2. pro čep 1:

$$\Phi_1 = \mathrm{B}\, r_1^2 + \mathrm{A} \log \frac{r_2}{a} \,, \tag{1,1}$$

resp. pro čep 2:

$$\Phi_2 = Br_2^2 + \mathrm{A} \log \frac{r_1}{a} \,. \tag{1,2}$$

Formule pro jednotlivá napětí v polárních souřadnicích $r$, $\vartheta$:

$$\widehat{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} = \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \,, \tag{2,1}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \,, \tag{2,2}$$

$$\widehat{r\vartheta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) \,, \tag{2,3}$$

a pro deformace:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\mathrm{E}} (\widehat{rr} - \nu \widehat{\vartheta\vartheta}) \,, \tag{3,1}$$

$$\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\mathrm{E}} (\widehat{\vartheta\vartheta} - \nu \widehat{rr}) \,, \tag{3,2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{1}{\mathrm{G}} \widehat{r\vartheta} \,. \tag{3,3}$$

Krajové podmínky problému:
Na obvodě čepů musí býti

$$a(1 + \alpha) + u_c = a + u_d \,, \tag{4,1}$$

$$v_c = v_d \,, \tag{4,2}$$

$$\widehat{rr}_c = \widehat{rr}_d \,, \tag{4,3}$$

$$\widehat{r\vartheta}_c = \widehat{r\vartheta}_d \,. \tag{4,4}$$

Všem podmínkám vyhovíme vhodnou volbou konstant A, B.

Pro další výpočet užijeme těchto vztahů:

$$r_2^2 = r_1^2 + 4e^2 + 4er_1 \cos \vartheta_1 \,, \tag{5,1}$$

tedy

$$\frac{\partial r_2}{\partial r_1} = \frac{r_1 + 2e \cos \vartheta_1}{r_2}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta_1} = - \frac{2er_1 \sin \vartheta_1}{r_2} \,. \tag{5,2}$$

Pak

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial r_1} = \frac{\mathrm{A}}{r_1} + \mathrm{A} \frac{r_1 + 2e \cos \vartheta_1}{r_2^2} \,, \tag{6,1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial r_1^2} = - \mathrm{A} \frac{1}{r_1^2} + \mathrm{A} \left[ \frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e \cos \vartheta_1)^2}{r_2^4} \right] \,, \tag{6,2}$$

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial \vartheta_1} = - \mathrm{A} \frac{2er_1 \sin \vartheta_1}{r_2^2} \,, \tag{6,3}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial \vartheta_1^2} = -A \left[ \frac{2er_1 \cos \vartheta_1}{r_2^2} + \frac{8e^2 r_1^2 \sin^2 \vartheta_1}{r_2^4} \right] , \tag{6,4}$$

$$\nabla_1^2 \Phi_a = 0 \ . \tag{6,5}$$

A tedy napětí v desce v souřadnicích $r$, $\vartheta$:

$$(\widehat{r_1 r_1})_d = -(\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1})_d = -\frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial r_1^2} = A \frac{1}{r_1^2} - A \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \log \frac{r_2}{a} , \tag{7,1}$$

$$(\widehat{r_1 \vartheta_1})_d = -\frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{A}{r_1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \log \frac{r_2}{a} \right) . \tag{7,2}$$

Pro radiálnou deformaci podle (3,1) platí:

$$\frac{\partial u_d}{\partial r_1} = -\frac{1}{E} (1 + \nu) \frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial r_1^2} , \tag{7,3}$$

a integrací

$$\underline{u_d = -\frac{1}{E} (1 + \nu) \frac{\partial \Phi_d}{\partial r_1}} = -\frac{1}{E} (1 + \nu) A \left( \frac{1}{r_1} + \frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial r_1} \right) \tag{7,4}$$

(integrační konstanta $= 0$, neboť pro lim $r_1 = \infty$, musí být $u_d = 0$).

