Jan Mařík
Vrcholy jednotkové koule v prostoru funkcionál na daném polouspořádaném prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 1, 3–40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117099

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

VRCHOLY JEDNOTKOVÉ KOULE V PROSTORU FUNKCIONÁL NA DANÉM POLOUSPOŘÁDANÉM PROSTORU

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo 16. ledna 1953.) DT 519.4

Hlavním výsledkem této práce je věta 82, z níž lze pak odvodit jednak věty, které dokazují *Kakutani* a *Bohnenblust* v [2] a [3] o representaci (M)-prostorů, jednak *Hewittovu* větu z [4] o homomorfismech okruhu všech spojitých funkcí na daném topologickém prostoru. Věta 92 pak říká, že pro (L)-prostory platí tvrzení obdobné výsledku, který je v [3] uveden pro (M)-prostory.

ÚVOD

Zatím co Kantorovič, Vulich a Pinsker vyšetřují ve své knize [1] většinou t. zv. K-prostory, budeme si všímat obecnějších prostorů, a to K-lineálů (název je převzat také z [1]). K-lineálem rozumíme, zhruba řečeno, „lineární svaz"; K-prostor by se podobně dal charakterisovat slovy „úplný lineární svaz". Budeme se zabývat zejména normovanými K-lineály a mimo to K-lineály, které jsou zároveň okruhy — tak zvanými K-okruhy. Budeme ovšem předpokládat, že mezi normou (resp. okruhovým násobením) a polouspořádáním platí jisté vztahy.

V K-lineálu lze přirozeným způsobem definovat pojem nezáporné funkcionály; rozdíl dvou nezáporných funkcionál se nazývá regulární funkcionálou. Množina všech regulárních funkcionál na daném K-lineálu tvoří opět K-lineál (dokonce K-prostor). Je-li původní K-lineál normovaný, tvoří množina všech funkcionál, které jsou při této normě spojité, opět K-lineál; ten je vždy částí K-lineálu všech regulárních funkcionál. Je-li původní K-lineál K-okruhem, lze normovat celou množinu regulárních funkcionál.

Naznačíme nyní hlavní výsledky tohoto článku. *Vrcholem* množiny (která je částí nějakého lineárního prostoru) nazveme takový její bod, který není vnitřním bodem žádné úsečky, obsažené v této množině. *Multiplikativní funkcionálou* nazveme regulární funkcionálu f na K-lineálu Y takovou, že $f(a) . f(b) = 0$, kdykoli a, b jsou prvky Y takové, že $a \wedge b = 0$. (Symboly $\vee$, $\wedge$ značí svazové operace v Y). Pak platí:

a) *Buď Y normovaný K-lineál, kde pro libovolné nezáporné prvky x, y je* $\|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$. *Pak vrcholy jednotkové koule v prostoru všech spojitých funkcionál na Y jsou právě všechny (spojité) multiplikativní funkcionály s normou* 1.

b) *Je-li Y K-okruh, jsou vrcholy jednotkové koule v prostoru všech regulárních funkcionál právě všechny regulární funkcionály tvaru $\pm h$, kde h je okruhový homomorfismus; kladnými vrcholy jsou právě všechny okruhové homomorfismy, které jsou regulárními funkcionálami.* (Zmínili jsme se, že v prostoru všech regulárních funkcionál na K-okruhu lze definovat normu.)

Věty a) i b) jsou důsledky věty 82 této práce. Použijeme-li dále věty a) a důkazu první věty z [5], dostaneme snadno KAKUTANIHO větu z [2] o representaci (M)-prostorů (v našem označení M-lineálů; viz větu 91 a poznámku k větě 92). Podobného postupu používají též BOHNENBLUST a KAKUTANI v [3] a dokazují zároveň, že předpoklad $x \wedge y \geqq 0 \Rightarrow \|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ plyne již ze slabšího předpokladu $x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$. Věta 92 této práce říká, že také ze vztahu $x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ plyne $x \wedge y \geqq 0 \Rightarrow \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. (Symbol $\|x\|$ značí ovšem normu prvku $x \in Y$, kde Y je nějaký normovaný K-lineál.)

Věta b) je pak zřejmým zobecněním věty, kterou uvádí HEWITT ve své práci [4] na str. 184. Hewitt vyslovuje tuto větu pro případ, že daný K-okruh je množina všech spojitých funkcí na daném úplně regulárním topologickém prostoru. (Hewittův důkaz je však nejasný a patrně chybný.) Je-li daný K-okruh množina všech omezených spojitých funkcí na úplně regulárním prostoru, je — jak lze očekávat — množina všech kladných vrcholů jednotkové koule v prostoru všech regulárních funkcionál (to jsou v tomto případě všechna okruhově homomorfní zobrazení na těleso reálných čísel) ve slabé topologii homeomorfní s β-obalem základního topologického prostoru.

Polouspořádané prostory a jejich representace.

1. Množinu Y nazveme *K-lineálem*, má-li tyto vlastnosti:

K 1) Y je reálný lineární prostor.[1])

K 2) Na množině Y je definována relace $\geqq$ (to znamená, že o každé uspořádané dvojici a, b prvků z Y je ustanoveno, zda platí $a \geqq b$ či ne) tak, že platí

K 3) $a \in Y \Rightarrow a \geqq a$,

K 4) $a, b \in Y,\ a \geqq b,\ b \geqq a \Rightarrow a = b$,

K 5) $a, b \in Y,\ a \geqq 0,\ b \geqq 0 \Rightarrow a + b \geqq 0$,

K 6) $\alpha \in E_1$ [2]), $\alpha \geqq 0,\ a \in Y,\ a \geqq 0 \Rightarrow \alpha a \geqq 0$,

K 7) $a, b, c \in Y,\ a \geqq b \Rightarrow a + c \geqq b + c$,

---

[1]) Slovy „lineární prostor" rozumíme to, čemu *Katětov* v [6], def. 1.1, říká „vektorový prostor".

[2]) E_1 značí množinu reálných čísel.

K 8) ke každému $a \in Y$ existuje prvek $a_+ \in Y$ takový, že platí $a_+ \geqq a$, $a_+ \geqq 0$ a že je $c \geqq a_+$, kdykoli $c \in Y$, $c \geqq a$, $c \geqq 0$.

Pro $a, b \in Y$, $a \geqq b$, $a \neq b$ píšeme $a > b$. Je-li tedy $a \geqq b$, je buď $a > b$ nebo $a = b$. Je-li naopak buď $a > b$ nebo $a = b$, je (v druhém případě podle K 3)) také $a \geqq b$. Značí tedy $a \geqq b$ opravdu totéž co „buď je $a > b$ nebo je $a = b$".

Je-li $a > b$, plyne snadno z K 7), že je $a + c > b + c$ pro každé c.

Všimněme si, že podle K 4) nemůže platit zároveň $a \geqq b$, $b > a$ a že je $-b \geqq -a$ ($-b > -a$), kdykoli $a \geqq b$ ($a > b$).

„$a > b$" („$a \geqq b$") čteme obyčejně jako „a je větší než b" („a je větší nebo rovno b").

Místo $a > b$ ($a \geqq b$) píšeme též $b < a$ ($b \leqq a$) a čteme to opět obvyklým způsobem.

Je-li $a > 0$, říkáme, že je a kladné. Význam slov „záporný", „nezáporný", „nekladný" je jistě zřejmý.

Množinu $A \subset Y$ nazveme *shora omezenou*, existuje-li $b \in Y$ tak, že $a \in A \Rightarrow a \leqq b$. Existuje-li dokonce $b \in A$ tak, že $a \in A \Rightarrow a \leqq b$, řekneme, že b je největší prvek množiny A.

Jistě je zřejmé, co znamená „množina zdola omezená", „množina omezená", „nejmenší prvek množiny A" a pod.

2. Nechť $a \geqq b$, $b \geqq c$. Z K 7), K 5) plyne $a - b \geqq 0$, $b - c \geqq 0$, $a - c = (a - b) + (b - c) \geqq 0$, tedy $a \geqq c$. Je-li $a \geqq 0$, $b > 0$, je podle K 5) $a + b \geqq 0$. Kdyby však bylo $a + b = 0$, bylo by $0 = a + b > a + 0 = a$, tedy $0 > a$ ve sporu s $a \geqq 0$; je tedy $a + b > 0$. Odtud opět snadno plyne

$$a \geqq b, \quad b > c \Rightarrow a > c .$$

Je-li $\alpha \in E_1$, $\alpha > 0$, $a \in Y$, $a > 0$, je $\alpha a \neq 0$, tedy $\alpha a > 0$ (kdyby bylo $\alpha a = 0$, měli bychom $0 = \alpha^{-1} . 0 = \alpha^{-1}(\alpha a) = 1 . a = a$).

3. Věta: *Buďte a, b prvky K-lineálu Y. Pak existuje právě jedno $s \in Y$, které má tyto vlastnosti:*

s 1) $s \geqq a$, $s \geqq b$,
s 2) $d \geqq a$, $d \geqq b \Rightarrow d \geqq s$.

Platí pak $s = a + (b - a)_+ = b + (a - b)_+$.

Důkaz: Položme $s_1 = a + (b - a)_+$. Protože $(b - a)_+ \geqq 0$, je $s_1 = a + (b - a)_+ \geqq a$. Dále je $s_1 - a = (b - a)_+ \geqq b - a$, tedy $s_1 \geqq b$. Buď nyní d takové, že $d \geqq a$, $d \geqq b$. Pak je $d - a \geqq 0$, $d - a \geqq b - a$, tedy $d - a \geqq (b - a)_+$, $d \geqq a + (b - a)_+ = s_1$. Prvek s_1 má tedy vlastnosti s 1), s 2); podobně zjistíme, že má tyto vlastnosti také prvek $s_2 = b + (a - b)_+$. Má-li nyní nějaký prvek s vlastnosti s 1), s 2), platí jednak $s \geqq s_1$, jednak $s_1 \geqq s$, tedy $s = s_1$; zejména je tedy $s_1 = s_2$.

4. Prvek $s = a + (b - a)_+$ nazveme *(svazovým) spojením* prvků a, b a označíme
$$s = a \vee b \ .$$

5. Věta: *Buďte a, b prvky K-lineálu Y. Pak existuje právě jedno $p \in Y$, které má tyto vlastnosti:*
p 1) $p \leqq a,\ p \leqq b,$
p 2) $d \leqq a,\ d \leqq b \Rightarrow d \leqq p.$
Platí pak $p = -((-a) \vee (-b))$.

Důkaz: Buď $q = (-a) \vee (-b)$. Pak $q \geqq -a$, $q \geqq -b$, tedy $-q \leqq a$, $-q \leqq b$. Je-li $d \leqq a$, $d \leqq b$, je $-d \geqq -a$, $-d \geqq -b$, tedy $-d \geqq q$, $d \leqq -q$. Prvek $-q$ tedy splňuje p 1) i p 2); zřejmě opět existuje jen jeden takový prvek.

6. Prvek $p = -((-a) \vee (-b))$ nazveme *(svazovým) průsekem* prvků a, b a označíme
$$p = a \wedge b \ .$$

7. Platí zřejmě $a_+ = a \vee 0$, $a \wedge b = -((-a) \vee (-b))$.

8. Věta: *Pro libovolné prvky $a, b, c \in Y$ platí*
$$a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c) \ ,$$
$$a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c) \ .$$

Důkaz: Platí $b \vee c \geqq b$, $b \vee c \geqq c$, tedy $a + (b \vee c) \geqq a + b$, $a + (b \vee c) \geqq$ $\geqq a + c$; jestliže $d \geqq a + b$, $d \geqq a + c$, je $d - a \geqq b$, $d - a \geqq c$, tedy $d - a \geqq b \vee c$, $d \geqq a + (b \vee c)$. Prvek $a + (b \vee c)$ má tedy vlastnosti s 1) i s 2). — Stejně se dokáže druhá rovnost.

9. Věta: *Pro libovolné prvky $a, b, c \in Y$ platí* $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge$ $\wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$.

Důkaz: Buď $s = (a \vee b) \vee c$. Pak $s \geqq a \vee b$, $s \geqq c$, tedy $s \geqq a$, $s \geqq b$, $s \geqq c$, tedy $s \geqq a$, $s \geqq b \vee c$. Je-li naopak $d \geqq a$, $d \geqq b \vee c$, je opět $d \geqq a$, $d \geqq b$, $d \geqq c$, tedy $d \geqq s$. Prvek s má tedy vlastnosti s 1), s 2). Druhý vztah se dokáže podobně; třetí a čtvrtý jsou zřejmé.

10. $a \leqq b \Rightarrow a \vee c \leqq b \vee c$, $a \wedge c \leqq b \wedge c$.
(Zřejmé.)

11. Prvek $a \vee b$ je tedy nejmenším z prvků, které jsou větší nebo rovny a a zároveň větší nebo rovny b; podobně lze charakterisovat prvek $(a \vee b) \vee c$, který nyní můžeme psát jako $a \vee b \vee c$. Obdobná poznámka platí i pro průsek.

12. Položme nyní pro libovolné $a \in Y$
$$a_- = (-a) \vee 0, \quad |a| = a_+ + a_- \ ;$$
pak platí
$$a_+ = a \vee 0 = a + (0 \vee (-a)) = a + a_- \ ,$$
tedy
$$a_+ - a_- = a \ .$$

Vidíme, že lze každý prvek vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných prvků. Pro $p = a \wedge b$ platí $a + (b - p) \geqq a$, $a + b - p \geqq b$, tedy $a + b - p \geqq a \vee b$, $a + b \geqq (a \wedge b) + (a \vee b)$. Podobně platí $-a - b \geqq ((-a) \wedge (-b)) + ((-a) \vee (-b)) = -(a \vee b) - (a \wedge b)$, tedy $a + b \leqq (a \vee b) + (a \wedge b)$. Dostáváme tak

$$a + b = (a \vee b) + (a \wedge b) .$$

Dále je $a_+ + a_- = a \vee 0 + a_- = (a + a_-) \vee a_- = a_+ \vee a_-$, tedy

$$a_+ \wedge a_- = 0 .$$

13. Je-li $b \wedge c \geqq 0$, $a = b - c$, je zřejmě $b \geqq a_+$, tedy $b = a_+ + h$, kde $h \geqq 0$; pak je $c = a_- + h$. Zřejmě $h \leqq b \wedge c$. Je-li dokonce $b \wedge c = 0$, je tedy $h = 0$, $b = a_+$, $c = a_-$.

Pro libovolné prvky b, c platí

$$(b - (b \wedge c)) \wedge (c - (c \wedge b)) = (b + ((-b) \vee (-c))) \wedge (c + ((-c) \vee (-b))) =$$
$$= (0 \vee (b - c)) \wedge (0 \vee (c - b)) = ((b - c)_+) \wedge ((b - c)_-) = 0.$$

Je-li $b \wedge c = k$, $a = b - c$, je též $a = (b - k) - (c - k)$, kde $(b - k) \wedge (c - k) = 0$, tedy

$$a_+ = b - k, \quad a_- = c - k .$$

14. Protože $a \wedge (-a) \leqq a_+ \wedge (a_-) = 0$, je

$$0 = a + (-a) = (a \vee (-a)) + (a \wedge (-a)) \leqq a \vee (-a) .$$

Platí tedy

$$a_+ + a_- = (a_+ \vee a_-) + (a_+ \wedge a_-) = a_+ \vee a_- = (a \vee 0) \vee ((-a) \vee 0) =$$
$$= a \vee (-a) \vee 0 = a \vee (-a) .$$

Dostáváme tak

$$|a| = a_+ + a_- = a \vee (-a) = a_+ \vee a_- .$$

15. Buď $c = a + b$. Je $\pm a \leqq |a|$, $\pm b \leqq |b|$, $\pm c = \pm (a + b) \leqq |a| + |b|$, $|c| = c \vee (-c) \leqq |a| + |b|$, tedy

$$|a + b| \leqq |a| + |b| .$$

Všimněme si, že $a \geqq 0 \Leftrightarrow a_- = 0 \Leftrightarrow a = |a|$.

16. Věta: *Jestliže* $a_1 \wedge a_2 \geqq 0$, $0 \leqq b \leqq a_1 + a_2$, *pak existují* b_1, b_2 *tak, že platí* $0 \leqq b_i \leqq a_i$ $(i = 1, 2)$, $b_1 + b_2 = b$.

Důkaz: Buď $b_1 = b \wedge a_1$, $b_2 = b - b_1$. Pak je $b = b_1 + b_2$, $b_1 \geqq 0$, $b_2 \geqq 0$, $b_1 \leqq a_1$. Dále je $b_1 + a_2 = (b \wedge a_1) + a_2 = (b + a_2) \wedge (a_1 + a_2) \geqq b$, tedy $b_1 + a_2 \geqq b$, $a_2 \geqq b - b_1 = b_2$. Tím je vše dokázáno.

