# O NADPLOCHÁCH TOTÁLNĚ GEODETICKÝCH V RIEMANNOVĚ PROSTORU, II

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

(Došlo dne 23. února 1953.) DT: 513.813

Článek je pokračováním dřívější práce „O nadplochách totálně geodetických v Riemannově prostoru, I, uveřejněném v Časopise pro pěstování matematiky, 78 (1953), 65-72. V předložené práci je uvedeno několik důležitých vět, týkajících se nutných podmínek pro existenci $p$-rozměrných totálně geodetických subvariet $n$-rozměrného prostoru Riemannova, vnořitelného do euklidovského prostoru dimense $n + 1$. Práce nenavazuje bezprostředně na shora citovaný dřívější článek; je zobecněním výsledků v něm uvedených.

V prvé části práce[1]) byly uvedeny některé nutné podmínky pro to, aby v obyčejném Riemannově prostoru $V_n$ třídy $I$ (t. j. Riemannův prostor $V_n$ vnořitelný do $(n + 1)$-rozměrného euklidovského prostoru) existovaly totálně geodetické variety $(n - 1)$ rozměrné $G_{n-1}$.

V této druhé části práce budou obsaženy nutné podmínky pro existenci totálně geodetických variet $p$-rozměrných $G_p$ $(2 \leq p < n)$ v uvažovaném obyčejném prostoru Riemannově $V_n$ třídy I. Právě tak jako v prvé části budeme i zde vycházet z předpokladů, že

a) veličiny definující varietu $V_n$ mají spojité parciální derivace podle souřadnic $\xi^\alpha$ ve $V_n$ potřebného řádu;

b) hodnost druhého metrického tensoru $h_{\alpha\beta}$ ve $V_n$ jest $n$.

Případ $n = 2$ vyloučíme z našich úvah.[2])

Při odvolání na prvou část práce budeme v poznámkách používat pro stručnost místo celé citace symbolu I.

## Definice totálně geodetické plochy ve $V_n$ a některé vztahy pro veličiny v $G_p$.

Podáme zde geometrickou definici totálně geodetické $G_p$ $(2 \leq p < n)$ ve $V_n$, o níž jsme se zmínili v prvé části práce (Poznámka 4) ve spec. případě $p = n - 1$.

[1]) *Fr. Nožička:* O nadplochách totálně geodetických v Riemannově prostoru, I, Časopis pro pěstování matematiky, 78 (1953).

[2]) Viz [1]), poznámka 1.

**Definice 1.** *Totálně geodetickou varietou* $G_p$ $(2 \leqq p < n)$ *ve* $V_n$ *nazýváme p-rozměrnou varietu* $V_p$ *vnořenou do* $V_n$[3]) *té vlastnosti, že každá křivka ve* $V_p$, *ve* $V_p$ *geodetická, je též geodetickou ve* $V_n$ *(pokud ovšem varieta této vlastnosti ve* $V_n$ *existuje).*

Budeme nyní předpokládat, že existuje totálně geodetická varieta $G_p$ ve $V_n$. Buďtež její parametrické rovnice

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a), \ \alpha = 1, 2, \ldots, n; \ a = 1, \ldots, p, \tag{1,1}$$

při čemž předpokládáme samozřejmě, že rovnicemi (1,1) je definována lokálně regulární $p$-rozměrná varieta ve smyslu diferenciální geometrie.

Je-li $g_{\alpha\beta}$ metrickým tensorem ve $V_n$, pak v $G_p$ je indukována metrika s metrickým tensorem

$$g_{ab} = B^\alpha_a B^\beta_b g_{\alpha\beta} \left( B^\alpha_a \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^a} \right), \tag{1,2}$$

tedy metrika s posit. definitním metrickým tensorem $g_{ab}$. Pro koeficienty konexe indukované v $G_p$ platí pak

$$\left\{ {c \atop ab} \right\} = \tfrac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}), \tag{1,3$_a$}$$

kde $g^{ab}$ je symetrický tensor v $G_p$, kontragredientní k tensoru $g_{ab}$. Značí-li $\nabla_a$ symbolický vektor Lagrangeovy derivace, potom platí

$$\left\{ {c \atop ab} \right\} \equiv B^\beta_d g^{dc} g_{\beta\alpha} \nabla_a B^\alpha_b \equiv B^\beta_d g^{dc} g_{\beta\alpha} \left( \partial_a B^\alpha_b + \left\{ {\alpha \atop \gamma\delta} \right\} B^\gamma_a B^\delta_b \right),$$

nebo stručněji

$$\left\{ {a \atop bc} \right\} \equiv C^c_\alpha \nabla_a B^\alpha_b , \tag{1,3$_b$}$$

kde

$$C^c_\alpha \equiv B^\beta_d g^{dc} g_{\beta\alpha} ,$$

což se výpočtem snadno ověří.