**Čep I.**

$$\Phi_1 = B r_1^2 + A \log \frac{r_2}{a} , \tag{8,1}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1} = 2B r_1 + A \frac{r_1 + 2e \cos \vartheta_1}{r_2^2} , \tag{8,2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r_1^2} = 2B + A \left[ \frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e \cos \vartheta_1)^2}{r_2^4} \right] , \tag{8,3}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta_1} = -A \frac{2er_1 \sin \vartheta_1}{r_2^2} , \tag{8,4}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \vartheta_1^2} = -A \left[ \frac{2er_1 \cos \vartheta_1}{r_2^2} + \frac{8e^2 r_1^2 \sin^2 \vartheta_1}{r_2^4} \right] , \tag{8,5}$$

$$\underline{\nabla_1^2 \Phi_1 = 4B} \ . \tag{8,6}$$

Napětí v čepu 1 v souřadnicích $r_1$, $\vartheta_1$:

$$\widehat{r_1 r_1}_c = 4B - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r_1^2} = 2B - A \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \log \frac{r_2}{a} , \tag{9,1}$$

$$\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1}_c = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r_1^2} = 2B + A \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \log \frac{r_2}{a} , \tag{9,2}$$

$$\widehat{r_1 \vartheta_1} = -\frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{A}{r_1} \frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial \vartheta_1} \right) , \tag{9,3}$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial r_1} = \frac{1}{E} \left[ 4B - (1 + \nu) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r_1^2} \right] ; \tag{9,4}$$

integrací:

$$u_c = \frac{1}{E}\left[4Br_1 - (1+\nu)\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1}\right] = \frac{1}{E}\left[2B(1-\nu)r_1 - A(1+\nu)\frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right] ; \tag{9,5}$$

(integrační konstanta = 0, neboť pro $r_1 = 0$ musí být $u_c = 0$). Po dosazení do (4,1) pro $r_1 = a$:

$$a\alpha = -\frac{1}{E}(1+\nu)A\left[\frac{1}{a} + \left(\frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right)_{r_1=a}\right] -$$

$$-\frac{1}{E}(1-\nu)2Ba + \frac{1}{E}(1+\nu)A\left(\frac{\partial \log \frac{r_2}{a}}{\partial r_1}\right)_{r_1=a},$$

a tedy

$$\underline{E\alpha a^2 = -A(1+\nu) - 2B(1-\nu)a^2} . \tag{10,1}$$

Normální napětí na obvodě čepu ($r_1 = a$) musí býti stejné, (podmínka (4,3)) jako na obvodě otvoru v desce:

$$2B - A\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\right)_{r_1=a} = A\frac{1}{a^2} - A\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\log\frac{r_2}{a}\right)_{r_1=a},$$

odtud

$$\underline{A = 2Ba^2} , \tag{10,2}$$

tedy

$$Ea^2\alpha = -4Ba^2 ,$$

$$A = 2Ba^2 = -\tfrac{1}{2}Ea^2\alpha ; \tag{10,3}$$

tangenciální napětí $\widehat{r_1\vartheta_1}$ pro $r_1 = a$ jsou u čepu i desky identická. Tím jsou určeny konstanty A, B. Snadno zjistíme, že pro takto určené A, B jsou i podmínky (4,2) a (4,4) splněny.

Je tedy

$$\Phi_d = -\tfrac{1}{2}Ea^2\alpha\left(\log\frac{r_1}{a} + \log\frac{r_2}{a}\right) , \tag{11,1}$$

$$\Phi_{c1} = -\tfrac{1}{2}Ea^2\alpha\left[\frac{r_1^2}{2a^2} + \log\frac{r_2}{a}\right] . \tag{11,2}$$

Napětí na obvodě $r_1 = a$:

u desky:

$$(\widehat{r_1 r_{1d}})_{r_1=a} = -(\widehat{\vartheta_1\vartheta_{1d}})_{r_1=a} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}Ea^2\alpha\left[\frac{1}{a^2} + \frac{a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2\cos 2\vartheta_1}{(a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2)^2}\right] , \tag{12,1}$$

$$(\widehat{r_1\vartheta_{1d}})_{r_1=a} = 2Ea^2\alpha\frac{e\sin\vartheta_1(a + 2e\cos\vartheta_1)}{(a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2)^2} , \tag{12,2}$$

u čepu:

$$(\widehat{r_1 r_1}_c)_{r_1=a} = (\widehat{r_1 r_1}_d)_{r_1=a} \ , \tag{12,3}$$

$$(\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1}_c)_{r_1=a} = -\mathrm{E}a^2\alpha - (\widehat{r_1 r_1}_c)_{r_1=a} \ , \tag{12,4}$$

$$(\widehat{r_1 \vartheta_1}_c)_{r_1=a} = (\widehat{r_1 \vartheta_1}_d)_{r_1=a} \ . \tag{12,5}$$