Poznámka. Buďte a, b, c nezáporné prvky. Položme $d = a \wedge (b + c)$. Protože $d \leqq b + c$, existují $e \geqq 0$, $f \geqq 0$ tak, že platí $e \leqq b$, $f \leqq c$, $e + f = d$. Pak je $e \leqq d \leqq a$, $f \leqq d \leqq a$, tedy $e \leqq a \wedge b$, $f \leqq a \wedge c$; odtud plyne

$$a \wedge (b + c) = d = e + f \leqq a \wedge b + a \wedge c .$$

Je-li zejména $a \wedge b = a \wedge c = 0$, je též $a \wedge (b + c) = 0$.

Platí-li $b = \sum_{i=1}^{m} b_i$, $c = \sum_{j=1}^{n} c_j$ a je-li $b_i \wedge c_j = 0$ pro všechna i, j, plyne z předešlého snadno, že je též $b \wedge c = 0$. Je-li pak $a = b - c$, je $b = a_+$, $c = a_-$.

17. Věta: *Buďte a, b libovolné prvky K-lineálu Y. Pak platí*

$$a_+ - b_+ \leqq (a - b)_+, \quad |a_+ - b_+| \leqq |a - b| \ .$$

Důkaz: Platí $a_+ \wedge (b + a_-) \leqq a_+ \wedge (b_+ + a_-) \leqq a_+ \wedge b_+ + a_+ \wedge a_- \leqq b_+$, tedy

$$a_+ - b_+ \leqq a_+ - (a_+ \wedge (b + a_-)) = (a + a_-) - ((a \wedge b) + a_-) = a - a \wedge b = \\ = (a - b)_+$$

(podle 13). Dále je $b_+ - a_+ \leqq (b - a)_+ = (a - b)_-$, tedy $|a_+ - b_+| = (a_+ - b_+) \vee (b_+ - a_+) \leqq ((a - b)_+) \vee ((a - b)_-) = |a - b|$.

18. Věta: *Nechť a, b, c $\in$ Y. Pak platí*

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \ ,$$
$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) \ .$$

Důkaz: Napřed dokážeme, že platí

$$(a \wedge b)_+ = a_+ \wedge b_+ \ . \qquad (*)$$

Buď $d = a \wedge b$. Je $d \wedge 0 \leqq a \wedge 0$, $-d_- \leqq -a_-$, tedy

$$a = a_+ - a_- \geqq a_+ - d_- \ .$$

Podobně se dokáže vztah

$$b \geqq b_+ - d_-;$$

dostáváme tak

$$d = a \wedge b \geqq (a_+ - d_-) \wedge (b_+ - d_-) = (a_+ \wedge b_+) - d_-,$$

tedy

$$(a \wedge b)_+ = d_+ = d + d_- \geqq a_+ \wedge b_+ \ .$$

Protože však $a_+ \geqq d_+$, $b_+ \geqq d_+$, platí též $a_+ \wedge b_+ \geqq d_+ = (a \wedge b)_+$; odtud plyne (*).

Nyní je $(a \wedge b) \vee c = \{[(a - c) \wedge (b - c)] \vee 0\} + c = \{[(a - c) \vee 0] \wedge [(b - c) \vee 0]\} + c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$. Dále platí $(a \vee b) \wedge c = -\{[-(a \vee b)] \vee (-c)\} = -\{[(-a) \wedge (-b)] \vee (-c)\} = -\{[(-a) \vee (-c)] \wedge [(-b) \vee (-c)]\} = -\{[-(a \wedge c)] \wedge [-(b \wedge c)]\} = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

19. Věta: *Jestliže* $0 \leqq \alpha \in E_1$, $a, b \in Y$, *pak* $\alpha(a \vee b) = \alpha a \vee \alpha b$, $\alpha(a \wedge b) = \alpha a \wedge \alpha b$.

Důkaz: Zřejmě

$$\alpha(a \vee b) \geqq \alpha a \vee \alpha b \ .$$

Pro $\alpha = 0$ platí zde ovšem rovnost; pro $\alpha > 0$ platí také $\frac{1}{\alpha}(\alpha a \vee \alpha b) \geqq$ $\geqq \left(\frac{1}{\alpha} . \alpha a\right) \vee \left(\frac{1}{\alpha} . \alpha b\right) = a \vee b$, tedy

$$\alpha a \vee \alpha b \geqq \alpha(a \vee b) \; .$$

Odtud plyne

$$\alpha(a \vee b) = \alpha a \vee \alpha b \; .$$

Dosadíme-li sem $-a$, $-b$ za a, b, dostaneme

$$\alpha(a \wedge b) = \alpha a \wedge \alpha b \; .$$

Poznámka 1. Z této věty plyne zejména, že pro $\alpha \geqq 0$ platí vždy

$$(\alpha a)_+ = \alpha a \vee 0 = \alpha a \vee \alpha 0 = \alpha(a \vee 0) = \alpha a_+ \; ;$$

pro libovolné $\alpha \in E_1$ pak máme

$$|\alpha|\,|a| = |\alpha|\,(a \vee (-a)) = (|\alpha| a) \vee (|\alpha|\,(-a)) = (\alpha a) \vee (-\alpha a) = \\ = |\alpha a| \; .$$

Poznámka 2. Čtenář si jistě všiml, že jsme málokde použili toho, že Y je lineární prostor. Kdybychom místo K 1) (viz 1) předpokládali jen, že Y je Abelova grupa a kdybychom vynechali K 6), dostali bychom definici t. zv. K-grupy a většina dosavadních výsledků by zůstala v platnosti.

Je-li na nějaké množině definována transitivní relace $\geqq$, která splňuje podmínky K 3) a K 4), říká se této relaci polouspořádání a příslušná množina se nazývá *polouspořádanou*. Polouspořádaná množina, v níž ke každé dvojici a, b existují prvky s, p o vlastnostech s 1), s 2) a p 1), p 2) (viz 3 a 5), se nazývá *svaz*. K-lineál by se tedy mohl nazvat také „lineárním svazem“.

Platí-li v nějakém svazu Y věta 18, nazývá se tento svaz *distributivním*. Vidíme, že je každý K-lineál (ba dokonce každá K-grupa) distributivním svazem.

20. Věta: *Budiž Y K-lineál. Nechť pro lineární prostor $Y_1 \subset Y$ platí*

1) $a \in Y_1 \Rightarrow a_+ \in Y_1$,

2) $0 \leqq a \leqq b, \quad a \in Y, \quad b \in Y_1 \Rightarrow a \in Y_1$.

Definujme v prostoru Y/Y_1 relaci $\geqq$ tímto předpisem: Jestliže $T, V \in Y/Y_1$, pak $T \geqq V$ znamená, že existuje $x \in T$ a $y \in V$ tak, že $x \geqq y$. Pak je Y/Y_1 K-lineál.

Důkaz: Zřejmě platí K 1), K 2), K 3), K 5), K 6), K 7). Máme dokázat, že platí také K 4) a K 8). Nechť tedy T, $V \in Y/Y_1$, $T \geqq V$, $V \geqq T$. Pak existují $x_i \in T$, $y_i \in V$ tak, že platí $x_1 \geqq y_1$, $y_2 \geqq x_2$. Protože $x_1 - x_2 \in Y_1$, $y_2 - y_1 \in Y_1$, platí též $x_1 - x_2 + y_2 - y_1 \in Y_1$. Protože však $0 \leqq x_1 - y_1 \leqq (x_1 - y_1) + (y_2 - x_2) = x_1 - x_2 + y_2 - y_1 \in Y_1$, platí podle 2) $x_1 - y_1 \in Y_1$, tedy $T = V$.

Zvolme nyní $T \in Y/Y_1$, $x, y \in T$. Pak je $x - y \in Y_1$. Podle 17 je $x_+ - y_+ \leqq \leqq (x - y)_+$; podle 1) platí tedy

$$0 \leqq (x_+ - y_+)_+ \leqq (x - y)_+ \in Y_1 \ .$$

Z 2) nyní plyne

$$(x_+ - y_+)_+ \in Y_1 \ .$$

Podobně je

$$(x_+ - y_+)_- = (y_+ - x_+)_+ \in Y_1 \ ,$$

tedy

$$x_+ - y_+ \in Y_1 \ .$$

Vidíme, že všechny prvky x_+ pro $x \in T$ padnou do téže třídy; označme ji T_+. Zřejmě $T_+ \geqq 0$, $T_+ \geqq T$. Jestliže $S \geqq 0$, $S \geqq T$, existují $s_1, s_2 \in S$, $t \in T$ tak, že $s_1 \geqq 0$, $s_2 \geqq t$. Protože $(s_1)_+ = s_1 \in S$, patří též $(s_2)_+$ do S a platí $(s_2)_+ \geqq \geqq t_+ \in T_+$; je tedy $S \geqq T_+$.

Tím je vše dokázáno.

21. *Archimedovským K-lineálem* nazveme K-lineál Y, kde pro žádné $a \neq 0$ není množina $\{a, 2a, 3a, \ldots\}$ omezená.

Poznámka. Jestliže množina $\{a, 2a, 3a, \ldots\}$ není (shora) omezená pro žádné $a > 0$, je již Y archimedovský K-lineál; je-li pak totiž $b \leqq na \leqq c$ pro $n = 1, 2, \ldots$, je $(na)_+ = n \, . \, a_+ \leqq c_+$ pro každé n, tedy $a_+ = 0$, podobně $a_- = 0$, $a = 0$.

22. *Kj-lineálem* nazveme archimedovský K-lineál Y, který obsahuje prvek j takový, že lze ke každému $a \in Y$ určit přirozené číslo n tak, že platí

$$a < nj \ .$$

Prvek j, který je zřejmě kladný, nazveme *jednotkou* Kj-lineálu Y.

Poznámka 1. Mohli bychom zřejmě definovat též pojem nearchimedovského Kj-lineálu. Je-li na př. T nějaké nearchimedovsky uspořádané nadtěleso tělesa reálných čísel a je-li Y okruh všech prvků z T, které leží mezi nějakými dvěma reálnými čísly, mohli bychom pokládat Y za nearchimedovský Kj-lineál, kde jednotkou je číslo 1. Protože však budeme dále mluvit jen o archimedovských Kj-lineálech, dali jsme raději slovo „archimedovský" přímo do definice.

Poznámka 2. Je-li j jednotka Kj-lineálu Y a je-li α kladné číslo, je αj zřejmě opět jednotkou. Každý Kj-lineál má tedy nekonečně mnoho jednotek.

23. Konečnou funkci f na lineárním prostoru Y nazveme *aditivní (homogenní)*, platí-li

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$
$$(\text{resp. } \alpha f(a) = f(\alpha a)) \ ,$$

kdykoli $a, b \in Y$, $\alpha \in E_1$.

Poznámka: Stejně lze definovat aditivní (homogenní) zobrazení lineárního prostoru Y do lineárního prostoru Y_1.

24. Konečnou aditivní funkci f na K-lineálu Y nazveme *nezápornou funkcionálou*, platí-li implikace

$$a \in Y,\ a \geqq 0 \Rightarrow f(a) \geqq 0\ .$$

Poznámka. Všimněme si, že pro nezápornou funkcionálu f platí $a \leqq b \Rightarrow \Rightarrow f(a) \leqq f(b)$.

25. Věta: *Buď f nezáporná funkcionála na K-lineálu Y. Pak je f homogenní*,

Důkaz: Je $f(nb) = f(b) + \ldots + f(b) = n \,.\, f(b)$ pro každé přirozené n a každé $b \in Y$, tedy též

$$f(b) = f\left(n \,.\, \frac{b}{n}\right) = n \,.\, f\left(\frac{b}{n}\right),\quad f\left(\frac{b}{n}\right) = \frac{1}{n} \,.\, f(b)$$

pro každé b a každé n. Jsou-li m, n přirozená čísla, $r = \frac{m}{n}$, je $f(rb) = f\left(m \,.\, \frac{b}{n}\right) = m \,.\, f\left(\frac{b}{n}\right) = m \,.\, \frac{1}{n} \,.\, f(b) = r \,.\, f(b)$; protože $-f(rb) = f((-r)b)$, platí $f(rb) = r \,.\, f(b)$ pro každé racionální r a každé $b \in Y$. Zvolme nyní α reálné, $0 < b \in Y$. Nechť r_n, s_n jsou racionální, $r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots,\ r_n \to \alpha$, $s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots,\ s_n \to \alpha$. Pak platí $r_n b \leqq \alpha b \leqq s_n b$, tedy $f(r_n b) \leqq f(\alpha b) \leqq f(s_n b)$ pro každé n. Dále je $f(s_n b) - f(r_n b) = f((s_n - r_n)b) = (s_n - r_n) \,.\, f(b) \to 0$, tedy $f(r_n b) = r_n \,.\, f(b) \to f(\alpha b)$. Avšak $r_n \,.\, f(b) \to \alpha f(b)$, tedy $\alpha f(b) = f(\alpha b)$; totéž ovšem platí také pro $b \leqq 0$ a pro každé $\alpha \in E_1$. Pro libovolné $b \in Y$ je $f(\alpha b) = f(\alpha b_+ - \alpha b_-) = f(\alpha b_+) - f(\alpha b_-) = \alpha f(b_+) - \alpha f(b_-) = \alpha(f(b_+) - f(b_-)) = \alpha f(b_+ - b_-) = \alpha f(b)$.

26. Věta: *Budiž f konečná funkce, definovaná na množině všech nezáporných prvků z K-lineálu Y. Nechť platí*

$$f(a + b) = f(a) + f(b)\ ,$$

kdykoli $a, b \in Y$, $a \wedge b \geqq 0$.

Pak existuje právě jedna aditivní funkce f_1 na K-lineálu Y taková, že platí

$$f_1(a) = f(a)$$

pro každé $a \geqq 0$.

Důkaz: Položme $f_1(a) = f(a_+) - f(a_-)$ (jinou možnost zřejmě nemáme). Nechť $a, b \in Y$, $c = a + b$. Je $c_+ \leqq a_+ + b_+$, tedy $a_+ + b_+ = c_+ + h$, $a_- + b_- = c_- + h$, kde $h \geqq 0$. Pak platí

$$f(a_+) + f(b_+) = f(c_+) + f(h)\ ,$$
$$f(a_-) + f(b_-) = f(c_-) + f(h)\ ,$$

tedy

$$f_1(a) + f_1(b) = f(a_+) - f(a_-) + f(b_+) - f(b_-) = f(c_+) - f(c_-) = \\ = f_1(c)\ .$$

Pro $a \geqq 0$ je zřejmě $f_1(a) = f(a)$.

27. Věta: *Budiž f konečná aditivní funkce na K-lineálu Y. Položme pro každé $a \geqq 0$*

$$f_+(a) = \sup f(x), \quad kde \ 0 \leqq x \leqq a \ .$$

(Může být ovšem $f_+(a) = \infty$.) Pak platí

$$f_+(a + b) = f_+(a) + f_+(b) \ ,$$

kdykoli $a, b \in Y$, $a \wedge b \geqq 0$.

Důkaz: Nechť $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$; pak je $0 \leqq x + y \leqq a + b$, tedy

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leqq f_+(a + b) \ ,$$

tedy

$$f_+(a) + f_+(b) \leqq f_+(a + b) \ .$$

Buď naopak $0 \leqq z \leqq a + b$. Podle 16 existují a', b', $0 \leqq a' \leqq a$, $0 \leqq b' \leqq b$, $a' + b' = z$. Platí tedy

$$f(z) = f(a') + f(b') \leqq f_+(a) + f_+(b) \ ,$$

tedy též

$$f_+(a + b) \leqq f_+(a) + f_+(b) \ .$$

Poznámka. Zřejmě je $f(0) = 0$, $0 \leqq 0 \leqq a$ pro každé $a \geqq 0$; je tedy (pro $a \geqq 0$) vždy $f_+(a) \geqq 0$. Podobně zjistíme, že pro $a \geqq 0$ je $f_+(a) \geqq f(a)$.

28. Funkci f na K-lineálu Y nazveme *regulární funkcionálou*, je-li f rozdílem dvou nezáporných funkcionál. Symbolem

$$R(Y)$$

označíme množinu všech regulárních funkcionál na K-lineálu Y.

29. Věta: *Aditivní funkce f na K-lineálu Y je regulární funkcionálou, právě když je funkce f_+ (definovaná v 27) konečná.*

Důkaz: Buď $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou nezáporné funkcionály. Je-li $0 \leqq x \leqq a$, je $f(x) = f_1(x) - f_2(x) \leqq f_1(x) \leqq f_1(a)$, tedy

$$0 \leqq f_+(a) \leqq f_1(a) < \infty \ .$$

Je-li naopak f aditivní a f_+ konečná funkce, můžeme podle 27 a 26 předpokládat, že je funkce f_+ definována na celém Y a že je aditivní. Podle poznámky k 27 je pak f_+ nezáporná funkcionála; rovněž $f_+ - f$ je nezáporná funkcionála a zřejmě platí

$$f = f_+ - (f_+ - f) \ .$$

30. Věta: *Buď Y K-lineál. Klademe-li pro $f_1, f_2 \in R(Y)$*

$$f_1 \geqq f_2 \ ,$$

je-li $f_1 - f_2$ nezáporná funkcionála, je $R(Y)$ rovněž K-lineál.