Systém rovnic

$$B^\alpha_a t_\alpha = 0 , \quad a = 1, \ldots, p, \tag{1,4}$$

je celkem soustavou $p$ lineárně nezávislých homogenních rovnic pro $n$ neznámých $t_\alpha$. Pak můžeme však v každém uvažovaném bodě variety $G_p$ najít $n - p$ vzájemně kolmých jednotkových vektorů $\underset{k}{t_\alpha}$, $k = p + 1, \ldots, n$, vyhovujících rovnici (1,4). Tedy

$$B^\alpha_a \underset{k}{t_\alpha} = 0 , \quad g_{\alpha\beta} \underset{k}{n^\alpha} \underset{l}{n^\beta} = \left\langle {1 \text{ pro } k = l \atop 0 \text{ pro } k \neq l,} \right. \tag{1,5}$$

[3]) Tedy $p$-rozměrnou varietu s indukovanou metrikou.

při čemž jsme definovali $\underset{k}{n}^\alpha \equiv g^{\alpha\beta}\underset{k}{t}_\beta$. Ze vztahu (1,3), (1,5) plyne pak t. zv. Gaussova formule

$$\nabla_a B_b^\alpha = \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} B_c^\alpha - \sum_{k=p+1}^{n} \underset{k}{h}_{ab} \underset{k}{n}^\alpha, \tag{1,6}$$

kde

$$\underset{k}{h}_{ab} \equiv -\underset{k}{t}_\alpha \nabla_a B_b^\alpha\,, \quad k = p + 1, \ldots, n\,. \tag{1,7}$$

Formule (1,6) platí pro obecnou $V_p$ ve $V_n$. Tato formule se však podstatně zjednoduší pro totálně geodetickou varietu $G_p$.

**Věta 1.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovnicemi* (1,1) *byla definována totálně geodetická varieta $V_p$ ve $V_n$, jest*

$$\nabla_a B_b^\alpha = \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} B_c^\alpha\,. \tag{1,8}$$

Důkaz: Pro důkaz nutnosti podmínky věty předpokládáme nejdříve, že rovnicemi (1,1) je definována $p$-rozměrná totálně geodetická varieta $G_p$ ve smyslu definice 1.

Budiž $v^a$ jednotkovým tečným vektorem regulární křivky v $G_p$. Složky tohoto vektoru ve $V_n$ jsou pak $v^\alpha = B_a^\alpha v^a$. Nechť $s$ je obloukem křivky. Potom platí

$$\nabla_s v^\alpha = \nabla_s(B_a^\alpha v^a) = v^a v^b \nabla_b B_a^\alpha + B_c^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v^c$$

a tedy vzhledem k (1,6)

$$\nabla_s v^\alpha = B_c^\alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v^c + \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} v^a v^b\right) - \sum_{k=p+1}^{n} \underset{k}{h}_{ab} v^a v^b \underset{k}{n}^\alpha\,,$$

t. j.

$$\nabla_s v^\alpha = B_c^\alpha\, {}'\nabla_s v^c - \sum_{k=p+1}^{n} \underset{k}{h}_{ab} v^a v^b \underset{k}{n}^\alpha\,, \tag{1,9}$$

kde $'\nabla_s$ je symbol absolutní derivace v $G_p$.

Nechť nyní je $v^c$ tečným jednotkovým vektorem křivky geodetické v $G_p$ ($s$ je její oblouk). Potom podle definice geodetik, je $'\nabla_s v^c = 0$; vztah (1,9) můžeme pak přepsat na tvar

$$\nabla_s v^\alpha = -\sum_{k=p+1}^{n} \underset{k}{h}_{ab} v^a v^b \underset{k}{n}^\alpha\,. \tag{1,9$_a$}$$

Poněvadž podle předpokladu je $G_p$ totálně geodetickou a tedy každá geodetika v $G_p$ je též geodetikou ve $V_n$, je $\nabla_s v^\alpha = 0$, odkud vzhledem k (1,9) plyne ihned

$$\underset{k}{h}_{ab} v^a v^b = 0\,, \quad k = p + 1, \ldots, n, \tag{1,10}$$

neboť vektory $\underset{k}{n}^\alpha$ jsou lineárně nezávislé. Protože každá geodetika v $G_p$ je též geodetikou ve $V_n$, platí vztah (1,10) pro tečný vektor každé geodetiky v každém regulárním bodě variety $G_p$.

Za těchto okolností pak plyne z (1,10)

$$\underset{k}{h}_{ab} \equiv 0\,, \quad k = p + 1\,, \ldots, n^{4}). \tag{1,11}$$

Odtud je pak zřejmé, že Gaussova formule (1,6) se redukuje na tvar (1,8), čímž je nutnost podmínky věty dokázána.

Předpokládejme za druhé, pro důkaz postačitelnosti podmínky věty, že pro varietu $V_p$ ve $V_n$, danou parametrickými rovnicemi (1,1), platí (1,8). Z (1,8), (1,6) plyne pak (1,11). V důsledku (1,11) se vztah (1,9) redukuje na rovnice

$$\nabla_s v^\alpha = B^\alpha_a {}'\nabla_s v^a\,, \tag{1,12}$$

platné pro každou regulární křivku o tečném vektoru $v^a$ ve $V_p$. Je-li $v^a$ tečným jednotkovým vektorem libovolné geodetiky ve $V_p$, pak je $'\nabla_s v^a = 0$, což podle (1,12) implikuje $\nabla_s v^a = 0$. Tedy křivka je též geodetickou ve $V_n$. Odtud pak, ve smyslu definice 1, plyne, že $V_p$ je totálně geodetickou varietou ve $V_n$, pro níž jsme zavedli symbol $G_p$.