Napětí v čepu obecně:

$$\widehat{r_1 r_1}_c = \frac{\mathrm{A}}{a^2} - \mathrm{A}\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)^2}{r_2^4}\right] , \tag{13,1}$$

$$\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1}_c = \frac{\mathrm{A}}{a^2} + \mathrm{A}\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{2(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)^2}{r_2^4}\right] , \tag{13,2}$$

$$\widehat{r_1 \vartheta_1}_c = -4\mathrm{A}\,\frac{e\sin\vartheta_1\,(r_1 + 2e\cos\vartheta_1)}{r_2^4} \ . \tag{13,3}$$

Speciálně pro střed čepu, kde $r_1 = 0$, $r_2 = 2e$

$$\begin{aligned} (\widehat{r_1 r_1}_c)_0 &= \frac{\mathrm{A}}{a^2} + \frac{\mathrm{A}}{4e^2}\cos 2\vartheta_1 \ , \\ (\widehat{\vartheta_1 \vartheta_1}_c)_0 &= \frac{\mathrm{A}}{a^2} - \frac{\mathrm{A}}{4e^2}\cos 2\vartheta_1 \ , \\ (\widehat{r_1 \vartheta_1}_c)_0 &= -\frac{\mathrm{A}}{4e^2}\sin 2\vartheta_1 \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Napětí v desce v souřadnicích $r$, $\vartheta$:

$$\Phi_d = \mathrm{A}\left(\log\frac{r_1}{a} + \log\frac{r_2}{a}\right) .$$

Z obr. 1 je patrno, že

$$r_1^2 = r^2 + e^2 - 2er\cos\vartheta, \quad r_2^2 = r^2 + e^2 + 2er\cos\vartheta \ ,$$

a tedy

$$\frac{\partial r_1}{\partial r} = \frac{r - e\cos\vartheta}{r_1} , \quad \frac{\partial r_2}{\partial r} = \frac{r + e\cos\vartheta}{r_2} , \tag{15}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \vartheta} = \frac{er\sin\vartheta}{r_1} , \quad \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta} = -\frac{er\sin\vartheta}{r_2} ,$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial \Phi_d}{\partial r} = \frac{r - e\cos\vartheta}{r_1^2} + \frac{r + e\cos\vartheta}{r_2^2} ,$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial r^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{(2(r - e\cos\vartheta)^2}{r_1^4} - \frac{2(r + e\cos\vartheta)^2}{r_2^4} , \tag{16}$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial \Phi_d}{\partial \vartheta} = \frac{er\sin\vartheta}{r_1^2} - \frac{er\sin\vartheta}{r_2^2} ,$$

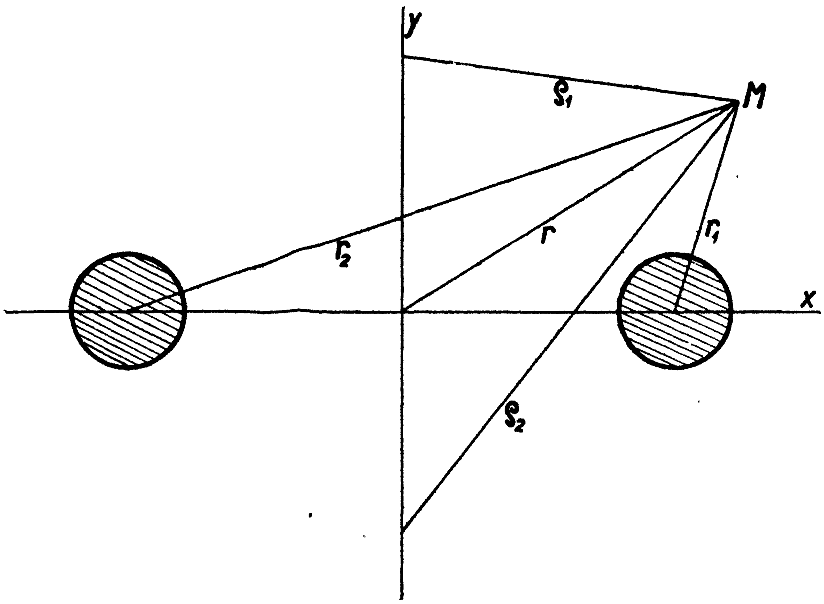
$$\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial \vartheta^2} = \frac{er\cos\vartheta}{r_1^2} - \frac{er\cos\vartheta}{r_2^2} - 2e^2r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4}\right) .$$