Důkaz: $R(Y)$ je zřejmě lineární prostor. Rovněž je zřejmé, že platí K 2) — K 7). Ukážeme nyní, že platí i K 8). Nechť $f \in R(Y)$; utvořme funkci f_+ podle

27 a rozšiřme ji podle 26 na celé Y. Rozšířenou funkci označme opět f_+. Je $f_+ \geqq 0$, $f_+ - f \geqq 0$, tedy $f_+ \geqq f$. Je-li naopak $g \in R(Y)$, $g \geqq 0$, $g \geqq f$, platí pro každé $a \geqq 0$ $f_+(a) = \sup\limits_{0 \leqq x \leqq a} f(x) \leqq \sup\limits_{0 \leqq x \leqq a} g(x) = g(a)$, tedy je $g \geqq f_+$. Funkcionála f_+ tedy splňuje podmínku K 8).

31. Věta: *Nechť $f, g \in R(Y)$. Pak platí pro každé $a \geqq 0$*

$$(f \vee g)(a) = \sup\,(f(x) + g(y)), \textit{kde } x \wedge y \geqq 0, x + y = a\ ,$$
$$(f \wedge g)(a) = \inf\,(f(x) + g(y)), \textit{kde } x \wedge y \geqq 0, x + y = a\ ,$$
$$f_-(a) = \sup f(x), \textit{kde} -a \leqq x \leqq 0,$$
$$|f|(a) = \sup f(x), \textit{kde } |x| \leqq a\ .$$

Důkaz: Je $f \vee g = f + (g - f)_+$, tedy $(f \vee g)(a) = f(a) + \sup\limits_{0 \leqq x \leqq a} (g - f)(x) = \sup\limits_{0 \leqq x \leqq a} (f(a) + g(x) - f(x)) = \sup\limits_{0 \leqq x \leqq a} (f(a - x) + g(x)) = \sup\limits_{\substack{x \geqq 0,\, y \geqq 0 \\ x + y = a}} (g(x) + f(y))$. Tím je dokázán první vztah. Další z něho snadno plyne pomocí rovnosti $f \wedge g = -((-f) \vee (-g))$. Podobně dostaneme třetí vztah z rovnosti $f_- = (-f)_+$. Budiž nyní (pro $a \geqq 0$) $\varphi(a) = \sup\limits_{|x| \leqq a} f(x)$. Je-li $|x| \leqq a$, označme $b = a - |x|$; pak je $(x_+ + \frac{1}{2}b) + (x_- + \frac{1}{2}b) = x_+ + x_- + b = a$, tedy $f(x) = f(x_+) - f(x_-) = f(x_+ + \frac{1}{2}b) - f(x_- + \frac{1}{2}b) \leqq \sup\limits_{\substack{x \wedge y \geqq 0 \\ x + y = a}} (f(x) - f(y)) = (f \vee (-f))(a) = |f|(a)$, tedy

$$\varphi(a) \leqq |f|(a)\ . \tag{*}$$

Platí-li naopak $x \wedge y \geqq 0, x + y = a$, je zřejmě $-a \leqq -y \leqq x - y \leqq x \leqq a$, tedy $|x - y| \leqq a$. Odtud plyne $f(x) - f(y) = f(x - y) \leqq \varphi(a)$, takže máme též

$$|f|(a) = (f \vee (-f))\,(a) \leqq \varphi(a)\ .$$

Podle (*) platí nyní $|f|(a) = \varphi(a) = \sup\limits_{|x| \leqq a} f(x)$.

Poznámka. Protože $|a| \leqq |a|, |-a| \leqq |a|$, je $\pm f(a) = f(\pm a) \leqq \sup\limits_{|x| \leqq |a|} f(x) = |f|(|a|)$, tedy

$$|f(a)| \leqq |f|(|a|)\ .$$

32. Věta: *Buď Y K-lineál, $a \in Y$, $a \geqq 0$, $f \in R(Y)$, $f \geqq 0$. Pak existují $g, h \in R(Y)$ tak, že platí*

1) $g \wedge h = 0$, $g + h = f$,
2) $h(a) = f(a)$,
3) $x \wedge a = 0 \Rightarrow g(x) = f(x)$.

Důkaz: Pro $c \geqq 0$ buď $g(c) = \sup f(x)$, kde $0 \leqq x \leqq c$, $x \wedge a = 0$; pro libovolné c buď $g(c) = g(c_+) - g(c_-)$.

Dokážeme napřed, že je g nezápornou funkcionálou. Zřejmě $c \geqq 0 \Rightarrow g(c) \geqq 0$; podle 26 stačí tedy dokázat, že $c \wedge d \geqq 0 \Rightarrow g(c + d) = g(c) + g(d)$. Nechť tedy $c \wedge d \geqq 0$. Zvolme x, y, $0 \leqq x \leqq c$, $0 \leqq y \leqq d$, $x \wedge a = y \wedge$

$\wedge a = 0$. Pak je $0 \leqq x + y \leqq c + d$; podle 16 je též $(x + y) \wedge a = 0$, tedy $f(x) + f(y) = f(x + y) \leqq g(c + d)$, $g(c) + g(d) \leqq g(c + d)$.

Zvolme naopak z, $0 \leqq z \leqq c + d$, $z \wedge a = 0$. Podle 16 existují z_1, z_2 tak, že platí $0 \leqq z_1 \leqq c$, $0 \leqq z_2 \leqq d$, $z_1 + z_2 = z$. Tím spíše je $z_i \wedge a = 0$, tedy $f(z) = f(z_1) + f(z_2) \leqq g(c) + g(d)$, $g(c + d) \leqq g(c) + g(d)$.

Je tedy $g \in \bar{R}(Y)$, $g \geqq 0$; zřejmě je pro $c > 0$ $g(c) \leqq f(c)$, tedy $g \leqq f$. Buď $h = f - g$; dokážeme, že je $g \wedge h = 0$. Zvolme tedy $c \in Y$, $c \geqq 0$ a dále číslo $\varepsilon > 0$. Pak existuje $x \in Y$ tak, že platí $0 \leqq x \leqq c$, $x \wedge a = 0$, $f(x) > g(c) - \varepsilon$. Avšak $f(x) = g(x)$, tedy $g(c - x) < \varepsilon$ a ovšem $h(x) = 0$. Pro $y = c - x$ tedy platí $y \wedge x \geqq 0$, $x + y = c$, $g(y) + h(x) < \varepsilon$; podle 31 je $g \wedge h \leqq 0$. Platí ovšem rovnost.

Vztahy 2) a 3) jsou zřejmé; tím je vše dokázáno.

33. Věta: *Buď Y K-lineál. Přiřaďme každému $a \in Y$ funkci F_a na množině $R(Y)$ předpisem $F_a(f) = f(a)$ pro každé $f \in R(Y)$.*

Pak platí $(a, b \in Y, \alpha \in E_1)$

1) $F_a \in R(R(Y))$,
2) $F_{\alpha a} = \alpha F_a$,
3) $F_{a+b} = F_a + F_b$,
4) $F_{a_+} = (F_a)_+$.

Důkaz: Vztahy 2) a 3) jsou zřejmé. Rovněž je zřejmé, že pro $a \geqq 0$ je F_a nezápornou funkcionálou na K-lineálu $R(Y)$; protože pro libovolné $a \in Y$ je $F_a = F_{a_+} - F_{a_-}$, je vždy $F_a \in R(R(Y))$. Stačí tedy dokázat 4). Pro $f \in R(Y)$, $v \geqq 0$ je $((F_a)_+)(f) = \sup\limits_{0 \leqq \varphi \leqq f} F_a(\varphi) = \sup\limits_{0 \leqq \varphi \leqq f} \varphi(a)$. Zvolme na okamžik pevně prvky $f \in Y$ a $f \in R(Y)$, $f \geqq 0$. Podle předešlé věty existují $g, h \in R(Y)$ tak, že platí

$$g \wedge h \geqq 0,\ g + h = f\ ,$$
$$h(a_+) = f(a_+)\ ,$$
$$x \wedge a_+ = 0 \Rightarrow g(x) = f(x)\ .$$

Protože $a_- \wedge a_+ = 0$, je $g(a_-) = f(a_-)$, tedy $h(a_-) = 0$, $h(a) = h(a_+) = f(a_+)$. Protože je $0 \leqq h \leqq f$, je $((F_a)_+)(f) = \sup\limits_{0 \leqq \varphi \leqq f} \varphi(a) \geqq h(a) = f(a_+) = (F_{a_+})(f)$; odtud plyne $(F_a)_+ \geqq F_{a_+}$. Zřejmě však v $R(R(Y))$ platí $F_{a_+} \geqq 0$, $F_{a_+} \geqq F_a$, tedy $F_{a_+} \geqq (F_a)_+$. Tím je dokázáno 4).

34. Buďte Y_1, Y_2 K-lineály. Řekneme, že zobrazení φ K-lineálu Y_1 do K-lineálu Y_2 je *homomorfní*, jestliže

1) φ je aditivní a homogenní,
2) φ zachovává svazové operace, t. j. pro libovolné prvky x, y z Y_1 platí

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y),\quad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)\ .$$

Je-li zobrazení φ K-lineálu Y_1 do K-lineálu Y_2 aditivní a platí-li pro libovolné $a \in Y_1$

$$\varphi(a_+) = (\varphi(a))_+\ ,$$

pak zachovává φ svazové operace a tedy i polouspořádání (t. j. $a \leqq b \Rightarrow \Rightarrow \varphi(a) \leqq \varphi(b)$), jak se snadno dokáže. Odtud pak podobně jako v 25 vyplývá, že φ je též homogenní, takže předpoklad homogenity lze v definici homomorfního zobrazení vynechat.

Z předešlé věty tedy plyne, že zobrazení $a \to F_a$ K-lineálu Y do K-lineálu $R(R(Y))$ je homomorfní.

Prosté homomorfní zobrazení se nazývá *isomorfní*. Má-li homomorfní zobrazení φ tu vlastnost, že pro každé $a > 0$ je $\varphi(a) \neq 0$, je již φ isomorfní; je-li totiž $\varphi(a) = 0$, je $\varphi(a_+) = \varphi(a \vee 0) = \varphi(a) \vee \varphi(0) = 0$, tedy $a_+ = 0$, podobně $a_- = 0$, $a = 0$.

35. Věta: *Buď Y K-lineál. Nechť pro lineární prostor $Z \subset Y$ platí*

1) $a \in Z \Rightarrow a_+ \in Z,$

2) $0 \leqq a \leqq b, \quad a \in Y, \quad b \in Z \Rightarrow a \in Z.$

Pak je Z rovněž K-lineál. Přiřadíme-li každému $f \in R(Y)$ parciální funkci f_z na množině Z, je přiřazení $f \to f_z$ homomorfní zobrazení $R(Y)$ do $R(Z)$.

Důkaz: Je zřejmé, že Z je K-lineál, že $f_z \in R(Z)$ pro každé $f \in R(Y)$ a že zobrazení $f \to f_z$ je aditivní a homogenní. Buď nyní $f \in R(Y)$, $f_z = g \in R(Z)$. Zvolme $a \in Z$, $a \geqq 0$. Pak $g_+(a) = \sup g(x)$, kde $0 \leqq x \leqq a$, $x \in Z$, což je zřejmě $\sup f(x)$, kde $0 \leqq x \leqq a$, $x \in Y$; je tedy $g_+(a) = f_+(a)$. Odtud plyne snadno $g_+ = (f_+)_z$, tedy $(f_z)_+ = g_+ = (f_+)_z$. Tím je vše dokázáno.

36. *Multiplikativní funkcionálou* na K-lineálu Y nazveme regulární funkcionálu f, splňující vztah

$$a \wedge b = 0 \Rightarrow f(a) \,.\, f(b) = 0 \,.$$

Poznámka. Podle 13 lze multiplikativní funkcionálu definovat také takto: Je to regulární funkcionála f taková, že pro každé a je buď $f(a_+) = 0$ nebo $f(a_-) = 0$.

37. Věta: *Buď f multiplikativní funkcionála. Pak je buď $f \geqq 0$ nebo $f \leqq 0$.*

Důkaz: Předpokládejme, že $f \in R(Y)$, $f_+ > 0$, $f_- > 0$; dokážeme, že f není multiplikativní funkcionála. Existují $a > 0$, $b > 0$ tak, že $f_+(a) > 0$, $f_-(b) > 0$. Pro $c = a + b$ je pak tím spíše $f_+(c) > 0$, $f_-(c) > 0$. Nechť $2\varepsilon = \min\,(f_+(c), f_-(c))$. Protože $(f_+) \wedge (f_-) = 0$, existují u, v tak, že

$$u + v = c, \quad u \wedge v \geqq 0, \quad f_+(u) + f_-(v) < \varepsilon \,.$$

Položme

$$p = u \wedge v, \quad u_1 = u - p, \quad v_1 = v - p \,.$$

Pak platí (podle 13)

$$u_1 \wedge v_1 = 0, \quad f_+(p) \leqq f_+(u) < \varepsilon, \quad f_-(p) \leqq f_-(v) < \varepsilon \,,$$

tedy

$$f_+(v_1) = f_+(c - u - p) = f_+(c) - f_+(u) - f_+(p) > f_+(c) - 2\varepsilon \geqq 0 \,,$$
$$f_-(u_1) = f_-(c - v - p) = f_-(c) - f_-(v) - f_-(p) > f_-(c) - 2\varepsilon \geqq 0 \,.$$

Existují tudíž u_2, v_2, splňující vztahy

$$0 \leqq u_2 \leqq u_1, \quad 0 \leqq v_2 \leqq v_1, \quad f(v_2) > 0, \quad f(u_2) < 0$$

a zřejmě $u_2 \wedge v_2 = 0$; f tedy není multiplikativní funkcionála.

Poznámka. Všimněme si, že pro multiplikativní funkcionálu f platí $f(a) = 0 \Leftrightarrow f(|a|) = 0$. Je-li totiž $f(a) = 0$, je na př. $f(a_+) = 0$, tedy platí též $f(a_-) = f(a_+) - f(a) = 0$, $f(|a|) = f(a_+) + f(a_-) = 0$.

Je-li naopak $f(|a|) = 0$ a na př. $f \geqq 0$, je $-|a| \leqq a \leqq |a|$, tedy $0 = f(-|a|) \leqq f(a) \leqq f(|a|) = 0$.

38. Příkladem K-lineálu může být množina všech konečných funkcí na nějaké množině $P \neq \emptyset$, klademe-li ovšem $x \geqq y$, jestliže $x(t) \geqq y(t)$ pro každé $t \in P$. Je jistě zřejmé, jak definujeme lineární operace. Všimněme si, že platí na př. $(x \vee y)(t) = \max(x(t), y(t))$, $|x|(t) = |x(t)|$ pro každé $t \in P$ (a pod.).

Pokud budou x, y funkce na téže množině a pokud neučiníme nějaké zvláštní ustanovení, budeme symbolům $|x|$, $x \vee y$ a pod. dávat tento význam.

39. Věta: *Budiž Y K-lineál; budiž N neprázdná množina, jejíž prvky jsou nezáporné multiplikativní funkcionály na Y. Přiřaďme každému $x \in Y$ funkci $\bar{x}$ na množině N předpisem*

$$\bar{x}(f) = f(x) \quad \textit{pro} \quad f \in N \ .$$

Pak je zobrazení $x \to \bar{x}$ homomorfní.

Důkaz: Platí $\overline{(x + y)}(f) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \bar{x}(f) + \bar{y}(f)$, $\overline{(\alpha x)}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\bar{x}(f)$, tedy $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$, $\overline{\alpha x} = \alpha\bar{x}$.

Budiž nyní $x \in Y$, $f \in N$, $f(x_+) - f(x_-) = f(x) \geqq 0$. Kdyby bylo $f(x_-) \neq 0$, bylo by $f(x_+) = 0$, tedy $f(x_-) \leqq 0$, $f(x_-) < 0$ — spor; je tedy $f(x)_- = 0$, $f(x_+) = f(x)$.

Je-li $f(x) < 0$, nemůže být zase $f(x_+) \neq 0$; pak by totiž bylo $f(x_-) = 0$, $f(x) = f(x_+) < 0$. Je tedy $f(x_+) = 0$; vidíme, že vždy platí

$$f(x_+) = \max(f(x), 0) \ ,$$

tedy

$$\overline{(x_+)} = (\bar{x})_+ \ .$$

Odtud plyne podle 34, že zobrazení $x \to \bar{x}$ je homomorfní.