Poznámka 1. Z (1,8) plynou jakožto podmínky integrability vztahy

$$B^\alpha_a B^\beta_b B^\gamma_c K_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = {}'K_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d} B^\delta_d\,, \tag{1,13}$$

což je tak zvaná Gaussova rovnice pro případ totálně geodetické variety $G_p$ ve $V_n$. V (1,13) značí $K_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta}$ tensor křivosti prostoru $V_n$, $K_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d}$ tensor křivosti variety $G_p$. Z (1,13) plyne pak bezprostředně vzhledem k (1,5) další důležitý vztah

$$B^\alpha_a B^\beta_b B^\gamma_c \underset{k}{n}^\delta K_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0\,, \quad k = p + 1, \ldots, n\,.$$

který v dalších úvahách použijeme.

## § 2. Nutné podmínky pro existenci totálně geodetických $G_p$ ve $V_n$.

Nejdříve uvedeme velmi jednoduchý případ totálně geodetických variet $G_p$ ve $V_n$.

---

[4]) Vztah (1,11) dokážeme z (1,10) na př. takto: Uvažujme v nějakém regulárním bodě variety $G_p$ $p$ vzájemně ortogonálních geodetických křivek v $G_p$ s tečnými vektory $\underset{i}{v}^a$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Potom platí podle (1,10)

$$\underset{k}{h}_{ab} \underset{i}{v}^a \underset{i}{v}^b = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, p;\; k = p + 1, \ldots, n\,. \tag{*}$$

Pro geodetickou křivku jdoucí uvažovaným bodem s tečným vektorem $v^a = \underset{1}{\lambda} \underset{i}{v}^a + \underset{2}{\lambda} \underset{j}{v}^a$ $\underset{1}{\lambda} \neq 0$, $\underset{2}{\lambda} \neq 0$, $i \neq j$ platí rovněž vztah (1,10), což vede k dalším podmínkám

$$\underset{k}{h}_{ab} \underset{i}{v}^a \underset{j}{v}^b = 0\,, \quad i \neq j\,, \quad i, j \in 1, 2, \ldots, p\,. \tag{**}$$

Snadnou úvahou plyne pak z (*), (**), vztah (1,11).

**Věta 2.** A. *Nechť existuje ve $V_n$ totálně geodetická varieta $G_p$ s parametrickými rovnicemi* (1,1). *Nechť v každém regulárním bodě této variety $G_p$ je splněn vztah*

$$w_{ab} \equiv B^\alpha_a B^\beta_b h_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{2,1}$$

*Potom varieta $G_p$ je p-rozměrnou nadrovinou ve $V_n$, t. j. $G_p \equiv E_p$.*[5])

B. *Jestliže varieta $V_n$ obsahuje p-rozměrnou nadrovinu $E_p$, pak tato nadrovina je totálně geodetickou varietou $G_p$ ve $V_n$ a platí pro ni* (2,1).

Důkaz: Nejdříve dokážeme část A. věty 2. Budiž $C$ nějaká křivka v $G_p$, kde $G_p$ je totálně geodetická varieta ve $V_n$, definovaná rovnicemi (1,1). Nechť parametrické rovnice křivky $C$ jsou

$$\eta^a = \eta^a(s)\,, \quad a = 1, \ldots, p\,, \tag{2,2}$$

kde $s$ je obloukem této křivky. Jsou-li

$$X^A = X^A(\xi^\alpha)\,, \quad A = 1, 2, \ldots, n+1;\ \alpha = 1, \ldots, n, \tag{2,3}$$

rovnice variety $V_n$ v $E_{n+1}$, kde $X^A$ jsou pravoúhlé souřadnice kartézské bodů v $E_{n+1}$, potom složky tečného vektoru $v^a$ křivky $C$ v $E_{n+1}$ jsou

$$v^A = B^A_a v^a = B^A_\alpha B^\alpha_a \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}s}\,, \tag{2,4}$$

kde

$$B^A_a \equiv \frac{\partial x^A}{\partial \eta^a}\,, \quad B^\alpha_a \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^a}\,, \quad B^A_\alpha \equiv \frac{\partial x^A}{\partial \xi^\alpha}\,.$$

Z (2,4) plyne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v^A \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} B^A_a v^a = v^a v^b \partial_b B^A_a + B^A_c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v^c\,. \tag{2,5}$$

Jest však vzhledem k (1,8), (2,1)[6])

$$\begin{aligned}
\partial_b B^A_a &= \partial_b (B^A_\alpha B^\alpha_a) = B^\alpha_a B^\beta_b \partial_\beta B^A_\alpha + B^A_\alpha \partial_b B^\alpha_a = \\
&= B^\alpha_a B^\beta_b \left( B^A_\gamma \begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} - h_{\alpha\beta} N^A \right) + B^A_\alpha \partial_b B^\alpha_a = \\
&= B^A_\gamma \left( \partial_b B^\gamma_a + B^\alpha_a B^\beta_b \begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \right) = B^A_\gamma \nabla_b B^\gamma_a
\end{aligned}$$

a tedy

$$\partial_b B^A_a = B^A_\gamma B^\gamma_c \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} = B^A_c \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix}\,. \tag{2,6}$$

Z (2,6), (2,5) plyne potom

$$\frac{d}{\mathrm{d}s} v^A = B^A_c\, {}'\nabla_s v^c. \tag{2,7}$$

---

[5]) T. j. $p$-rozměrnou nadrovinou prostoru $E_{n+1}$ v němž leží $V_n$.