Tedy

$$\widehat{rr}_d = A\left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - 2e^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^2}\right)\right] = -\widehat{\vartheta\vartheta}_d\,, \tag{17,1}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_e = -\widehat{rr}_d\,,$$

$$\widehat{r\vartheta}_d = A\,.\,2e\sin\vartheta\left[\frac{r - e\cos\vartheta}{r_1^4} - \frac{r + e\cos\vartheta}{r_2^4}\right]. \tag{17,2}$$




Obr. 2.

Hlavní napětí v desce:

$$\sigma_{1,2} = \tfrac{1}{2}(\widehat{rr} + \widehat{\vartheta\vartheta}) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4(\widehat{r\vartheta})^2 + (\widehat{rr} - \widehat{\vartheta\vartheta})^2}\,,$$

$$\sigma_{1,2} = \pm\, 2A\,.\,\frac{\sqrt{(r^2 + e^2 - 2er\sin\vartheta)(r^2 + e^2 + 2er\sin\vartheta)}}{r_1^2 r_2^2}\,, \tag{18,1}$$

$$= \pm\, Ea^2\alpha\,\frac{\varrho_1\varrho_2}{r_1^2 r_2^2}\,, \tag{18,2}$$

kde

$$\begin{aligned}\varrho_1^2 &= r^2 + e^2 - 2er\sin\vartheta\,,\\ \varrho_2^2 &= r^2 + e^2 + 2er\sin\vartheta\,,\end{aligned} \tag{18,3}$$

($\varrho_{12}$ jsou vzdálenosti vyšetřovaného bodu od bodů na ose $y$ ve vzdálenostech $\pm\, e$).

Napětí v těchto bodech je $= 0$.

Dá se tedy po úpravě psát:

$$\sigma_{12} = \pm\ \mathrm{E}a^2\alpha\,\frac{\sqrt{r^4 + e^4 + 2e^2r^2\cos 2\vartheta}}{r^4 + e^4 - 2e^2r^2\cos 2\vartheta}\ . \tag{18,4}$$

Napětí v desce:

1. Podél osy $x$:

tedy pro

$$\vartheta = 0,\ r_1 = r - e,\ r_2 = r + e$$

$$\widehat{rr}_x = -\widehat{\vartheta\vartheta}_x = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha\left[\frac{1}{(r-e)^2} + \frac{1}{(r+e)^2}\right],\ \widehat{r\vartheta}_x = 0\ . \tag{19,1}$$

2. Podél osy $y$:

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi,\ r_1^2 = r_2^2 = r^2 + e^2\ ,$$

$$\widehat{rr}_y = -\widehat{\vartheta\vartheta}_y = -\mathrm{E}a^2\alpha\,\frac{r^2 - e^2}{(r^2 + e^2)^2}\ . \tag{19,2}$$

Napětí mezi čepem a deskou:

$$(\widehat{r_1 r_{1c}})_{r_1 = a} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha\left\{\frac{1}{a^2} + \frac{a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2\cos 2\vartheta_1}{(a^2 + 4ae\cos\vartheta_1 + 4e^2)^2}\right\}\ . \tag{20,1}$$

Extrémní hodnoty budou v bodech, kde derivace závorky = 0: Je to

1. pro $\vartheta_1 = 0$, resp. $\pi$,

tam bude radiální napětí

$$(\widehat{r_1 r_{1c}})_{r_1 = a,\ \vartheta_1 = 0} = -\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a + 2e)^2}\right]\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha\ , \tag{20,2}$$

$$(\widehat{r_1 r_{1c}})_{r_1 = a,\ \vartheta_1 = \pi} = -\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2e - a)^2}\right]\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha\ , \tag{20,3}$$

2. pro $\bar{\vartheta}_1$, pro něž

$$\cos\bar{\vartheta}_1 = \frac{a(a^2 - 12e^2)}{16e^3}\ . \tag{20,4}$$

Tam bude radiální napětí

$$(\widehat{r_1 r_{1c}})_{r_1 = a,\ \bar{\vartheta}_1} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{E}a^2\alpha\,\frac{32e^4 - 24a^2e^2 + 3a^4}{2a^2(4e^2 - a^2)^2}\ . \tag{20,5}$$

Čitatel se dá psát také

$$8e^2(4e^2 - 3a^2) + 3a^4$$

a tedy pro $e > a$ je i čitatel stále $> 0$.