Poznámka 1. Tato věta je sama téměř bezcenná; může se totiž i u „velkých" K-lineálů stát, že dokonce množina všech regulárních funkcionál obsahuje samotnou nulu. V tomto případě neříká ovšem věta 39 nic zajímavého.

Poznámka 2. Větu 39 lze v jistém smyslu obrátit. Platí totiž tato věta, kterou čtenář sám snadno dokáže:

Buď Y K-lineál; buď F neprázdná množina, jejíž prvky jsou konečné funkce na Y. Přiřaďme každému $x \in Y$ funkci $\bar{x}$ na množině F předpisem

$$\bar{x}(f) = f(x) \quad \textit{pro každé} \quad f \in F.$$

Dále předpokládejme, že zobrazení $x \to \bar{x}$ je homomorfní.

Pak je každý prvek $f \in F$ nezápornou multiplikativní funkcionálou.

40. *Lineárním prostorem s obecnou normou* nazveme lineární prostor Y, v němž je každému prvku a přiřazeno (konečné) číslo $\|a\|$ (*norma* prvku a) tak, že platí

O 1) $a \in Y$, $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$,

O 2) $a, b \in Y \Rightarrow \|a\| + \|b\| \geqq \|a + b\|$,

O 3) $a \in Y \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left\|\dfrac{a}{n}\right\| = 0$,

O 4) $a \in Y$, $\alpha, \beta \in E_1$, $|\alpha| \leqq |\beta| \Rightarrow \|\alpha a\| \leqq \|\beta a\|$.

41. Podle O 4) platí

$$\|a\| = \|1 \,.\, a\| = \|(-1) \,.\, a\| = \|-a\| \;;$$

dále platí $\|\tfrac{1}{2}a\| \leqq \|a\|$, tedy

$$\|a\| + \|a\| \geqq \|\tfrac{1}{2}a\| + \|\tfrac{1}{2}a\| \geqq \|\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\| = \|a\| \;,$$

tedy

$$\|a\| \geqq 0 \;.$$

Z O 4), O 3) plyne $\|0\| = \|0 \,.\, a\| \leqq \left\|\dfrac{1}{n} \,.\, a\right\| \to 0$, tedy

$$\|0\| = 0 \;.$$

42. Věta: *$\|a - b\|$ definuje v Y metriku, při níž jsou lineární operace spojité.*

Důkaz: Z 41 plyne snadno, že $\|a - b\|$ je opravdu metrika. Jestliže $a_n \to a$, $b_n \to b$, je $\|a_n + b_n - (a + b)\| \leqq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| \to 0$, tedy $a_n + b_n \to$ $\to a + b$. Nechť nyní $\alpha_n \in E_1$, $\alpha_n \to \alpha$, $a_n \in Y$, $a_n \to a$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a určeme $N_1 > 0$ tak, aby bylo $\left\|\dfrac{a}{N_1}\right\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; dále určeme přirozené číslo N_2 tak, aby platilo $|\alpha_n| \leqq N_2$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Konečně určeme N tak, aby pro každé $n > N$ platilo zároveň

$$|\alpha - \alpha_n| < \frac{1}{N_1}, \quad \|a - a_n\| < \frac{\varepsilon}{2N_2} \;.$$

Pro $n > N$ pak dostaneme $\|(\alpha - \alpha_n)a\| \leqq \left\|\dfrac{a}{N_1}\right\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

$$\|\alpha_n(a - a_n)\| \leqq \|N_2(a - a_n)\| \leqq \|a - a_n\| + \|a - a_n\| + \ldots + \|a - a_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \;,$$

tedy

$$\|\alpha a - \alpha_n a_n\| \leqq \|(\alpha - \alpha_n)a\| + \|\alpha_n(a - a_n)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;.$$

43. Budiž Y lineární prostor s obecnou normou. Funkci f, definovanou na Y, nazveme *spojitou funkcionálou*, jestliže f je (konečná), aditivní a spojitá (jako funkce na metrickém prostoru Y). Množinu všech spojitých funkcionál označíme

$$C(Y) .$$

44. Věta: *Buď Y lineární prostor s obecnou normou. Pak je $C(Y)$ lineární prostor; je-li aditivní funkce f na množině Y spojitá v bodě 0, je $f \in C(Y)$. Každá spojitá funkcionála je homogenní.*

Důkaz: Je-li f aditivní, zjistíme jako v 25, že platí $r \,.\, f(b) = f(rb)$ pro každé racionální číslo r a každé $b \in Y$; je-li nadto f spojitá, plyne z 42 snadno, že platí $\alpha f(b) = f(\alpha b)$ pro každé $\alpha \in E_1$ a každé $b \in Y$. Ostatní je zřejmé.

45. Buď Y K-lineál. Řekneme, že Y je *K-lineál s obecnou normou,* je-li Y zároveň lineárním prostorem s obecnou normou a platí-li nadto

OK 1) $a \in Y \Rightarrow \|a\| = \| \, |a| \, \|$,

OK 2) $0 \leqq a \leqq b, \quad a, b \in Y \Rightarrow \|a\| \leqq \|b\|$.

Poznámka. Snadno zjistíme, že z OK 1), OK 2) plyne již O 4).

46. Věta: *Budiž Y K-lineál s obecnou normou. Pak platí:*

a) *Y je archimedovský K-lineál,*

b) *$C(Y) \subset R(Y)$,*

c) *$C(Y)$ je K-lineál,*

d) *jestliže $f \in C(Y)$, $g \in R(Y)$, $|g| \leqq f$, pak $g \in C(Y)$.*

Důkaz: Nechť $a, b \in Y$, $0 \leqq na \leqq b$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Pak je $\|a\| \leqq \left\|\frac{b}{n}\right\| \to 0$, tedy $\|a\| = 0$, $a = 0$; je tedy Y archimedovský K-lineál.

Předpokládejme nyní, že existuje $f \in C(Y) - R(Y)$. Podle 29 existuje $a \in Y$, $a > 0$ tak, že platí $\sup\limits_{0 \leqq x \leqq a} f(x) = \infty$. Existují tedy x_n, $0 \leqq x_n \leqq a$ tak, že $f(x_n) > n$. Je však $0 \leqq \frac{x_n}{n} \leqq \frac{a}{n}$, $\left\|\frac{x_n}{n}\right\| \leqq \left\|\frac{a}{n}\right\| \to 0$, $\left\|\frac{x_n}{n}\right\| \to 0$, tedy $\frac{1}{n} \,.\, f(x_n) = f\left(\frac{x_n}{n}\right) \to 0$ ve sporu s $\frac{1}{n} \,.\, f(x_n) > 1$. Je tedy $C(Y) \subset R(Y)$.

Zvolme nyní $f \in C(Y)$, $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\|x\| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Budiž $a \in Y$, $\|a\| < \delta$. Je-li $0 \leqq x \leqq |a|$, je $\|x\| \leqq \| \, |a| \, \| = \|a\| < \delta$; je tedy $|f_+(a)| \leqq f_+(|a|) = \sup\limits_{0 \leqq x \leqq |a|} f(x) \leqq \sup\limits_{\|x\| < \delta} f(x) \leqq \varepsilon$. Odtud plyne, že je též $f_+ \in C(Y)$.

Jestliže $f \in C(Y)$, $g \in R(Y)$, $|g| \leqq f$, zvolme opět $\varepsilon > 0$. Určeme $\delta > 0$ tak, aby platilo $|f(x)| < \varepsilon$, kdykoli $\|x\| < \delta$. Pro takové x pak platí (viz též poznámku k 31)

$$|g(x)| \leqq |g|(|x|) \leqq f(|x|) < \varepsilon ;$$

je tedy $g \in C(Y)$.

Poznámka 1. Může se stát, že daný K-lineál Y obsahuje lineární prostor Y_1, který při polouspořádání, vytvořeném polouspořádáním v K-lineálu Y, je rovněž K-lineálem, že však pro některý prvek $a \in Y_1$ je kladná část prvku a

v K-lineálu Y_1 větší než kladná část prvku a v K-lineálu Y. (Pamatujme, že jsme kladnou část prvku a definovali jako nejmenší prvek b, pro nějž platí zároveň $b \geqq a$ i $b \geqq 0$. Je zřejmé, že záleží na tom, které prvky b „připustíme ke konkurenci".) Taková situace nastává na př., je-li Y množina všech spojitých funkcí na čtvrtrovině $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ a je-li Y_1 množina všech lineárních funkcí na této čtvrtrovině. Jestliže však lineární prostor $Y_1 \subset Y$ obsahuje s každým svým prvkem b též prvek b_+ (kde b_+ „je vzato" v Y), pak je již Y_1 K-lineálem, v němž svazové operace souhlasí s operacemi v Y; v tomto případě bychom mohli Y_1 nazvat „pod-K-lineálem" K-lineálu Y. Takový vztah je tedy podle 46 mezi $C(Y)$ a $R(Y)$.

Poznámka 2. Je-li Y K-lineál, v němž je definována taková topologie, že jsou při ní lineární i svazové operace spojité a jednobodové množiny uzavřené, řekneme, že Y je *topologický K-lineál*. Buď $\mathfrak{V}$ množina všech okolí nuly topologického K-lineálu Y. Snadno se zjistí, že

a) *ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že pro každé $a \in V$ platí* $|a| = a \vee (-a) \in U$, $a_+ = a \vee 0 \in U$.

Protože ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že platí implikace $x - y \in V \Rightarrow x_+ - y_+ \in U$, vidíme, že

b) *ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že platí*

$$0 \leqq a \leqq b, \quad b \in V \Rightarrow a \in U$$

(volíme-li totiž $x = a, y = a - b$, je $x - y = b \in V$, tedy $x_+ - y_+ = a - 0 = a \in U$). Čtenář nyní snadno zjistí, že věta 46 platí i pro topologické K-lineály. Dále můžeme na př. větu 49 pro topologický K-lineál formulovat takto:

Pro každé $b \in Y$ je množina $\underset{x}{E}[x \leqq b]$ uzavřená. Tato věta je snadným důsledkem spojitosti svazových operací; platí totiž zřejmě $\underset{x}{E}[x \leqq b] = \underset{x}{E}[x \vee b = b]$.

Naopak se snadno zjistí, že je každý K-lineál Y s obecnou normou zároveň topologickým K-lineálem; stačí dokázat, že v Y platí $a_n \to a \Rightarrow (a_n)_+ \to a_+$. To však plyne ze vztahu $|b_+ - a_+| \leqq |b - a|$ (viz 17) a z OK 1), OK 2).

Je-li v nějakém K-lineálu Y definována taková topologie, že jsou při ní lineární operace spojité, jednobodové množiny uzavřené a že platí podmínky a) a b), dá se podobně dokázat, že je Y topologickým K-lineálem.

47. Věta: *Nechť K-lineál Y s obecnou normou má tuto vlastnost: Jestliže $0 \leqq a_n \in Y$, $\|a_n\| \to 0$, pak lze z $\{a_n\}$ vybrat posloupnost (svazově) omezenou. Pak platí*

$$C(Y) = R(Y)\ .$$

Důkaz: Předpokládejme, že existuje $f \in R(Y)$, $f \geqq 0$, f non $\in C(Y)$. Pak existují $a_n \in Y$ tak, že je sice $\|a_n\| \to 0$, ale není $f(a_n) \to 0$; lze pak určit $\varepsilon > 0$ a vybranou posloupnost $\{a_{i_n}\}$ tak, že $|f(a_{i_n})| \geqq \varepsilon$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Klademe-li

$b_n = |a_{i_n}|$, je $\pm a_{i_n} \leqq b_n$, tedy $\pm f(a_{i_n}) \leqq f(b_n)$, tedy $f(b_n) \geqq |f(a_{i_n})| \geqq \varepsilon$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Je ovšem $\|b_n\| > 0$, $\|b_n\| = \|a_{i_n}\| \to 0$. Určeme nyní posloupnost celých čísel α_n tak, aby platilo

$$0 \leqq \alpha_n \leqq \frac{1}{\sqrt{\|b_n\|}}, \ \alpha_n \to \infty \ .$$

Pak platí $\|\alpha_n b_n\| \leqq \alpha_n \|b_n\| \leqq \frac{1}{\sqrt{\|b_n\|}} \cdot \|b_n\| = \sqrt{\|b_n\|} \to 0$.

Podle předpokladu lze z posloupnosti $\alpha_n b_n$ vybrat posloupnost omezenou; nechť tedy

$$\alpha_{j_n} b_{j_n} \leqq c \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots$$

Potom platí

$$\varepsilon \cdot \alpha_{j_n} \leqq \alpha_{j_n} \cdot f(b_{j_n}) = f(\alpha_{j_n} b_{j_n}) \leqq f(c)$$

pro každé n, což není možné, protože $\alpha_{j_n} \to \infty$.

Tím jsme dokázali, že je každá nezáporná funkcionála spojitá; odtud plyne snadno $R(Y) \subset C(Y)$. Podle 46 je však $C(Y) \subset R(Y)$, takže platí $C(Y) = R(Y)$.

Poznámka. Naskýtá se otázka, zda existuje K-lineál Y s obecnou normou, kde platí $C(Y) = R(Y)$, kde však nelze z každé posloupnosti prvků a_n, pro něž platí $\|a_n\| \to 0$, vybrat posloupnost omezenou. Tuto otázku klade autor čtenářům jako problém.

48. Věta: *Buď Y K-lineál s obecnou normou. Nechť $b_n \in Y$, $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots$; nechť existuje b tak, že $\|b_n - b\| \to 0$. Pak je $b_n \leqq b$ pro $n = 1, 2, \ldots$*

Důkaz: Nechť není $b_N \leqq b$. Pak je $(b - b_N)_- > 0$; pro $n > N$ je $b_n - b \geqq b_N - b$, tedy $(b - b_n)_- = (b_n - b) \vee 0 \geqq (b_N - b) \vee 0 = (b - b_N)_-$. Odtud plyne, že pro $n > N$ platí

$$\|b - b_n\| = \| |b - b_n| \| \geqq \|(b - b_n)_-\| \geqq \|(b - b_N)_-\| > 0 \ ,$$

takže není $\|b - b_n\| \to 0$ — spor.

49. Věta: *Buď Y K-lineál s obecnou normou. Nechť $a_n \leqq b$ pro $n = 1, 2, \ldots$; nechť existuje $a \in Y$ tak, že $\|a_n - a\| \to 0$. Pak je $a \leqq b$.*

Důkaz: Položme $\bar{a}_n = a_n - a$, $\bar{b} = b - a$. Pak platí $\bar{a}_n \leqq \bar{b}$, $\|\bar{a}_n\| \to 0$, $|\bar{a}_n| \geqq (\bar{a}_n)_- \geqq (\bar{b})_- \geqq 0$, tedy $\|(\bar{b})_-\| \leqq \|\bar{a}_n\| \to 0$, $\|(\bar{b})_-\| = 0$, $(\bar{b})_- = 0$, $\bar{b} \geqq 0$, $b \geqq a$.

50. Věta: *Buď K-lineál Y s obecnou normou úplný jako metrický prostor. Pak je $C(Y) = R(Y)$.*

Důkaz: Nechť $a_n \in Y$, $a_n \geqq 0$, $\|a_n\| \to 0$. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_{i_n}\| < \infty$. Z úplnosti Y plyne, že existuje $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$. Je-li $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_{i_n}$, je $s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots$; podle 48 je $s_n \leqq a$, tím spíše $a_{i_n} \leqq a$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Podle 47 je $C(Y) = R(Y)$.

51. Věta: *Buď Y K-lineál s obecnou normou. Nechť ke každé posloupnosti $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots$, kde $\sup_n \|a_n\| < \infty$, existuje $a \in Y$ tak, že $\|a_n - a\| \to 0$. Pak je Y úplný metrický prostor.*

Důkaz: Stačí dokázat, že je konvergentní každá řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $\sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\| < \infty$. Budiž za tohoto předpokladu $a_n = \sum_{i=1}^{n} (b_i)_+$. Pak je $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots$, $\|a_n\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|(b_i)_+\| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\| < \infty$, tedy je posloupnost $\{a_n\}$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)_+$ konvergentní. Podobně zjistíme, že je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)_-$ a tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní.

Poznámka. Příkladem K-lineálu s obecnou normou může být množina Y všech spojitých funkcí v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, při čemž normu definujeme vztahem $\|a\| = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |a(t)|$. Snadno zjistíme, že k posloupnosti funkcí $b_n(t) = 1 - t^n$ neexistuje funkce $b \in Y$ taková, aby platilo $\|b_n - b\| \to 0$; při tom je Y úplný prostor. Předpoklad existence prvku b ve větě 48 není tedy zbytečný.