[6]) a vzhledem ke Gaussově formuli pro varietu $V_n$ v $E_{n+1}$, t. j. formuli $\partial_\beta B^A_\alpha = \{^{\gamma}_{\alpha\beta}\} B^A_\gamma - h_{\alpha\beta} N^A$, kde $N^A$ je normální jednotkový vektor variety $V_n$.

Nechť křivka definovaná rovnicemi (2,2) je libovolnou geodetickou křivkou v $G_p$. Potom je $'\nabla_s v^c = 0$, což podle (2,7) implikuje $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v^A = 0$. Řešením posledních rovnic je však přímka v $E_{n+1}$, o rovnicích $x^A = \underset{0}{v^A} s + \underset{0}{x^A}$, kde $\underset{0}{v^A}$, $\underset{0}{x^A}$ jsou integrační konstanty. Geodetiky variety $G_p$ jsou tedy přímky, z čehož vyplývá, že $G_p$ je $p$-rozměrným euklidovským prostorem $E_p$ ve $V_n$, čili, $p$-rozměrnou nadrovinou v $E_{n+1}$, obsaženou ve $V_n$. Tím je část A. věty dokázána.

Pro důkaz části B. věty předpokládáme, že varieta $V_n$ obsahuje $p$-rozměrnou rovinu $E_p$ prostoru $E_{n+1}$, kde $V_n$ leží. Budiž $\eta^a = \eta^a(t)$ rovnice geodetické křivky — tedy přímky v $E_p$. Je-li $v^a$ její jednotkový tečný vektor v $E_p$, potom složky tohoto vektoru v $E_{n+1}$ jsou

$$v^A = B^A_a v^a = B^A_\alpha B^\alpha_a v^a = B^A_\alpha v^\alpha \,.$$ [7])

Odtud odvodíme snadno vztah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v^A = B^A_\gamma \nabla_s v^\gamma - v^\alpha v^\beta h_{\alpha\beta} N^A. \tag{2,8}$$

Poněvadž naše křivka je přímkou v $E_{n+1}$, je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v^A = 0$, a tedy, vzhledem k tomu, že $N^A$, $B^A_\gamma$, $\gamma = 1, 2, \ldots, n$ jsou lineárně nezávislé v $E_{n+1}$, dostaneme z (2,8)

a) $$\nabla_s v^\gamma = 0\,,$$

b) $$v^\alpha v^\beta h_{\alpha\beta} = 0\,.$$

Z rovnic a) plyne, že křivka je též geodetickou ve $V_n$. Tedy každá geodetika v $E_p$ je též geodetikou ve $V_n$, t. j. $E_p$ je totálně geodetickou ve $V_n$.

Rovnici b) lze psát ve tvaru

$$v^a v^b B^\alpha_a B^\beta_b h_{\alpha\beta} = v^a v^b w_{ab} = 0\,.$$

Poněvadž předchozí vztah platí pro každý směr $v^a$, plyne z tohoto vztahu $w_{ab} = 0$,[8]) což je právě vztah (2,1). Tím je věta 2 dokázána.

Nyní se obrátíme k případům, kdy není $w_{ab}$ identicky rovno nule. Nejdříve však zavedeme následující definici:

**Definice 2.** *Nechť $V_p$ $(2 \leqq p < n)$ je $p$-rozměrnou varietou ve $V_n$. Varietu $V_p$ nazveme hlavní $p$-rozměrnou subvarietou prostoru $V_n$, jestliže tečný $p$-vektor variety $V_p$ v každém jejím bodě je $p$-vektorem hlavním (t. j. je tvořen $p$-lineárně nezávislými vektory ležícími v hlavních směrech tensoru $h_{\alpha\beta}$ ve $V_n$).*[9])

---

[7]) Viz (2,4).

[8]) Důkaz se provede obdobně jako v analogickém případě z poznámky 4.

[9]) I. Úvahy v důkaze věty 4, před větou 5, rovnice (3,7), (3,8).

**Věta 3.** *Nechť $G_p$ $(2 \leqq p < n)$ je totálně geodetická varieta ve $V_n$, definovaná rovnicemi* (1,1), *pro kterou se neanuluje tensor $w_{ab} = B^\alpha_a B^\beta_b h_{\alpha\beta}$ v každém jejím bodě. Potom varieta $G_p$ je p-rozměrnou hlavní subvarietou prostoru $V_n$.*

Důkaz: Poněvadž podle předpokladu není $w_{ab}$ všude v $G_p$ roven nule, existují v $G_p$ body, kde aspoň jedna složka tohoto tensoru je různá od nuly. Ze spojitosti uvažované veličiny plyne pak, že existuje celé okolí (obsahující uvažovaný bod), kde je tato složka různá od nuly.