Tedy i radiální napětí v místě $\bar{\vartheta}_1$ je tlak a to nejmenší na celém obvodě čepu.

Rovnice křivek, podél nichž mají hlavní napětí konstantní hodnotu, zní:

$$\frac{\varrho_1\varrho_2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{c}{e^2}\ , \tag{21}$$

kde $c$ je bezrozměrný konstantní faktor, který vyjadřuje poměr hlavního napětí $\sigma$ v uvažovaném bodě k hlavnímu napětí v počátku $\sigma_0$ tedy $c = \frac{\sigma}{\sigma_0}$.

Užijeme-li vztahů pro $\varrho_1, \varrho_2, r_1, r_2$, dostaneme:

$$\varrho_1^2\varrho_2^2 = r^4 + e^4 + 2e^2r^2 \cos 2\vartheta \ ,$$

$$r_1^2r_2^2 = r^4 + e^4 - 2e^2r^2 \cos 2\vartheta \ .$$

Po dosazení do (21) a úpravě, bude rovnice hledané čáry konstantního hlavního napětí:

$$\cos 2\vartheta = \frac{2c^2(u^4+1)+1-\sqrt{8c^2(u^4+1)+1}}{4c^2u^2} \ , \tag{21,1}$$

kde $u = \frac{r}{e}$ .

U odmocniny nutno bráti znaménko záporné, aby vyšel $\cos 2\vartheta < 1$. Křivka protíná osu $x(\vartheta = 0)$ obecně ve čtyřech bodech s úsečkami $\pm x_{1,2}$, pro které platí:

$$x_{12}^2 = \frac{2c+1 \pm \sqrt{8c+1}}{2c}, \text{ resp. } x_2^2 = \frac{3-x_1^2}{1+x_1^2} \ . \tag{21,2}$$

Pokud je $c < 1$, jsou jen 2 průsečíky reálné, pro $c = 1$ má křivka tvar ležaté „osmičky" s dvojným bodem v počátku, pro $c > 1$ protíná osu ve čtyřech reálných bodech a rozpadá se na dva ovály symetricky položené k ose $y$ a ležící uvnitř smyček křivky $c = 1$.

Průsečíky s osou $y$ dostaneme dosazením $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

Pro jejich pořadnice platí:

$$y_1^2 = \frac{-2c-1+\sqrt{8c+1}}{2c} \ ; \tag{21,3}$$

(platí jen kladné znaménko u odmocniny a hodnota $y_1$ je reálná pouze pro $c \leqq 1$);

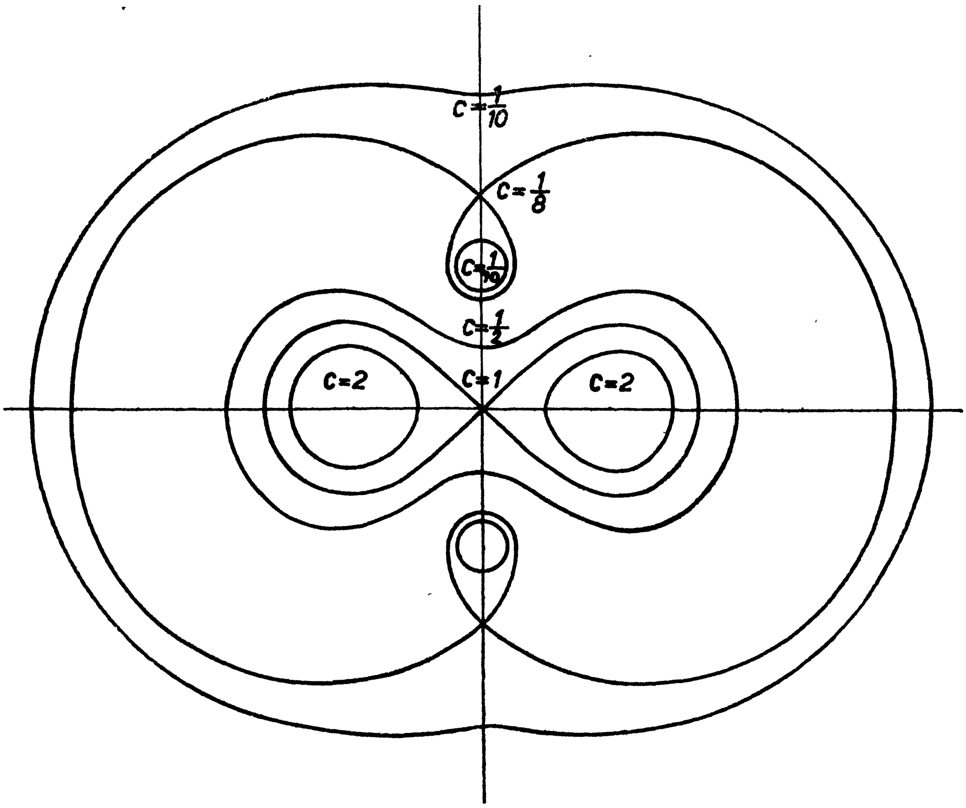
resp. $$y_{23}^2 = \frac{-2c+1 \pm \sqrt{1-8c}}{2c}, \text{ takže } y_3^2 = \frac{y_2^2+3}{y_2^2-1} \ . \tag{21,4}$$