Definujeme-li v témže prostoru Y normu předpisem $\|b\|_1 = \int_0^1 |b(t)| dt$, snadno zjistíme, že nezáporná funkcionála f, definovaná pro $x \in Y$ vztahem $f(x) = x(0)$, není při této normě spojitá; při normě $\|b\| = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |b(t)|$ ovšem funkcionála f spojitá je (což plyne též z věty 50).

Vidíme, že polouspořádání lze na našem prostoru definovat jen jedním přirozeným způsobem, kdežto normu můžeme definovat různými „rozumnými" způsoby a množiny spojitých funkcionál mohou být přitom různé. Může tedy být přirozenější vyšetřovat na daném konkretním prostoru množinu všech regulárních funkcionál než množinu všech spojitých funkcionál.

Obě normy, o nichž jsme nyní mluvili, splňovaly též předpoklad H) z 52. Jako příklad K-lineálu s obecnou normou, kde tento předpoklad není splněn, lze uvést prostor S takto definovaný: Buď Z množina všech konečných měřitelných funkcí v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, N buď množina všech funkcí ze Z, které jsou rovny nule skoro všude. Klademe nyní $S = Z/N$; polouspořádání v S definujeme podle 20, normu pro $T \in S$ určíme předpisem $\|T\| = \int_0^1 \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|} dt$, kde x je libovolný prvek z třídy T. Prostor S má tu zajímavou vlastnost, že na něm neexistuje žádná nenulová regulární funkcionála.

Dále si všimněme, že každý K-lineál s obecnou normou lze snadno vnořit do úplného K-lineálu. Můžeme totiž utvořit množinu Z všech cauchyovských posloupností prvků daného K-lineálu a množinu $N \subset Z$ všech nulových posloupností; je jistě zřejmé, že Z můžeme opět pokládat za K-lineál a že v prostoru Z/N můžeme definovat normu. Lze pak snadno ukázat, že Z/N je úplný K-lineál s obecnou normou a že se původní K-lineál dá ztotožnit s jistou částí Z/N.

52. *Normovaným lineárním prostorem* (s homogenní normou) budeme rozumět lineární prostor Y, kde je každému prvku a přiřazeno (konečné) číslo $\|a\|$ (norma prvku a) tak, že platí

O 1) $a \in Y, \|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$,

O 2) $a, b \in Y \Rightarrow \|a\| + \|b\| \geq \|a + b\|$,

H) $\alpha \in E_1, a \in Y \Rightarrow \|\alpha a\| = |\alpha| \, . \, \|a\|$.

Poznámka 1. Z H) plyne ihned O 3) i O 4) (viz 40), takže je každý normovaný lineární prostor zároveň lineárním prostorem s obecnou normou.

Poznámka 2. Je-li Y normovaný lineární prostor, je $C(Y)$ rovněž normovaným lineárním prostorem, klademe-li pro $f \in C(Y)$

$$\|f\| = \sup f(x), \text{ kde } \|x\| \leq 1 \, .$$

(Viz na př. [6], věta 3.5.) $\|f\|$ je pak nejmenším z čísel α, splňujících vztah $f(x) \leq \leq \alpha \|x\|$ pro každé x.

53. *Normovaným K-lineálem* budeme rozumět K-lineál Y, který je zároveň normovaným lineárním prostorem, při čemž platí

OK 1) $a \in Y \Rightarrow \|a\| = \| |a| \|$,

OK 2) $0 \leq a \leq b, \quad a, b \in Y \Rightarrow \|a\| \leq \|b\|$.

54. Věta: *Budiž Y normovaný K-lineál. Položme pro $f \in R(Y)$*

$$\|f\| = \sup f(x) \textit{ pro } \|x\| \leq 1$$

(ať je toto supremum konečné nebo nekonečné). Pak platí

$$f \in R(Y) \Rightarrow \|f\| = \| |f| \| \, ,$$

$$0 \leq g \leq f, \quad f, g \in R(Y) \Rightarrow \|g\| \leq \|f\| \, .$$

Důkaz: Zvolme $f \in R(Y)$, $\|x\| \leq 1$. Protože též $\| |x| \| \leq 1$, je $f(x) \leq |f|(|x|) \leq \leq \| |f| \|$, takže platí

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} f(x) \leq \| |f| \| \, .$$

Zvolme naopak $x \in Y$, $\|x\| \leq 1$. Pak platí

$$|f|(x) \leq |f|(|x|) = \sup_{|y| \leq |x|} f(y) \leq \sup_{\|y\| \leq 1} f(y) = \|f\| \, .$$

Odtud plyne

$$\| |f| \| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f|(x) \leq \|f\| \, ,$$

tedy

$$\| |f| \| = \|f\| \, .$$

Nechť nyní $0 \leqq g \leqq f$, $f, g \in R(Y)$. Zvolme $a \in Y$, $\|a\| \leqq 1$. Pak je též $\||a|\| \leqq \leqq 1$, tedy $g(a) \leqq g(|a|) \leqq f(|a|) \leqq \|f\|$; odtud plyne $\|g\| = \sup\limits_{\|a\| \leq 1} g(a) \leqq \|f\|$.

55. Věta: *Budiž Y normovaný K-lineál. Pak je $C(Y)$ rovněž normovaný K-lineál.*

Důkaz: Podle 46 je $C(Y)$ K-lineál; víme, že je $C(Y)$ normovaný lineární prostor. Podle předešlé věty platí také OK 1), OK 2).

56. Věta: *Buď Y normovaný K-lineál. Přiřaďme každému $a \in Y$ funkci F_a na množině $C(Y)$ předpisem*

$$F_a(f) = f(a) \quad (f \in C(Y)) \ .$$

Pak je $a \to F_a$ isometrické a isomorfní zobrazení Y do $C(C(Y))$.

Důkaz: Podle známé věty (viz na př. [6], věta 6.2) existuje ke každému $a \in Y$ prvek $f_a \in C(Y)$ tak, že platí $\|f_a\| = 1$, $f_a(a) = \|a\|$. Je tedy $\|F_a\| = \sup\limits_{\|f\| \leq 1} F_a(f) = \sup\limits_{\|f\| \leq 1} f(a) \geqq f_a(a) = \|a\|$, zároveň však $\|F_a\| = \sup\limits_{\|f\| \leq 1} f(a) \leqq \sup\limits_{\|f\| \leq 1} \|f\| \cdot \|a\| = \|a\|$, takže platí $\|F_a\| = \|a\|$; zobrazení $a \to F_a$ je tedy isometrické.

Přiřaďme nyní každému $a \in Y$ funkci Φ_a na množině $R(Y)$ předpisem

$$\Phi_a(f) = f(a) \qquad (f \in R(Y)) \ .$$

Podle 33 je zobrazení $a \to \Phi_a$ homomorfní; protože podle 46 platí implikace $0 \leqq f \leqq g$, $g \in C(Y)$, $f \in R(Y) \Rightarrow f \in C(Y)$, je podle 35 také zobrazení $\Phi_a \to F_a$ homomorfní, pokládáme-li F_a za prvek K-lineálu $R(C(Y))$. Avšak svazové operace v $C(C(Y))$ souhlasí se svazovými operacemi v $R(C(Y))$; zobrazení $a \to F_a$ je tedy homomorfní, i když pokládáme F_a za prvek $C(C(Y))$. Zjistili jsme však, že $a \to F_a$ je zobrazení isometrické, tedy prosté; je tudíž také isomorfní.

57. Buď Y normovaný K-lineál, kde platí

L_0) $a, b \in Y$, $\quad a \wedge b = 0 \Rightarrow \|a + b\| = \|a\| + \|b\|$.

Pak řekneme, že Y je *L_0-lineál.* Platí-li dokonce implikace

L) $a, b \in Y$, $a \wedge b \geqq 0 \Rightarrow \|a + b\| = \|a\| + \|b\|$,

nazveme Y *L-lineálem.*

Poznámka. Všimněme si, že L_0-lineál by se dal definovat jako normovaný K-lineál, kde platí

$$\|a\| = \|a_+\| + \|a_-\|$$

pro každé a.

58. Věta: *Buď Y K-lineál; nechť $f \in R(Y)$ a nechť platí implikace*

$$a \in Y, \quad a > 0 \Rightarrow f(a) > 0 \ .$$

Položme

$$\|b\| = f(|b|)$$

pro každé $b \in Y$. Pak je Y L-lineál.

Důkaz: $b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0 \Rightarrow \|b\| = f(|b|) > 0$. Dále platí $\|a\| + \|b\| = f(|a|) + f(|b|) = f(|a| + |b|) \geqq f(|a + b|) = \|a + b\|$; pro $a \wedge b \geqq 0$ platí zřejmě rovnost.

Pro $\alpha \in E_1$ je $\|\alpha a\| = f(|\alpha a|) = f(|\alpha|\,|a|) = |\alpha| f(|a|) = |\alpha|\,.\,\|a\|$. Tím jsme dokázali, že platí O 1), O 2), H), L); zřejmě platí i OK 1), OK 2).

Poznámka. Předpokládáme-li, že v nějakém K-lineálu Y je každému prvku a přiřazeno číslo $\|a\| \geqq 0$ tak, že platí O 1), OK 1), L), je již Y L-lineál; položíme-li totiž $f(a) = \|a\|$ pro $a \geqq 0$, můžeme podle 26 rozšířit funkci f na nezápornou funkcionálu, která splňuje podmínky věty 58. Podle OK 1) je pak $f(|b|) = \|b\|$ pro každé b.

59. **Věta:** *Buď Y L-lineál. Nechť $a + b \geqq 0$, $\|a + b\| = \|a\| + \|b\|$. Pak platí $a \wedge b \geqq 0$.*

Důkaz: Buď $c = a + b = c_1 - c_2$, kde $c_1 = a_+ + b_+$, $c_2 = a_- + b_-$. Pak platí

$$\begin{aligned} \|a\| &= \|a_+\| + \|a_-\| , \\ \|b\| &= \|b_+\| + \|b_-\| , \\ \|c_1\| &= \|a_+\| + \|b_+\| , \\ \|c_2\| &= \|a_-\| + \|b_-\| , \end{aligned}$$

tedy $\|c\| = \|a + b\| = \|a\| + \|b\| = \|c_1\| + \|c_2\|$, tedy

$$\|c_2\| = \|c\| - \|c_1\| .$$

Protože však $c_1 = c + c_2$, je $\|c_1\| = \|c\| + \|c_2\|$, takže máme zároveň

$$\|c_2\| = \|c_1\| - \|c\| .$$

Odtud plyne $\|c_2\| = 0$, $c_2 = 0$, $a_- = b_- = 0$, $a \wedge b \geqq 0$.

60. Budiž Y normovaný K-lineál, kde platí

M_0) $a, b \in Y$, $a \wedge b = 0 \Rightarrow \|a \vee b\| = \max(\|a\|, \|b\|)$.

Pak nazveme Y *M_0 — lineálem.*

Platí-li dokonce

M) $a, b \in Y$, $a \wedge b \geqq 0 \Rightarrow \|a \vee b\| = \max(\|a\|, \|b\|)$,

řekneme, že Y je *M-lineál.*

Poznámka. Kakutani a Bohnenblust dokázali v [3], že je každý M_0-lineál zároveň M-lineálem. V této práci je rovněž podán důkaz tohoto tvrzení (viz větu 92, která říká též, že je každý L_0-lineál zároveň L-lineálem), a to v podstatě stejným způsobem jako v [3]. Naskýtá se ovšem otázka, zda nelze podat nějaký jednodušší důkaz.

61. **Věta:** *Buď Y M_0-lineál. Pak je $C(Y)$ L_0-lineál.*

Důkaz: Nechť $f_1, f_2 \in C(Y)$, $f_1 \wedge f_2 = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existují $a_i \in Y$ tak, že platí

$$\|a_i\| \leqq 1, \quad f_i(a_i) > \|f_i\| - \varepsilon \quad (i = 1, 2) ;$$

dále můžeme předpokládat $a_i \geqq 0$. Protože $f_1 \wedge f_2 = 0$, existují (viz 31) a_i', a_i''

tak, že platí $a_i' \wedge a_i'' \geqq 0$, $a_i' + a_i'' = a_i$, $f_1(a_1'') + f_2(a_1') < \varepsilon$, $f_1(a_2') + f_2(a_2'') < \varepsilon$, tedy $f_i(a_i') = f_i(a_i - a_i'') = f_i(a_i) - f_i(a_i'') > f_i(a_i) - \varepsilon$. Buď $h = a_1' \wedge a_2'$, $b_i = a_i' - h$ $(i = 1, 2)$. Pak je $f_1(h) \leqq f_1(a_2') < \varepsilon$, $f_2(h) \leqq f_2(a_1') < \varepsilon$, tedy $f_i(b_i) = f_i(a_i') - f_i(h) > f_i(a_i) - \varepsilon - \varepsilon > \|f_i\| - 3\varepsilon$. Podle 13 je $b_1 \wedge b_2 = 0$; zřejmě je $b_i \leqq a_i$, tedy $\|b_i\| \leqq 1$. Buď $b = b_1 \vee b_2$. Protože je Y M_0-lineál, je též $\|b\| = \max(\|b_1\|, \|b_2\|) \leqq 1$, tedy $\|f_1 + f_2\| \geqq (f_1 + f_2)(b) = f_1(b) + f_2(b) > \|f_1\| + \|f_2\| - 6\varepsilon$. Odtud plyne $\|f_1 + f_2\| \geqq \|f_1\| + \|f_2\|$; platí zde ovšem rovnost.

62. Věta: *Budiž Y M-lineál. Pak je $C(Y)$ L-lineál.*

Důkaz: Nechť $f_1, f_2 \in C(Y)$, $f_1 \wedge f_2 \geqq 0$, $x_i \in Y$, $\|x_i\| \leqq 1$ $(i = 1, 2)$. Buď $y = (x_1)_+ \vee (x_2)_+$. Pak je $\|y\| = \max(\|(x_1)_+\|, \|(x_2)_+\|) \leqq 1$, tedy $f_1(x_1) + f_2(x_2) \leqq f_1((x_1)_+) + f_2((x_2)_+) \leqq f_1(y) + f_2(y) = (f_1 + f_2)(y) \leqq \|f_1 + f_2\|$, tedy $\|f_1\| + \|f_2\| \leqq \|f_1 + f_2\|$. Platí ovšem rovnost.

63. Věta: *Je-li Y L_0-lineál, je $C(Y)$ M_0-lineál.*

Důkaz: Nechť $f_1, f_2 \in C(Y)$, $f_1 \wedge f_2 = 0$. Zřejmě můžeme předpokládat $\max(\|f_1\|, \|f_2\|) = 1$; stačí pak dokázat, že $\|f_1 \vee f_2\| \leqq 1$. Zvolme proto $a \in Y$, $a \geqq 0$, $\|a\| \leqq 1$; dále zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Protože $f_1 \wedge f_2 = 0$, existují a_1, a_2 tak, že $a_1 \wedge a_2 \geqq 0$, $a_1 + a_2 = a$, $f_1(a_2) + f_2(a_1) < \varepsilon$, tedy

$$f_i(a) = f_i(a_1) + f_i(a_2) < f_i(a_i) + \varepsilon ,$$
$$f_i(a_1 \wedge a_2) < \varepsilon .$$

Buď $b_i = a_i - (a_1 \wedge a_2)$. Pak je $f_i(a_i) < f_i(b_i) + \varepsilon$, tedy

$$f_i(a) < f_i(b_i) + 2\varepsilon .$$

Protože je $\|f_i\| \leqq 1$, je $f_i(b_i) \leqq \|b_i\|$; protože je (podle 13) $b_1 \wedge b_2 = 0$, je $\|b_1\| + \|b_2\| = \|b_1 + b_2\|$, tedy $\|b_1\| + \|b_2\| \leqq \|a\| \leqq 1$. Odtud plyne

$$(f_1 + f_2)(a) = f_1(a) + f_2(a) < f_1(b_1) + 2\varepsilon + f_2(b_2) + 2\varepsilon \leqq \|b_1\| + \|b_2\| + 4\varepsilon \leqq 1 + 4\varepsilon ,$$

tedy

$$\|f_1 \vee f_2\| = \|f_1 + f_2\| \leqq 1.$$

64. Věta: *Buď Y Kj-lineál[3]) s jednotkou j. Položme pro každé $a \in Y$*

$$\|a\| = \inf \alpha, \quad kde \quad \alpha j \geqq |a| .$$

Pak je Y M-lineál.

Důkaz: Zřejmě je $0 \leqq \|a\| < \infty$ pro každé a. Napřed dokážeme, že pro každé $a \in Y$ platí také

$$\|a\| j \geqq |a| ,$$

takže příslušné infimum je dokonce minimem. Zřejmě pro každé přirozené n platí $\left(\|a\| + \frac{1}{n}\right) . j \geqq |a|$, tedy $\frac{1}{n} j \geqq |a| - \|a\| j$,

[3]) Viz 22.

$$j \geqq n \,.\, (|a| - \|a\|j)_+ \,,$$

tedy $(|a| - \|a\|j)_+ = 0$, $|a| - \|a\|j \leqq 0$, $|a| \leqq \|a\|j$.