Jakožto hlavní směr v $G_p$ nazveme takový směr $u^a$ v $G_p$, který vyhovuje rovnicím

$$(w_{ab} - \sigma g_{ab})\, u^a = 0\,, \tag{2,9}$$

kde

$$w_{ab} \equiv B^\alpha_a B^\beta_b h_{\alpha\beta}\,, \tag{2,10}$$

$\sigma$ je skalár v $G_p$. Rovnice (2,9) můžeme též psát ve tvaru

$$(w^c_a - \sigma\delta^c_a)\, u^a = 0\,, \quad \text{kde} \quad w^c_a \equiv g^{cb} w_{ba}\,, \tag{2,9)*$$

$\delta^c_a$ je Kroneckerovo delta.

Charakteristická rovnice příslušná systému rovnic (2,9)*, t. j. rovnice

$$\text{Determinant } [w^c_a - \sigma\delta^c_a] = 0 \tag{2,10}$$

jest rovnicí $p$-tého stupně v $\sigma$ s celkem $p$-reálnými kořeny (počítáno i s jejich násobností) v každém z uvažovaných bodů variety $G_p$. Z teorie hlavních směrů tensoru (reálného) je známo, že vždy lze najít $p$ jednotkových vzájemně kolmých vektorů $\underset{i}{u}^a$, $i = 1, \ldots, p$ (v případě že $\sigma_i$ jsou vesměs jednoduché kořeny rovnice (2,10), pak jednoznačně) takových, že vyhovují systému rovnic (2,9) a platí pro ně

$$w_{ab}\underset{i}{u}^a\underset{j}{u}^b = \begin{cases} 0 \text{ pro } i \neq j \\ 1 \text{ pro } i = j \end{cases}, \quad g_{ab}\underset{i}{u}^a\underset{j}{u}^b = \begin{cases} 0 \text{ pro } i \neq j \\ 1 \text{ pro } i = j \end{cases}, \tag{2,11}$$

kde $i$, $j$ probíhají indexy $1, 2, \ldots, p$.

Nechť $\underset{i}{u}^a$ je jedním z hlavních směrů tensoru $w_{ab}$ v $G_p$, odpovídající kořenu $\underset{i}{\sigma}$ charakteristické rovnice (2,10). Platí tedy pro tento směr

$$(w_{ab} - \underset{i}{\sigma} g_{ab})\, \underset{i}{u}^a = 0\,, \tag{2,12}$$

kterýžto systém rovnic můžeme, vzhledem k (1,2), (2,10) psát ve tvaru

$$(h_{\alpha\beta} - \underset{i}{\sigma} g_{\alpha\beta})\, \underset{i}{u}^\alpha B^\beta_b = 0\,, \quad \text{kde} \quad \underset{i}{u}^\alpha = B^\alpha_a \underset{i}{u}^a\,. \tag{2,13}$$

Složky $\underset{i}{u}^\alpha$ jsou tedy složkami vektoru $\underset{i}{u}^\alpha$ ve $V_n$. Z (2,13), (1,5) plyne

$$(h_{\alpha\beta} - \underset{i}{\sigma} g_{\alpha\beta})\, u^\alpha = \sum_{k=p+1}^{n} \underset{ik}{r}\, \underset{k}{t}_\beta\,, \tag{2,14}$$

při čemž

$$\underset{ik}{r} = h_{\alpha\beta}\underset{i}{u^{\alpha}}\underset{k}{n^{\beta}} \quad (\underset{k}{n^{\beta}} \equiv g^{\beta\alpha}\underset{k}{t_{\alpha}}) , \tag{2,15}$$

neboť

$$g_{\alpha\beta}\underset{i}{u^{\alpha}}\underset{k}{n^{\beta}} = g_{\alpha\beta}B^{\alpha}_{a}\underset{i}{u^{a}}\underset{k}{n^{\beta}} = B^{\alpha}_{a}\underset{k}{t_{\alpha}}v^{a} = 0$$

vzhledem k (1,5).

Podle předpokladu věty je $G_p$ totálně geodetickou ve $V_n$. Potom platí nutně pro tuto varietu vztah (1,14). Pro tensor křivosti $K_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\delta}$ variety $V_n$ v $E_{n+1}$ platí však Gaussova rovnice

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\delta} = h^{\delta}_{\alpha}h_{\beta\gamma} - h^{\delta}_{\beta}h_{\alpha\gamma} \quad (h^{\delta}_{\beta} \equiv g^{\delta\varrho}h_{\varrho\beta}) , \tag{*}$$

kde $h_{\alpha\beta}$ je druhým metrickým tensorem variety $V_n$. Vzhledem k této Gaussově rovnici (*) můžeme vztah (1,14) psát ve tvaru

$$(B^{\alpha}_{a}\underset{k}{n^{\delta}}h_{\alpha\delta})\,(B^{\beta}_{b}B^{\gamma}_{c}h_{\beta\gamma}) = (h_{\delta\beta}\underset{k}{n^{\delta}}B^{\beta}_{b})\,(h_{\alpha\gamma}B^{\alpha}_{a}B^{\gamma}_{c}) . \tag{2,16}$$