Je vidět, že pro $c < \frac{1}{8}$ protíná křivka osu $y$ celkem ve třech párech (k ose $x$ symetricky položených) bodů: $\pm y_1$, $\pm y_2$, $\pm y_3$, a pro $c < \frac{1}{8}$ pouze v jednom páru bodů $\pm y_1$.

Označíme-li $\sigma_0$ hlavní napětí v počátku $= \frac{Ea^2\alpha}{e^2}$, $\sigma$ absolutní hodnotu hlavního napětí v obecném bodě, značí konstantní faktor $c = \frac{\sigma}{\sigma_0}$. V obr. 3 byly zakresleny křivky konstantních hlavních napětí pro různé hodnoty $c$.

Průsečíky s osami jsou uvedeny v tabulce.

| $c$ | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,488 | 0 | 2,05 | 3,26 | 3,565 | 4,77 |
| $x_2$ | 1,51 | $\sqrt{3} = 1{,}732$ | imag | imag | imag | imag |
| $y_1$ | imag | 0 | 0,486 | 0,8105 | 0,842 | 0,913 |
| $y_2$ | imag | imag | imag | $\sqrt{3} = 1{,}732$ | 1,328 | 1,12 |
| $y_3$ | imag | imag | imag | $\sqrt{3} = 1{,}732$ | 2,497 | 4,10 |




Obr. 3.

## Резюме.

## НАПРЯЖЕННОСТЬ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ С ДВУМЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПАЛЬЦАМИ



МИЛОСЛАВ ГАМПЛ (Miloslav Hampl), Прага.



(Поступило в редакцию 2. X. 1953 г.)



В работе решается проблема напряженности бесконечной плиты с двумя цилиндрическими палцами того же радиуса $a(1+\alpha)$, запрессованными в отверстия нагретой плиты, радиусы которых равны $a$. Выведены напряжения в посярных координатах и также главные рапряжения в плите. Графически изображены линии постоянных главных напряжений.

## Summary.

## STRESS IN AN INFINITE PLANE WITH TWO SHRINK-FITTED CIRCULAR PINS



MILOSLAV HAMPL, Prague.



(Received October 2, 1953.)



In this article problem of the stress in an infinite plane with two shrink-fitted circular pins is solved.

Airy's stress-functions for the problem of one circular pin in an infinite plane are: $\Phi_d = \mathrm{A} \log \frac{r_1}{a}$ (for plane), $\Phi_c = \mathrm{B} r_1^2$ (for pin). By superposition of the function $\mathrm{A} \log \frac{r_2}{a}$ we get the stress-functions.

$$\Phi_d = \mathrm{A} \log \frac{r_1}{a} + \mathrm{A} \log \frac{r_2}{a}$$

for the plane with two pins,

$$\Phi_1 = \mathrm{B} r_1^2 + \mathrm{A} \log \frac{r_2}{a}$$

for the first pin,
and similarly

$$\Phi_2 = \mathrm{B} r_2^2 + \mathrm{A} \log \frac{r_1}{a}$$

for the second pin.

These functions describe the state of stress in the plane with two shrink fitted pins (both of the same radius $a$) and also in the pins themselves.

The article deals with the derivation of the constants A, B and the finding of the expressions for stress and deformation.