Zejména pro $\|a\| = 0$ je také $|a| = a = 0$.

Protože $\|a\|j \geqq |a|$, $\|b\|j \geqq |b|$, je $(\|a\| + \|b\|)j \geqq |a| + |b| \geqq |a + b|$, tedy $\|a\| + \|b\| \geqq \|a + b\|$.

Pro libovolné $\beta \in E_1$, $a \in Y$ platí nyní $|\beta| \,.\, \|a\|j \geqq |\beta| \,.\, |a| = |\beta a|$, tedy $|\beta| \,.\, \|a\| \geqq \|\beta a\|$. Pro $\beta = 0$ platí ovšem rovnost; pro $\beta \neq 0$ je též $\left|\frac{1}{\beta}\right| \,.\, \|\beta a\| \geqq \geqq \left\|\frac{1}{\beta} \,.\, \beta a\right\| = \|a\|$, tedy platí zároveň $\|\beta a\| \geqq |\beta| \,.\, \|a\|$, $\|\beta a\| = |\beta| \,.\, \|a\|$.

Vztah $\|a\| = \|\,|a|\,\|$ je zřejmý.

Je-li $0 \leqq a \leqq b$, je $\|b\|j \geqq |b| = b \geqq a = |a|$, tedy $\|b\| \geqq \|a\|$. Pro $a \wedge b \geqq 0$, $\lambda = \max(\|a\|, \|b\|)$ je $\lambda j \geqq |a| = a$, $\lambda j \geqq |b| = b$, tedy $\lambda j \geqq a \vee b = |a \vee b|$, $\lambda \geqq \|a \vee b\|$. Platí zde ovšem rovnost.

65. Věta: *Buď Y L-lineál. Pak je $C(Y)$ Kj-lineál s jednotkou $j(x) = \|x_+\| - \|x_-\|$. Norma, definovaná v $C(Y)$ podle* 64, *souhlasí s obvyklou normou.*

Důkaz: Protože Y je L-lineál, je podle 26 funkce $j(x) = \|x_+\| - \|x_-\|$ aditivní; zřejmě je to nezáporná a spojitá funkcionála. Je-li $f \in C(Y)$, $a \in Y$, $a \geqq 0$, je $|f|(a) \leqq \|\,|f|\,\| \,.\, \|a\| = \|f\| \,.\, j(a)$; tedy platí $|f| \leqq \|f\|j$. Označíme-li normu, definovanou v $C(Y)$ podle 64, na okamžik symbolem $[f]$, vidíme, že $[f] \leqq \|f\|$. Protože však podle 64 je $|f| \leqq [f]j$, je pro libovolné $a \in Y$ $|f(a)| \leqq |f|(|a|) \leqq [f] \,.\, j(|a|) = [f]\,\|a\|$; odtud plyne (viz poznámku 2 k 52) též $\|f\| \leqq [f]$.

Poznámka. Vidíme zejména, že $C(Y)$ je M-lineál, je-li Y L-lineál.

66. Věta: *Buď Y Kj-lineál s jednotkou j; pokládáme-li Y za M-lineál s normou, definovanou podle* 64, *je $R(Y) = C(Y)$ a platí*

$$\|f\| = |f|(j)$$

pro každé $f \in R(Y)$.

Důkaz: Podle 31 je $|f|(j) = \sup\limits_{|x| \leqq j} f(x) = \sup\limits_{\|x\| \leqq 1} f(x) = \|f\|$ pro každé $f \in R(Y)$; vidíme zároveň, že $R(Y) \subset C(Y)$, tedy $R(Y) = C(Y)$.

67. *K-okruhem* nazveme K-lineál Y, v němž je definováno násobení tak, že je Y zároveň komutativním okruhem s jednotkovým prvkem a že platí

$$\alpha \in E_1,\ a, b \in Y \Rightarrow \alpha(ab) = (\alpha a)b \,,$$
$$a, b, c \in Y,\ c \geqq 0 \Rightarrow (a \vee b)c = ac \vee bc \,.$$

68. Je-li $c \geqq 0$, platí také $(a \wedge b)c = -[(-a) \vee (-b)]c = -[(-ac) \vee (-bc)] = ac \wedge bc$.

Je-li $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, je $ab = (a \vee 0)b = ab \vee 0 \geqq 0$.

69. Věta: *Jestliže* $a \wedge b = 0$, *pak* $ab = 0$.

Důkaz: Podle 12 je zde $a + b = a \vee b$, tedy $a^2 + 2ab + b^2 = (a \vee b) \,.\, (a + b) = a(a + b) \vee b(a + b) = (a^2 + ab) \vee (ba + b^2) = ab + (a^2 \vee b^2)$, tedy

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 \vee b^2 \ .$$

Protože však $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, je $a^2 \geqq 0$, $ab \geqq 0$, $b^2 \geqq 0$, tedy také $a^2 + b^2 \geqq a^2 \vee b^2$, $ab = a^2 \vee b^2 - (a^2 + b^2) \leqq 0$. Odtud plyne

$$ab = 0 \ .$$

70. Věta: *Pro libovolné* $a \in Y$ *platí* $a^2 \geqq 0$.

Důkaz: $a^2 = (a_+)^2 - 2a_+a_- + (a_-)^2$, kde $(a_+)^2 \geqq 0$, $(a_-)^2 \geqq 0$, $a_+ \,.\, a_- = 0$.

Poznámka. Je-li j jednotkový prvek okruhu Y, je $j = j^2 > 0$.

71. Věta: *Jsou-li* a, b *prvky* K-*okruhu* Y, *platí*

$$|a| \, |b| = |ab| \ .$$

Důkaz: $ab = (a_+ - a_-)(b_+ - b_-) = a_+b_+ + a_-b_- - a_+b_- - a_-b_+$. Platí $a_+b_+ \wedge a_+b_- = a_+(b_+ \wedge b_-) = 0$ atd., takže podle poznámky k 16 máme

$$(ab)_+ = a_+b_+ + a_-b_-, \quad (ab)_- = a_+b_- + a_-b_+, \quad \text{tedy} \quad |ab| = (a_+ + a_-) \,.\, (b_+ + b_-) = |a| \,.\, |b| \ .$$

72. Věta: *Buď* Y K-*okruh; buď* j *jeho jednotkový prvek. Je-li* f *nezáporná funkcionála na* Y *taková, že* $f(j) = 0$, *je* $f = 0$.

Důkaz: Zvolme $a \in Y$ a číslo α. Pak je $0 \leqq f((a - \alpha j)^2) = f(a^2 - 2a\alpha j + \alpha^2 j) = f(a^2) - 2\alpha f(a)$, tedy $2\alpha f(a) \leqq f(a^2)$. Odtud plyne snadno $f(a) = 0$, $f = 0$.

Poznámka. Buďte f, g prvky $R(Y)$ takové, že platí

$$f(x) = g(x), \quad \text{kdykoli} \quad 0 \leqq x \leqq j \ ;$$

utvořme $h = f - g$. Pak je $h_+(j) = \sup\limits_{0 \leqq x \leqq j} h(x) = 0$, tedy $h_+(j) = 0$, $h_+ = 0$, rovněž $h_-(j) = h_+(j) - h(j) = 0$, $h_- = 0$, tedy $h = h_+ - h_- = 0$. Odtud plyne

$$f = g \ .$$

73. Věta: *Buď* Y K-*okruh. Položme pro* $f \in R(Y)$

$$\|f\| = |f|(j) \ .$$

Pak je $R(Y)$ L-*lineál.*

Důkaz: Klademe-li $J(f) = f(j)$ pro $f \in R(Y)$, vidíme, že funkcionála J splňuje podmínky věty 58.

Poznámka. Všimněme si, že $\|f\| = \sup\limits_{|x| \leqq j} f(x)$.

74. Věta: *Buď* Y K-*okruh,* $f \in R(Y)$, $f > 0$; *buď*

$$\mathfrak{A} = \underset{x}{E}[f(|x|) = 0] \ .$$

Pak je $\mathfrak{A}$ *ideál.*

Důkaz: Jestliže $a, b \in \mathfrak{A}$, je $0 \leqq f(|a + b|) \leqq f(|a| + |b|) = f(|a|) + f(|b|) = 0$, tedy $a + b \in \mathfrak{A}$.

Zvolme nyní $a \in \mathfrak{A}$ a položme

$$f_1(x) = f(|a|x)$$

pro každé $x \in Y$. Snadno se zjistí, že je f_1 nezáporná funkcionála a že $f_1(j) = 0$; podle 72 je $f_1 = 0$, tedy zejména $f_1(|x|) = f(|a|\,|x|) = f(|ax|) = 0$. Vidíme, že $ax \in \mathfrak{A}$ pro každé $x \in Y$.

Kdyby platilo $j \in \mathfrak{A}$, bylo by $f(j) = 0$, $f = 0$; je tedy $\mathfrak{A}$ opravdu (vlastním) ideálem.

Poznámka. Je-li $\mathfrak{B}$ libovolný ideál v Y, $\alpha \in E_1$, $b \in \mathfrak{B}$, je $\alpha b = (\alpha j)b \in \mathfrak{B}$.

75. **Věta:** *Buď Y K-okruh; pokládejme podle 73 $R(Y)$ za L-lineál. Pak funkcionála $f \in R(Y)$ je okruhovým homomorfismem,*[4]) *právě když platí*

1) $f \geqq 0$,
2) $a \wedge b = 0 \Rightarrow f(a) \,.\, f(b) = 0$,
3) $\|f\| = 1$.

Důkaz: Budiž $f \in R(Y)$ homomorfismem. Je-li $a \wedge b = 0$, je podle 69 také $ab = 0$, tedy $0 = f(ab) = f(a) \,.\, f(b)$. Podle 37 je buď $f \geqq 0$ nebo $f \leqq 0$. Protože pro každé $a \in Y$ platí $f(a) = f(aj) = f(a) \,.\, f(j)$, je buď $f = 0$ nebo $f(j) = 1$. Případ $f = 0$ vylučujeme, tedy je $f(j) = 1$. Odtud plyne $f > 0$, $\|f\| = f(j) = 1$.

Nechť naopak má f vlastnosti 1), 2), 3). Podle poznámky k větě 37 platí $f(a) = 0 \Leftrightarrow f(|a|) = 0$; podle 74 je tedy množina $\mathfrak{A} = \underset{x}{E}[f(x) = 0]$ ideál. Podle 3), 1) je dále $1 = \|f\| = |f|(j) = f(j)$ (tedy $f \neq 0$).

Pro libovolné $x \in Y$ platí $0 = f(x) - f(j) \,.\, f(x) = f(x - j \,.\, f(x))$, tedy

$$x \equiv j \,.\, f(x) \mod \mathfrak{A} \;.$$

Je-li $y \in Y$, je též

$$y \equiv j \,.\, f(y) \;,$$

$$j \,.\, f(xy) \equiv xy \equiv j^2 \,.\, f(x) \,.\, f(y) = j \,.\, f(x) \,.\, f(y) \;,$$

tedy

$$j \,.\, (f(xy) - f(x) \,.\, f(y)) \in \mathfrak{A} \;,$$

$$0 = (f(xy) - f(x) \,.\, f(y)) \,.\, f(j) = f(xy) - f(x) \,.\, f(y) \;,$$

$$f(xy) = f(x) \,.\, f(y) \;.$$

76. Buďte a, b různé body lineárního prostoru Y. Budiž T množina všech $c \in Y$ tvaru

$$c = \alpha a + \beta b \;, \tag{*}$$

kde $\alpha, \beta \in E_1$, $\alpha\beta \geqq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Pak množinu T nazveme *úsečkou* o koncových bodech a, b.

---

[4]) Nulovou funkcionálu nepokládáme za homorfismus.

Je-li $c \in T$, $a \neq c \neq b$, řekneme, že bod c je *vnitřním bodem* úsečky T. To nastane, právě když jsou obě čísla α, β ve výraze (*) kladná.

Řekneme, že bod c je *vrcholem* množiny $A \subset Y$, jestliže platí $c \in A$ a jestliže bod c není vnitřním bodem žádné úsečky, obsažené v A.

77. Věta: *Budiž Y normovaný lineární prostor, který obsahuje více než jeden prvek. Budiž S jednotková koule prostoru Y, t. j. $S = \underset{x}{E}[x \in Y, \|x\| \leqq 1]$. Pak je bod x vrcholem S, právě když má tyto vlastnosti:*

1) $\|x\| = 1$,

2) *jestliže $x = y + z$, $\|y\| + \|z\| = 1$, pak jsou y, z násobky x.*

Důkaz: Nechť má bod x vlastnosti 1), 2); nechť $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\|x_i\| \leqq 1$, $x_1 \neq x_2$, $\alpha_i > 0$, $\Sigma\alpha_i = 1$ $(i = 1, 2)$. Pak je $\|\alpha_i x_i\| \leqq \alpha_i$, $1 = \Sigma\alpha_i \geqq \Sigma\|\alpha_i x_i\| \geqq$ $\geqq \|\Sigma\alpha_i x_i\| = \|x\| = 1$. Vidíme, že platí všude znamení rovnosti; zejména platí $\|x_i\| = 1$. Podle 2) jsou $\alpha_i x_i$ násobky x, tedy jsou také x_i násobky x a na přímce, určené počátkem a bodem x, leží tři body s normou 1, což není možné. Odtud plyne, že x je vrchol množiny S.

Buď naopak x vrcholem S. Snadno zjistíme, že je $\|x\| = 1$ (použijeme toho, že má Y více než jeden prvek; jinak by byla nula vrcholem S). Nechť $x = y + z$, $\|y\| + \|z\| = 1$. Je-li na př. $\|y\| = 0$, jsou y, z násobky x. Jestliže $\|y\| . \|z\| > 0$, je

$$x = \|y\| \cdot \frac{y}{\|y\|} + \|z\| \cdot \frac{z}{\|z\|} .$$

Protože $\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{z}{\|z\|}\right\| = 1$ a protože x je vrchol, nemůže být $\frac{y}{\|y\|} \neq \frac{z}{\|z\|}$; buď tedy $\frac{y}{\|y\|} = \frac{z}{\|z\|} = t$. Pak je $x = \|y\|t + \|z\|t = (\|y\| + \|z\|)\, t = t$, tedy

$$y = \|y\|x, \quad z = \|z\|x .$$

78. Věta: *Nechť L_0-lineál Y obsahuje více než jeden prvek; buď v vrchol jednotkové koule v Y. Pak je buď $v > 0$ nebo $v < 0$.*

Důkaz: Protože Y je L_0-lineál, je

$$\|v\| = \|v_+\| + \|v_-\| ;$$

podle 77 platí $v_+ = \alpha v$, $v_- = \beta v$. Je-li na př. $\alpha \neq 0$, je

$$v = \alpha^{-1} . v_+ .$$

79. Věta: *Buď Y L-lineál, v buď kladný vrchol jednotkové koule; nechť $0 \leqq x \leqq$ $\leqq v$. Pak je x násobkem v.*

Důkaz: Platí $1 = \|v\| = \|x\| + \|v - x\|$; podle 77 je x násobkem v.

80. Věta: *Buď Y L-lineál, v_1, v_2 buďte kladné vrcholy jednotkové koule. Pak je buď $v_1 = v_2$ nebo $v_1 \wedge v_2 = 0$.*

Důkaz: Buď $0 < x \leqq v_1 \wedge v_2$. Podle 79 je $x = \alpha v_1 = \beta v_2$, kde ovšem $\alpha, \beta \geqq \geqq 0$, tedy $0 < \|x\| = \alpha\|v_1\| = \beta\|v_2\| = \alpha = \beta$, tedy $v_1 = v_2$.

81. Věta: *Množina všech kladných vrcholů jednotkové koule v L-lineálu Y je lineárně nezávislá.*

Důkaz: Plyne snadno z 80 a z poznámky k 16.

82. Věta: *Buď Y K-lineál; buď K-lineál R_1 částí $R(Y)$. Nechť platí implikace*

$$f \in R_1, \quad g, h \in R(Y), \quad g \wedge h = 0, \quad g + h = f \Rightarrow g, h \in R_1 .$$

Předpokládejme dále, že je R_1 L_0-lineálem, který obsahuje více než jeden prvek. Pak je každý vrchol jednotkové koule v R_1 multiplikativní funkcionálou[5] *(a má normu 1). Je-li R_1 dokonce L-lineálem, je naopak též každá multiplikativní funkcionála s normou 1 vrcholem jednotkové koule v R_1.*

Důkaz: Buď f vrchol jednotkové koule v R_1. Podle 78 můžeme předpokládat $f \geqq 0$. Předpokládejme dále, že existují a, b tak, že platí $a \wedge b = 0$, $f(a) \cdot f(b) > 0$. Podle 32 existují $g, h \in R(Y)$ tak, že platí

$$g \wedge h = 0, \quad g + h = f ,$$
$$h(a) = f(a), \quad g(b) = f(b) .$$

Podle předpokladu $g, h \in R_1$; protože je R_1 L_0-lineál, je $\|g\| + \|h\| = \|f\|$. Avšak g, h zřejmě nejsou násobky f, což je ve sporu s větou 77; tím je dokázáno, že f je multiplikativní funkcionála.