Násobením vztahu (2,16) vektorem $\underset{i}{u^{a}}$ (a sečtením přes $a$) dostaneme, píšeme-li $\underset{i}{u^{a}}B^{\alpha}_{a} = \underset{i}{u^{\alpha}}$,

$$(\underset{i}{u^{\alpha}}\underset{k}{n^{\delta}}h_{\alpha\delta})\,(B^{\beta}_{b}B^{\gamma}_{c}h_{\beta\gamma}) = (h_{\delta\beta}\underset{k}{n^{\delta}}B^{\beta}_{b})\,(h_{\alpha\gamma}\underset{i}{u^{\alpha}}B^{\gamma}_{c}),$$

čili, vzhledem k (2,15)

$$\underset{ik}{r}\,.\,B^{\beta}_{b}B^{\gamma}_{c}h_{\beta\gamma} = (h_{\delta\beta}\underset{k}{n^{\delta}}B^{\beta}_{b})\,(h_{\alpha\gamma}\underset{i}{u^{\alpha}}B^{\gamma}_{c}) . \tag{**}$$

Z (2,13) plyne však

$$h_{\alpha\gamma}\underset{i}{u^{\alpha}}B^{\gamma}_{c} = \underset{i}{\sigma}g_{\alpha\gamma}\underset{i}{u^{\alpha}}B^{\gamma}_{c} = \underset{i}{\sigma}g_{ec}\underset{i}{u^{e}} , \tag{2,17}$$

takže vztah (**) můžeme uvést na tvar

$$\underset{ik}{r}B^{\beta}_{b}B^{\gamma}_{c}h_{\beta\gamma} = \underset{i}{\sigma}g_{ec}\underset{i}{u^{e}}(h_{\delta\beta}\underset{k}{u^{\delta}}B^{\beta}_{b}) . \tag{2,18}$$

Předpokládejme nejdříve, že by $\underset{i}{\sigma} = 0$, t. j. že by směr $\underset{i}{u^{a}}$ odpovídal nulovému kořenu charakteristické rovnice (2,10). Poněvadž v uvažovaných bodech variety $G_p$ je tensor $w_{ab} = B^{\alpha}_{a}B^{\beta}_{b}h_{\alpha\beta}$ různý od nuly, plyne pak z (2,18) $\underset{ik}{r} = 0$, $k = p + 1, \ldots, n$. Tedy $\underset{i}{\sigma} = 0$, $\underset{i,k}{r} = 0 \Rightarrow h_{\alpha\beta}\underset{i}{u^{\alpha}} = 0$ (podle (2,14)). To však není možné, neboť podle předpokladu má tensor $h_{\alpha\beta}$ hodnost $n$ a vektor $\underset{i}{u^{\alpha}}$ je nenulový. Je tedy

$$\underset{i}{\sigma} \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, p , \tag{2,19}$$

v uvažovaných bodech variety $G_p$.

Budiž nyní $\underset{j}{u}^a$ $(j \neq i)$ jiným hlavním směrem v $G_p$, kolmým ke směru $\underset{i}{u}^a$, t. j.

$$g_{ab}\underset{i}{u}^a\underset{j}{u}^b = 0\,. \tag{2,20}$$

Označíme-li $\underset{j}{u}^\alpha \equiv B^\alpha_a \underset{j}{u}^a$, pak vynásobením vztahu (2,18) vektorem $\underset{j}{u}^b$ a sečtením přes $b$ dostaneme

$$\underset{ikj}{r}u^\beta B^\gamma_c h_{\beta\gamma} = \underset{i}{\sigma} g_{ec}\underset{i}{u}^e\,.\, h_{\delta\beta}\underset{k}{u}^\delta \underset{j}{u}^\beta\,,$$

což můžeme vzhledem k (2,15), (2,17) psát ve tvaru

$$\underset{ikj}{r}\,\underset{j}{\sigma} g_{ec}\underset{j}{u}^e = \underset{jki}{r}\,\underset{i}{\sigma} g_{ec}\underset{i}{u}^e\,.$$

Násobením tohoto vztahu vektorem $\underset{j}{u}^c$ plyne ihned (ježto $\underset{j}{\sigma}$ je podle (2,19) různé od nuly a $\underset{j}{u}^c$ je nenulový vektor) s přihlédnutím k (2,20)

$$\underset{ik}{r} = 0\,, \quad k = p+1\,,\ldots, n\,. \tag{2,21}$$

Z (2,21), (2,14) dostaneme tak

$$(h_{\alpha\beta} - \underset{i}{\sigma} g_{\alpha\beta})\,\underset{i}{u}^\alpha = 0\,. \tag{2,22}$$

Systém rovnic

$$(h_{\alpha\beta} - \sigma g_{\alpha\beta})\,u^\alpha = 0$$

jest však systém rovnic pro hlavní směry tensoru $h_{\alpha\beta}$ ve $V_n$.[10]) Podle (2,22) je tedy $u^\alpha$ hlavním směrem ve $V_n$.

Tedy každý hlavní směr v $G_p$, příslušný tensoru $w_{ab}$ v $G_p$ leží v hlavním směru tensoru $h_{\alpha\beta}$ ve $V_n$, jak plyne z (2,12), (2,22). Obsahuje tedy varieta $G_p$ v každém svém bodě $p$ hlavních (lineárně nezávislých) směrů prostoru $V_n$. Je tedy hlavní $p$- rozměrnou subvarietou prostoru $V_n$ ve smyslu definice 2, tak jak bylo dokázat.