Budiž nyní R_1 L-lineál; buď f multiplikativní funkcionála, $f \in R_1$, $\|f\| = 1$. Podle 37 můžeme předpokládat $f \geqq 0$. Nechť $f = f_1 + f_2$, $1 = \|f\| = \|f_1\| + \|f_2\|$. Podle 59 je $f_i \geqq 0$ ($i = 1, 2$). Je-li $f(a) = 0$, je (viz poznámku k 37) také $f(|a|) = 0$, tím spíše $f_i(|a|) = 0$, $f_i(a) = 0$. Podle známé věty (viz na př. [6], věta 1.17) jsou f_i násobky f. Podle 77 je f vrchol.

Poznámka. Obsahuje-li normovaný lineární prostor Y více než jeden prvek, obsahuje množina $C(Y)$ také více než jeden prvek. (K důkazu můžeme použít na př. věty 6.2 z [6], kde vezmeme za Q množinu, obsahující samotnou nulu, a kde volíme $a \neq 0$.) Je-li zejména Y M_0-lineál (resp. M-lineál), který obsahuje více než jeden prvek, můžeme podle 46 a 61 (resp. 62) položit v předešlé větě $R_1 = C(Y)$.

Dostáváme tak tyto věty:

Je-li Y M_0-lineál, je každý vrchol jednotkové koule v $C(Y)$ multiplikativní funkcionálou (s normou 1). Je-li Y M-lineál, je množina všech vrcholů jednotkové koule v $C(Y)$ rovna množině všech multiplikativních funkcionál s normou 1.

83. Věta: *Buď Y K-okruh. Pokládejme podle 73 $R(Y)$ za L-lineál. Pak je funkcionála $f \in R(Y)$ kladným vrcholem jednotkové koule v $R(Y)$, právě když je okruhovým homomorfismem.*

---

[5]) Viz 36.

Důkaz: Plyne ihned z 75 a 82.

Poznámka. Všimněme si, že věta 83 charakterisuje jen ty homomorfismy, které patří do $R(Y)$. V některých K-okruzích však existují homomorfismy, které zobrazují okruh na těleso reálných čísel a které nejsou regulárními funkcionálami. Budiž na př. Y množina všech funkcí v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, které lze „po částech" vyjádřit polynomy. Přiřaďme každé funkci $x \in Y$ číslo $f(x)$ tímto předpisem: Existuje číslo $\varepsilon > 0$ a polynom $p(t)$ tak, že pro $t \in \langle 0, \varepsilon\rangle$ je $x(t) = p(t)$; položme

$$f(x) = p(-1) .$$

Snadno se zjistí, že f je homomorfismus a že $\sup\limits_{0 \leqq x \leqq 1} f(x) = \infty$. Přitom je Y dokonce Kj-lineálem.

Má-li však K-okruh Y tu vlastnost, že ke každému $a \in Y$, $a \geqq 0$ existuje b tak, že $b^2 = a$, je ovšem $f(a) = f(b^2) = (f(b))^2 \geqq 0$ pro každé $a \geqq 0$ a pro každý homomorfismus f. Vidíme, že je v tomto případě každý homomorfismus, který zobrazuje Y do tělesa reálných čísel, nezápornou (a tedy regulární) funkcionálou.

84. Je-li P libovolná neprázdná množina, pak systém F všech konečných funkcí na množině P můžeme pokládat za topologický kartézský součin tolika přímek, kolik prvků má množina P.

Je-li P dokonce lineární prostor, je-li dále L množina všech aditivních a homogenních funkcí na P a pokládáme-li L za podprostor topologického prostoru F, říkáme, že jsme v L definovali *slabou topologii*. Definující okolí bodu $f_0 \in L$ jsou pak množiny tvaru

$$U(f_0;\, x_1, x_2, \ldots, x_n,\, \varepsilon) = \underset{f}{E}[f \in L,\ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon\ (i = 1, 2, \ldots, n)],$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in P$, $0 < \varepsilon \in E_1$; snadno zjistíme, že zde můžeme předpokládat $\varepsilon = 1$. Je-li P dokonce normovaný lineární prostor, můžeme předpokládat $\|x_i\| \leqq 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$; pak se ovšem již nesmíme omezovat na $\varepsilon = 1$.

Jednotkovou kouli v normovaném lineárním prostoru Y budeme značit S; je tedy $S = \underset{x}{E}[x \in Y, \|x\| \leqq 1]$. Jednotkovou kouli v $C(Y)$ budeme značit S_C. Pak platí:

85. Věta: *Množina S_C je kompaktní ve slabé topologii.*

Důkaz: Buď B množina všech funkcí φ na Y, pro něž platí $|\varphi(x)| \leqq \|x\|$ pro každé $x \in Y$. Pak je B kartézským součinem intervalů $\langle -\|x\|, \|x\|\rangle$. Zřejmě platí $S_C \subset B$; definujeme-li v B topologii jako v kartézském součinu topologických prostorů, snadno se zjistí, že S_C je ve slabé topologii podprostorem B. Podle známé věty je B (Hausdorffův) kompaktní prostor; stačí tedy dokázat, že množina S_C je v B uzavřená. Zvolme $\varphi \in B$, $\varphi \in \overline{S_C}$; dokážeme napřed, že je φ aditivní. Buďte x, y prvky Y; zvolme ještě $\varepsilon > 0$. Pak v okolí funkce φ, určeném body $x, y, x + y$ a číslem ε, leží nějaký prvek $f \in S_C$; platí tedy

$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad |\varphi(y) - f(y)| < \varepsilon, \quad |\varphi(x + y) - f(x + y)| < \varepsilon .$$

Odtud však snadno plyne $|\varphi(x) + \varphi(y) - \varphi(x + y)| < 3\varepsilon$, tedy $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$.

Tím jsme dokázali, že je φ aditivní funkce; protože pro každé $x \in Y$ platí $|\varphi(x)| \leqq \|x\|$, je $\varphi \in S_0$.

86. Věta: *Buď Y normovaný lineární prostor. Nechť $\emptyset \neq A \subset C(Y)$; buď A kompaktní ve slabé topologii. Nechť $x \in Y$. Pak existuje vrchol v množiny A tak, že platí*

$$v(x) \geqq f(x)$$

pro každé $f \in A$.

Důkaz:[6]) Buď $x = x_1$; buďte $x_2, x_3, \ldots, x_\omega, \ldots, x_\nu, \ldots$ ostatní prvky prostoru Y v nějakém dobrém uspořádání. Položme $K_0 = A$. Jsou-li dány množiny K_ξ pro $\xi < \nu$, které jsou neprázdné, kompaktní ve slabé topologii a které tvoří nerostoucí systém, utvořme napřed množinu

$$L_\nu = \prod_{\xi<\nu} K_\xi \ .$$

Množina L_ν je opět neprázdná a kompaktní ve slabé topologii. Funkce $\overline{x_\nu}$ na množině $C(Y)$, určená vztahem $\overline{x_\nu}(f) = f(x_\nu)$, je spojitá; množina M těch bodů z L_ν, kde funkce $\overline{x_\nu}$ nabývá (na množině L_ν) svého maxima, není tudíž prázdná. Dále je M uzavřená v L_ν, tedy kompaktní, a platí $M \subset K_\xi$ pro každé $\xi < \nu$. Můžeme proto položit

$$K_\nu = M \ .$$

Tak definujeme transfinitní monotonní posloupnost neprázdných kompaktních množin K_ν; buď Q její průnik. Je ovšem opět $Q \neq \emptyset$. Nechť $f, g \in Q$, $x_\nu \in Y$. Protože $Q \subset K_\nu \subset L_\nu$, nabývá funkce $\overline{x_\nu}$ v bodech f, g maximální hodnoty na L_ν; zejména platí

$$\overline{x_\nu}(f) = \overline{x_\nu}(g) = g(x_\nu) = f(x_\nu) \ .$$

Je tedy $f(x) = g(x)$ pro každé x, $f = g$.

Vidíme, že množina Q je jednobodová; buď v její prvek. Dokážeme nyní, že v je vrcholem množiny A. Nechť tedy $v = \alpha f + \beta g$, kde $\alpha\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, $f, g \in A$, $f \neq g$. Protože Q obsahuje jen jeden prvek, existují ξ tak, že není zároveň $f \in K_\xi$, $g \in K_\xi$; buď ν nejmenší takový index. Nechť na př. f non $\in K_\nu$; je ovšem $\nu > 0$, protože $f \in A = K_0$. Je však $f \in K_\eta$, $g \in K_\eta$ pro $\eta < \nu$, tedy $f \in L_\nu$, $g \in L_\nu$.

Protože $v \in K_\nu$, je pro $y = x_\nu$

$$f(y) < v(y) \ ,$$
$$g(y) \leqq v(y) \ ,$$

tedy $v(y) = \alpha f(y) + \beta g(y) < \alpha v(y) + \beta v(y) = v(y)$ — spor.

Tím je dokázáno, že v je vrchol množiny A.

---

[6]) Důkaz je převzat z [5].

Protože $v \in K_1 \subset L_1 = K_0 = A$, platí (pro $x_1 = x$)

$$v(x) \geqq f(x)$$

pro každé $f \in A$.

87. Věta: *Buď Y normovaný lineární prostor; nechť $x \in Y$. Pak existuje vrchol v jednotkové koule v $C(Y)$ tak, že platí $v(x) = \|x\|$.*

Důkaz: Podle známé věty (viz na př. [6], věta 6.2) existuje $f \in C(Y)$, $\|f\| = 1$ tak, že $f(x) = \|x\|$. Zvolíme-li v předešlé větě $A = S_c$, vidíme, že existuje vrchol v množiny S_c tak, že platí $v(x) \geqq f(x) = \|x\|$. Platí ovšem rovnost.

Poznámka. Je-li P libovolná neprázdná množina, pak pro každou funkci f na množině P klademe

$$\|f\| = \sup |f(x)|, \text{ kde } x \in P \ .$$

Je-li Y lineární prostor, jehož prvky jsou omezené funkce na množině P, stane se tak Y normovaným lineárním prostorem.

Z věty 87 nyní plyne:

Buď Y normovaný lineární prostor; buď V množina všech vrcholů jednotkové koule v $C(Y)$. Přiřaďme každému $x \in Y$ funkci $\bar{x}$ na množině V obvyklým způsobem. Pak je zobrazení $x \to \bar{x}$ aditivní, homogenní a isometrické.

(Důkaz provede čtenář snadno sám.)

88. Věta: *Buď Y normovaný K-lineál. Buď N množina všech nezáporných funkcionál z $C(Y)$, M budiž množina všech multiplikativních funkcionál z $C(Y)$. Pak jsou množiny N, M uzavřené v $C(Y)$ ve slabé topologii.*

Důkaz: Zvolme $f \in \overline{M}$, $x, y \in Y$, $x \wedge y = 0$ a předpokládejme, že není $f(x) \,.\, f(y) = 0$. Buď $\varepsilon = \min (|f(x)|, |f(y)|)$. Pak existuje $g \in M$ tak, že platí

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \qquad |f(y) - g(y)| < \varepsilon \ .$$

Je-li však na př. $g(x) = 0$, je $|f(x)| < \varepsilon$, což je spor.

Buď nyní $f \in \overline{N}$, $a \geqq 0$; předpokládejme, že není $f(a) \geqq 0$, nýbrž $f(a) < 0$. Buď $\varepsilon = -f(a)$. Opět existuje $g \in N$, t. j. $g \geqq 0$, tak, že platí

$$|g(a) - f(a)| < \varepsilon \ ,$$

tedy $\varepsilon = -f(a) \leqq g(a) - f(a) < \varepsilon$; opět máme spor.

89. Věta: *Buď Y Kj-lineál.*[7]) *Buď $Q = \underset{f}{E}[0 \leqq f \in C(Y),\ \|f\| = 1]$. Pak je Q kompaktní ve slabé topologii.*

Důkaz: Podle 85 stačí dokázat, že je množina Q v $C(Y)$ uzavřená (při slabé topologii). Zvolme tedy $f \in \overline{Q}$. Víme, že je $\|f\| \leqq 1$; podle 88 je $f \geqq 0$, podle 66 je tedy $\|f\| = f(j)$. Kdyby bylo $\|f\| < 1$, bylo by pro jisté $g \in Q$

$$1 - f(j) = |g(j) - f(j)| < 1 - \|f\| = 1 - f(j) \ ,$$

což není možné. Je tedy $\|f\| = 1$.

---

[7]) Viz 22.

Poznámka. Buď Y normovaný lineární prostor, v němž existuje nekonečná lineárně nezávislá množina. Buď $Q_1 = \underset{f}{E}[f \in C(Y), \|f\| = 1]$. Nechť $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n \in Y$. Buď Z množina všech lineárních kombinací prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Podle známé věty (viz [6], věta 4.6) je Z úplný prostor, tedy je Z uzavřené v Y. Je ovšem $Z \neq Y$; existuje tedy (viz [6], věta 6.2) funkcionála $f \in C(Y)$ tak, že platí $\|f\| = 1$, ale $f(x) = 0$ pro každé $x \in Z$. Je tedy $f \in Q_1$, ale $f(x_i) = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Vidíme, že v každém okolí $U(0; x_1, x_2, \ldots, x_n; \varepsilon)$ leží nějaký prvek $f \in Q_1$, tedy $0 \in \overline{Q_1}$; množina $\overline{Q_1}$ není ve slabé topologii uzavřená. Tvrzení věty 89 není tedy nijak triviální.

90. Věta: *Buď Y normovaný K-lineál. Pak je množina všech nezáporných multiplikativních funkcionál z jednotkové koule v $C(Y)$ kompaktní ve slabé topologii. Je-li Y Kj-lineál, je také množina všech kladných vrcholů jednotkové koule v $C(Y)$ kompaktní ve slabé topologii.*

Důkaz: První tvrzení plyne ihned z 85 a 88.

Je-li nyní Y Kj-lineál, je podle 64 také M-lineálem. Podle poznámky k větě 82 jsou kladnými vrcholy jednotkové koule v $C(Y)$ právě všechny nezáporné multiplikativní funkcionály s normou 1; ty však tvoří podle 88 a 89 kompaktní množinu.

91. Věta: *Buď Y M_0-lineál, který obsahuje více než jeden prvek; buď V množina všech kladných vrcholů jednotkové koule v $C(Y)$. Přiřaďme každému $x \in Y$ funkci $\bar{x}$ na množině V předpisem*

$$\bar{x}(v) = v(x) \text{ pro každé } v \in V \ .$$

Pak je zobrazení $x \to \bar{x}$ isomorfní a isometrické.

Při slabé topologii je V úplně regulární, funkce $\bar{x}$ jsou na V spojité a ke každým dvěma bodům $v_1 \neq v_2$ z V existuje $x \in Y$ tak, že $v_1(x) = 0 \neq v_2(x)$.

Důkaz: Kladné vrcholy jsou podle poznámky k větě 82 kladnými multiplikativními funkcionálami; podle 39 je zobrazení $x \to \bar{x}$ homomorfní. Budiž nyní $0 < x \in Y$. Podle 87 existuje vrchol v jednotkové koule v $C(Y)$ tak, že $v(x) = \|x\|$. Podle 78 je buď $v > 0$ nebo $v < 0$; protože $x > 0$ a $v(x) > 0$, je $v > 0$, tedy $v \in V$. Vidíme, že platí $\|x\| \leqq \|\bar{x}\|$ (význam $\|\bar{x}\|$ definujeme ovšem podle poznámky k 87). Je však $|\bar{x}(v)| = |v(x)| \leqq \|v\| \cdot \|x\| = \|x\|$ pro každé $v \in V$, tedy je též $\|\bar{x}\| \leqq \|x\|$, takže platí

$$\|x\| = \|\bar{x}\|$$

pro každé $x \geqq 0$. Pro libovolné $x \in Y$ platí nyní $\|x\| = \||x|\| = \|\overline{(|x|)}\| = \||\bar{x}|\| = \|\bar{x}\|$.

Je zřejmé, že je V úplně regulární a že funkce $\bar{x}$ jsou na V spojité. Zvolme nyní $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$. Kdyby platila implikace $v_1(x) = 0 \Rightarrow v_2(x) = 0$, bylo by podle známé věty (viz [6], věta 1.17) v_2 násobkem v_1, což není možné. Existuje tedy $x \in Y$ tak, že platí $\bar{x}(v_1) = v_1(x) = 0$, ale $\bar{x}(v_2) = v_2(x) \neq 0$.