**Věta 4.** *Nechť $G_p$ jest p-rozměrná totálně geodetická varieta ve $V_n$ ($2 \leqq p < n$). Potom existuje v $E_{n+1}$ (v němž leží $V_n$) $p+1$ rozměrná nadrovina $E_{p+1}$, obsahující varietu $G_p$.*

Důkaz: Gaussovu rovnici (1,13) můžeme přepsat na tvar

$$B^\alpha_a B^\beta_b B^\gamma_c B^\delta_d K_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}'K_{abcd}.$$

Z (*), (2,10) snadno nahlédneme, že tuto Gaussovu rovnici můžeme přepsat na tvar

$$'K_{abcd} = 2w_{d[a}w_{b]c}\,. \tag{2,23}$$

---

10) I. rovnice (3,7).

Nechť $D_c$ jest symbolem Van d. Waerden-Bortolotti-ho kovariantní derivace.[11]) Potom můžeme (1,8) psát stručně ve tvaru (viz pozn. [11]))

$$D_a B_b^\alpha = 0 \,. \tag{2,24}$$

Poněvadž jest

$$'\nabla_c w_{ab} = D_c w_{ab} \,, \quad \nabla_c h_{\alpha\beta} = D_c h_{\alpha\beta} \,, \tag{2,25}$$

můžeme vzhledem k známým vlastnostem operace $D_a$ psát

$$D_a w_{bc} = D_a B_b^\alpha B_c^\beta h_{\alpha\beta} = B_c^\beta h_{\alpha\beta} D_a B_b^\alpha + B^\beta h_{\alpha\beta} D_a B_b^\alpha + \\ + B_b^\alpha B_c^\beta D_a h_{\alpha\beta} \,,$$

a tedy vzhledem k (2,24), (2,25)

$$'\nabla_c w_{ab} = B_b^\alpha B_c^\beta B_a^\gamma \nabla_\gamma h_{\alpha\beta} \,. \tag{2,26}$$

Poněvadž pro varietu $V_n$ v $E_{n+1}$ jest splněna Gauss-Codazziho rovnice $\nabla_{[\gamma} h_{\alpha]\beta} = 0$, t. j. tensor $\nabla_\gamma h_{\alpha\beta}$ je symetrickým v indexech $\gamma$, $\alpha$, $\beta$, plyne odtud a z (2,26)

$$\nabla_{[c} w_{a]b} = 0 \,. \tag{2,27}$$

Na rovnice (2,23), (2,27) můžeme se nyní dívat jiným způsobem.

Mysleme si, zcela mimo předchozí úvahy, že v euklidovském prostoru $E_{p+1}$ dimense $p+1$ o pravoúhlých souřadnicích $y^{\bar{a}}$, $\bar{a} = 1, 2, \ldots, p+1$, je dána $p$-rozměrná varieta (nadplocha) $V_p$ rovnicemi

$$y^{\bar{a}} = y^{\bar{a}}(\eta^b) \,, \quad \bar{a} = 1, 2, \ldots, p+1; \; b = 1, \ldots, p \,.$$

Nechť $M^{\bar{a}}$ jsou komponenty jednotkového vektoru normály variety $V_p$ v $E_{p+1}$. Nechť $g_{ab}$ jest prvým, $w_{ab}$ druhým metrickým tensorem variety $V_p$ a $\nabla'_c$ symbol kovariantní derivace příslušný metrické konexi z tensoru $g_{ab}$ ve $V_p$. Potom pro tuto varietu $V_p$ platí jednak Gaussova formule

$$\partial_b B_c^{\bar{a}} = \begin{Bmatrix} e \\ bc \end{Bmatrix} B_e^{\bar{a}} - w_{bc} M^{\bar{a}} \,, \tag{2,28}$$

kde $B_c^{\bar{a}} \equiv \dfrac{\partial y^{\bar{a}}}{\partial \eta^c}$, jednak

$$\partial_b M^{\bar{a}} = B_c^{\bar{a}} g^{cd} w_{db} \,. \tag{2,29}$$

Dívejme se na systém rovnic (2,28), (2,29) jako na systém parciálních dife-

---

[11]) Operace $D_c$ je takto definována: Nechť $T^{c\alpha\beta\ldots}_{\gamma a\ldots}$ je tensorem ve $V_p$ vzhledem k indexům $a, b, c, \ldots$, tensorem ve $V_n$ vzhledem k indexům $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Potom

$$D_b T^{c\alpha\beta\ldots}_{\gamma a\ldots} = \partial_b T^{c\alpha\beta\ldots}_{\gamma a\ldots} + \left\{ {c \atop eb} \right\} T^{e\alpha\beta\ldots}_{\gamma a\ldots} - \left\{ {e \atop ab} \right\} T^{c\alpha\beta\ldots}_{\gamma e\ldots} + \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} B_b^\nu T^{c\mu\beta\ldots}_{\gamma a\ldots} + \\ + \left\{ {\beta \atop \mu\nu} \right\} B_b^\nu T^{c\alpha\mu\ldots}_{\gamma a\ldots} - \left\{ {\mu \atop \gamma\nu} \right\} B_b^\nu T^{c\alpha\beta\ldots}_{\mu a\ldots} + \ldots$$

Tak můžeme na př. vztah (1,8) psát stručně ve tvaru $D_a B_b^\alpha = 0$. Poznamenejme ještě, že operace $D_c$ má aditivní a distributivní vlastnosti.

renciálních rovnic pro $M^{\bar{a}}$, $B^{\bar{a}}_{c}$. Potom podmínky integrability těchto rovnic jsou právě vztahy (2,23), (2,27).