92. Věta: *Každý M_0-lineál je zároveň M-lineál; každý L_0-lineál je zároveň L-lineál.*

Důkaz: Podle předešlé věty je M_0-lineál Y isometrický a isomorfní s K-lineálem Y_1 všech funkcí $\bar{x}$; Y_1 je však zřejmě M-lineál, tedy je Y také M-lineál. Budiž nyní Z L_0-lineál. Podle 63 je $C(Z)$ M_0-lineál, tedy M-lineál; podle 62 je $C(C(Z))$ L-lineál. Podle 56 je Z isometrické a isomorfní s nějakou částí $C(C(Z))$; je tedy Z také L-lineál.

Poznámka. Ve větě 91 jsme dokázali, že lze každý M-lineál representovat (se zachováním všech operací) jako jakýsi systém funkcí, které jsou spojité na úplně regulárním topologickém prostoru. Místo množiny V všech kladných vrcholů jsme mohli vzít také na př. množinu T všech nezáporných multiplikativních funkcionál s normou ≤ 1 nebo množinu $\bar{V} \subset T$. Je celkem zřejmé, že bychom dostali „stejně dobrou" representaci a základní prostor by byl dokonce kompaktní; z naší věty by však neplatila poznámka o „oddělitelnosti" bodů základního prostoru pomocí funkcí $\bar{x}$.

Ukážeme na příkladě, že může být $\bar{V} \neq V$. Budiž Y množina všech posloupností reálných čísel, které konvergují k nule. Definice lineárních operací a polouspořádání leží nasnadě; pro $x = \{\xi_n\} \in Y$ klademe $\|x\| = \sup_n |\xi_n| = \max_n |\xi_n|$.

Zvolme $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Y$, $\varepsilon > 0$. Pak existuje N tak, že pro $n > N$ je

$$|\xi_n^{(i)}| < \varepsilon \ , \ i = 1, 2, \ldots, m$$

(klademe $x_i = \{\xi_n^{(i)}\}$). Zvolme nějaké $n_0 > N$ a utvořme funkcionálu

$$f(x) = \xi_{n_0}$$

(kde $x = \{\xi_n\}$). Pak je f zřejmě kladná multiplikativní funkcionála s normou 1 a platí $|f(x_i)| < \varepsilon$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$. Vidíme, že nulová funkcionála leží v uzávěru množiny V.

Označíme-li symbolem P množinu T nebo množinu $\bar{V}$, vidíme, že ke každému $t \in P - V$ existuje číslo α a prvek $v \in V$ tak, že platí $0 \leq \alpha < 1$, $t = \alpha v$; pak je ovšem

$$\bar{x}(t) = t(x) = \alpha v(x) = \alpha \bar{x}(v)$$

pro každé $x \in Y$. Vidíme, že hodnoty funkcí $\bar{x}$ na množině $P - V$ jsou v tomto smyslu určeny jejich hodnotami na množině V. Odtud plyne, že množina všech funkcí x není vždy rovna množině všech spojitých funkcí na prostoru P. (To je ostatně patrné již z toho, že množina všech spojitých funkcí na prostoru P je úplným prostorem, zatím co M-lineál Y jím být nemusí.) Zachováme-li však označení, můžeme vyslovit tuto větu:

Budiž P kompaktní prostor, pro nějž platí $\bar{V} \subset P \subset T$. Přiřaďme každému $t \in P - V$ prvek $\varphi(t) \in V$ a číslo $\alpha(t)$ tak, aby platilo

$$t = \alpha(t) \, . \, \varphi(t) \ .$$

Budiž Z množina všech funkcí z, které jsou spojité na prostoru P a které pro každé $t \in P - V$ splňují vztah

$$z(t) = \alpha(t) \,.\, z(\varphi(t)).$$

Pak je množina všech funkcí $\bar{x}$ hustá v Z.

Tuto větu v podstatě dokazuje Kakutani v [2]. Podáme zde poněkud jiný důkaz; dokážeme totiž následující větu, která podle 91 je obecnější než věta právě uvedená.

93. Věta: *Budiž P kompaktní prostor; nechť $P = P_1 + P_2$, $P_1P_2 = \emptyset$. Buď každému $t \in P_2$ přiřazen prvek $\varphi(t) \in P_1$ a číslo $\alpha(t)$. Označme písmenem Z množinu všech funkcí z na P, které jsou spojité a splňují pro každé $t \in P_2$ vztah*

$$z(t) = \alpha(t) \,.\, z(\varphi(t)) \;.$$

Buď dále Y K-lineál, který má více než jeden prvek a který je částí Z. Nechť ke každé dvojici $t_1 \neq t_2$ bodů z P_1 existuje funkce $y \in Y$ tak, že platí $y(t_1) = 0$, $y(t_2) = 1$. Pak je Y husté v Z.

Důkaz: Zvolme libovolné $z \in Z$ a libovolné $\varepsilon > 0$. Napřed dokážeme, že ke každému $t_0 \in P$ existuje takové $y^{(t_0)} \in Y$, že platí

$$\left.\begin{array}{ll} y^{(t_0)}(t_0) = z(t_0) \;, \\ y^{(t_0)} \leqq z + \varepsilon \;. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Zvolme tedy $t_0 \in P$. Rozeznávejme dva případy:

a) $t_0 \in P_1$. Z našich předpokladů snadno plyne, že ke každému $t \in P_1$ existuje $y_t \in Y$ tak, že platí

$$y_t(t_0) = z(t_0), \quad y_t(t) = z(t) \qquad (\overset{*}{*})$$

(má-li množina P_1 jen jeden prvek, je třeba použít toho, že Y má více než jeden prvek). Je-li $s \in P_2$, položme $\varphi(s) = t$; pro funkci y_t pak platí

$$y_t(s) = \alpha(s) \,.\, y_t(t) = \alpha(s) \,.\, z(t) = z(s)$$

(a ovšem $y_t(t_0) = z(t_0)$).

Klademe-li pro $s \in P_2$ $y_s = y_t$, kde $t = \varphi(s)$, vidíme tedy, že ke každému $t \in P$ existuje funkce y_t, která splňuje vztahy $(\overset{*}{*})$. Přiřaďme nyní každému $t \in P$ okolí U_t tak, aby pro každé $t' \in U_t$ platilo $y_t(t') < z(t') + \varepsilon$. Jestliže nyní okolí $U_{t_1}, \ldots, U_{t_n}$ pokrývají P, pak funkce

$$y^{(t_0)} = y_{t_1} \wedge \ldots \wedge y_{t_n}$$

splňuje oba vztahy (*).

b) $t_0 \in P_2$. Položíme-li $y^{(t_0)} = y^{(t_1)}$, kde $t_1 = \varphi(t_0)$ a kde funkce $y^{(t_1)}$ je určena podle bodu a), jsou vztahy (*) zřejmě opět splněny.

Odtud plyne ihned, že můžeme každému $t \in P$ přiřadit funkci $y^{(t)}$ a okolí $U^{(t)}$ tak, že platí $y^{(t)}(t') > z(t') - \varepsilon$ pro každé $t' \in U^{(t)}$ a dále $y^{(t)} \leqq z + \varepsilon$. Jestliže opět okolí $U^{(t_1)}, \ldots, U^{(t_n)}$ pokrývají P, pak funkce $y = y^{(t_1)} \vee \ldots \vee y^{(t_n)}$ zřejmě splňuje podmínku $|z - y| \leqq \varepsilon$; tím je důkaz proveden.

Poznámka 1. Čtenář snadno zjistí, že žádné z čísel $\alpha(t)$, která se vyskytují v této větě, nemůže být záporné (jinak by Y nebylo K-lineálem).

Poznámka 2. Z právě dokázané věty plyne na př. tento důsledek:

Je-li P kompaktní prostor a je-li Y K-lineál, jehož prvky jsou spojité funkce na P a který má tu vlastnost, že ke každé dvojici $t_1 \neq t_2$ prvků z P existuje $y \in Y$, pro něž platí $y(t_1) = 0$, $y(t_2) = 1$, pak je Y husté v množině všech spojitých funkcí na prostoru P, pokud má prostor P aspoň dva body nebo Y více než jeden prvek.

Podobně lze dokázat na př. tuto větu:

Buď P kompaktní prostor; buď x spojitá funkce na P. Buď Y K-lineál, jehož prvky jsou spojité funkce na P. Nechť ke každé dvojici t_1, t_2 bodů z P existuje $y \in Y$ tak, že platí

$$y(t_i) = x(t_i) \quad (i = 1, 2) \ .$$

Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $y \in Y$ tak, že platí

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon$$

pro každé $t \in P$.

Poznámka 3. Je-li Y Kj-lineál, je podle 90 množina V kompaktní; podle naší věty je pak množina všech $\bar{x}$ hustá v množině všech spojitých funkcí na prostoru V. Odtud plyne ihned:

Je-li Kj-lineál Y úplný jako metrický prostor, je množina všech $\bar{x}$ rovna množině všech funkcí, které jsou spojité na prostoru V.

94. Věta: *Budiž P úplně regulární topologický prostor; buď Y množina všech omezených spojitých funkcí na prostoru P. Pak množina všech kladných vrcholů jednotkové koule v prostoru všech regulárních funkcionál na Y je při slabé topologii homeomorfní s β-obalem prostoru P.*

Důkaz: Víme, že β-obal můžeme pokládat za množinu všech homomorfních zobrazení okruhu Y na těleso reálných čísel; množinu všech spojitých funkcí na $\beta(P)$ tvoří funkce $\bar{x}$ tvaru

$$\bar{x}(v) = v(x) \ ,$$

kde $x \in Y$ a kde v je příslušný homomorfismus. Protože okruh Y obsahuje s každým svým nezáporným prvkem druhou odmocninu, je každý takový homomorfismus nezápornou (a tedy regulární) funkcionálou. Podle 83 je tedy množina V všech kladných vrcholů jednotkové koule v prostoru všech regulárních funkcionál totožná s množinou všech takovýchto homomorfismů.

Protože Y je Kj-lineál, který je úplným metrickým prostorem, je podle poznámky 3 k 93 množina všech $\bar{x}$ rovna množině všech funkcí, které jsou při slabé topologii spojité na množině V. Množina V je však kompaktní, tedy úplně regulární, a její topologie je proto množinou všech spojitých funkcí určena jednoznačně; je tedy totožná s obvyklou topologií v β-obalu.

Poznámka. Je-li prostor P kompaktní, je ovšem $\beta P = P$ a množina V je homeomorfní s prostorem P. Vidíme, že množinou V může být libovolný kompaktní prostor.

95. Ve své práci [4] uvádí Hewitt tuto větu:

Budiž P úplně regulární topologický prostor; buď Y množina všech spojitých funkcí na P. Pak je množina všech funkcionál f tvaru

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x(t_i)$$

($x \in Y$, $\alpha_i \in E_1$, $t_i \in P$) ve slabé topologii hustá v $R(Y)$.

Hewittův důkaz je v podstatě velmi složitý; užívá se při něm dokonce některých hlubších vět z theorie míry v topologických prostorech. Naše věta 98 ukazuje, že Hewittovu větu lze snadno zobecnit; z dalších úvah je pak patrné, že lze tuto větu jistým způsobem formulovat i pro abstraktní prostory. To vše snadno vyplyne z následující pomocné věty.

96. Věta: *Buď Y lineární prostor, jehož prvky jsou (konečné) funkce na neprázdné množině P. Budiž L množina všech aditivních a homogenních funkcí na Y; budiž L_0 množina všech $g \in L$, k nimž existují $t_1, t_2, \ldots, t_m \in P$ a čísla α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tak, že platí*

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x(t_i)$$

pro každé $x \in Y$.

Pak ke každému $f \in L$ a ke každé konečné skupině $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Y$ existuje $g \in L_0$ tak, že platí

$$g(x_i) = f(x_i)$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz: Napřed dokážeme, že ke každé lineárně nezávislé skupině $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n \in Y$ existují $t_1, t_2, \ldots, t_n \in P$ tak, že determinant o prvcích $x_i(t_j)$ $(i, j =$ $= 1, 2, \ldots, n)$ je různý od nuly. Pro $n = 1$ to zřejmě platí; nechť to platí pro jisté n. Zvolme lineárně nezávislou skupinu $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Podle indukčního předpokladu existují $t_1, t_2, \ldots, t_n \in P$ tak, že determinant o prvcích $x_i(t_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ je různý od nuly. Utvořme matici $\mathfrak{M}$ o prvcích $x_i(t_j)$, kde $i = 1, 2, \ldots, n, n + 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Buď D_i determinant matice, která vznikne z matice $\mathfrak{M}$ vynecháním i-tého řádku; buď $D'_i = (-1)^{i+n+1} . D_i$. Budiž dále

$$y = x_1 D'_1 + x_2 D'_2 + \ldots + x_n D'_n + x_{n+1} D'_{n+1} \, .$$

Protože prvky $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ jsou lineárně nezávislé a protože $D'_{n+1} = D_{n+1} \neq$ $\neq 0$, není $y = 0$; existuje tedy $t_{n+1} \in P$ tak, že platí $y(t_{n+1}) \neq 0$. Rozvedeme-li nyní determinant o prvcích $x_i(t_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n + 1)$ podle prvků posledního sloupce, dostaneme právě číslo $y(t_{n+1}) \neq 0$. Tím je proveden indukční krok a naše tvrzení je dokázáno.

Mějme nyní libovolnou konečnou skupinu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Y$ a libovolné $f \in L$. Buďte $x_1, \ldots, x_m$ lineárně nezávislé, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ buďte jejich lineárními kombinacemi. Podle dokázaného tvrzení existují $t_1, t_2, \ldots, t_m \in P$ tak, že systém rovnic

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_i(t_j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

má řešení v α_j. Určíme-li $g \in L_0$ vztahem

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x(t_j) ,$$

vidíme, že platí

$$f(x_i) = g(x_i)$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m$; z aditivity a homogenity plyne nyní snadno, že tento vztah platí také pro $i = 1, 2, \ldots, m, m + 1, \ldots, n$. Tím je vše dokázáno.

Poznámka. Věta 96 má charakter čistě algebraický; zřejmě bychom místo o funkcích mohli mluvit o zobrazeních do libovolného tělesa atd. a věta i důkaz by platily dále.

97. Věta: *Nechť Y, L, L_0 mají týž význam jako v předešlé větě. Pak je L_0 při slabé topologii husté v L.*

(Plyne ihned z 96.)

98. Věta: *Buď P topologický prostor; buď Q hustá část P. Buď Y lineární prostor, jehož prvky jsou spojité funkce na prostoru P. Buď L množina všech aditivních a homogenních funkcí na Y; buď L_1 množina všech $g \in L$ tvaru $g(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x(t_i)$, kde $t_1, \ldots, t_m \in Q$. Pak je L_1 při slabé topologii husté v L.*

Důkaz: Přiřaďme každé funkci $x \in Y$ parciální funkci x_Q na množině Q. Zobrazení $x \to x_Q$ je zřejmě isomorfismus; odtud věta snadno plyne.

99. Věta: *Budiž Y normovaný lineární prostor; buď V množina všech vrcholů jednotkové koule v $C(Y)$. Buď $[V]$ množina všech lineárních kombinací prvků množiny V. Pak je při slabé topologii $[V]$ husté v $C(Y)$.*

Důkaz: Podle poznámky k větě 87 lze Y pokládat za jakousi množinu funkcí na V. Nyní použijeme věty 97.

Poznámka. Je-li Y dokonce M-lineál, můžeme vzít za V také jen množinu všech kladných vrcholů.

Podobnou větu lze zřejmě dokázat pro libovolný lineární prostor Y, vezmeme-li za V takovou množinu aditivních a homogenních funkcí, aby ke každému $y \in Y$, kde $y \neq 0$, existovalo $v \in V$ tak, aby bylo $v(y) \neq 0$; pak můžeme totiž Y representovat jako systém funkcí $\bar{y}$, definovaných na množině V obvyklým způsobem. Množina $[V]$ je pak při slabé topologii hustá v množině všech aditivních a homogenních funkcí na Y.

LITERATURA

[1] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва-Ленинград 1950.

[2] *S. Kakutani:* Concrete representation of abstract (M)-spaces, Annals of Mathematics, *42* (1941), str. 994—1024.

[3] *H. F. Bohnenblust - S. Kakutani:* Concrete representation of (M)-spaces, Annals of Mathematics, *42* (1941), str. 1025—1028.

[4] *E. Hewitt:* Linear functionals on spaces of continuous functions, Fundamenta Mathematicae, *37* (1950), str. 161—189.

[5] *M. Krein - D. Milman:* On extreme points of regular convex sets, Studia Mathematica, IX (I), 1940, str. 133—138.

[6] *M. Katětov*: O normovaných vektorových prostorech, Rozpravy II. třídy České akademie, LIII, č. 45.