Vraťme se nyní k vlastnímu důkazu naší věty. Poněvadž $G_p$ je podle předpokladu věty totálně geodetickou ve $V_n$, platí pro ni, jak bylo ukázáno (2,23), (2,27). Tedy podmínky integrability rovnic (2,28), (2,29) jsou identicky splněny. Lze tedy varietu $G_p$ vnořit do euklidovského prostoru $E_{p+1}$, který leží v $E_{n+1}$ a představuje tedy $p + 1$ dimensionální nadrovinu v $E_{n+1}$, jak jsme chtěli dokázat.[12])

Poznámka 2. Můžeme si nyní položit otázku, jaká je orientace vektoru $M$ z rovnic (2,28), (2,29) v prostoru $E_{n+1}$, kde leží varieta $V_n$.

Jestliže je $G_p$ totálně geodetickou ve $V_n$, potom podle věty 4 existuje v $E_{n+1}$ nadrovina $E_{p+1}$, která obsahuje varietu $G_p$. Nechť jsou tedy $y^{\bar{a}}$, $\bar{a} = 1, \ldots, p + 1$ kartézské souřadnice v $E_{p+1}$,

$$y^{\bar{a}} = y^{\bar{a}}(\eta^a)\,, \quad \bar{a} = 1, \ldots, p + 1;\ a = 1, \ldots, p, \tag{2,30}$$

pak rovnice variety $G_p$ v $E_{p+1}$.[13]) Naši varietu $E_{p+1}$, v níž leží $G_p$, můžeme jakožto útvar v $E_{n+1}$ popsat rovnicemi

$$\tilde{x}^A = \tilde{x}^A(y^{\bar{a}})\,, \quad A = 1, \ldots, n + 1\,; \quad \bar{a} = 1, \ldots, p + 1, \tag{2,31}$$

při čemž $\tilde{x}^A$ jsou lineárními funkcemi nezávisle proměnných $y^{\bar{a}}$, $\bar{a} = 1, \ldots, \ldots, p + 1$. Varietu $G_p$ jakožto útvar v $E_{n+1}$ můžeme vzhledem k (2,30), (2,31) popsat parametrickými rovnicemi

$$\tilde{x}^A = \tilde{x}^A(y^{\bar{a}}(\eta^a))\,. \tag{2,32}$$

Na druhé straně je varieta $G_p$ jakožto útvar ve $V_n$, při čemž $V_n$ leží v $E_{n+1}$, popsána rovnicemi

$$x^A = x^A(\xi^\alpha(\eta^a))\,, \tag{2,33}$$

jak je zřejmé z (1,1), (2,3). Z (2,32), (2,33) plyne pak identita

$$\tilde{x}^A(y^{\bar{a}}(\eta^a)) = x^A(\xi^\alpha(\eta^a))\,.$$

Z této identity plyne parciálním derivováním podle $\eta^a$

$$\tilde{B}^A_{\bar{a}} B^{\bar{a}}_a = B^A_\alpha B^\alpha_a = B^A_a\,, \tag{2,35}$$

kde $\tilde{B}^A_{\bar{a}} \equiv \dfrac{\partial \tilde{x}^A}{\partial y^{\bar{a}}}$ jsou konstanty (neboť, jak bylo shora řečeno, jsou $\tilde{x}^A$ lineárními funkcemi proměnných $y^{\bar{a}}$). Symboly $B^A_\alpha$, $B^\alpha_a$ mají dřívější význam.

Parciálním derivováním podle $\eta^b$ levé strany v (2,35) dostaneme tak — vzhledem k (2,28), (2,35)

$$\partial_b(\tilde{B}^A_{\bar{a}} B^{\bar{a}}_a) = \tilde{B}^A_{\bar{a}} \partial_b B^{\bar{a}}_a = \tilde{B}^A_{\bar{a}} \left( \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} B^{\bar{a}}_c - w_{ab} M^{\bar{a}} \right) = \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} B^A_c - w_{ab} \tilde{B}^A_{\bar{a}} M^{\bar{a}}. \tag{a}$$

---

[12]) Viz na př. *J. A. Schouten:* Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, Groningen-Batavia, 1938, str. 142.

[13]) Rovnice (2,30) jsou výsledkem integrace rovnic (2,28), (2,29).

Parciálním derivováním pravé strany v (2,35) dostaneme podle pozn. [6]), (1,8), (2,10)

$$\partial_b(B^A_\alpha B^\alpha_a) = B^\alpha_a B^\beta_b \partial_\beta B^A_\alpha + B^A_\gamma \partial_b B^\gamma_a = B^\alpha_a B^\beta_b \left( \begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} B^A_\gamma - h_{\alpha\beta} N^A \right) + B^A_\gamma \partial_b B^\gamma_a =$$

$$= B^A_\gamma \nabla_b B^\gamma_a - B^\alpha_a B^\beta_b h_{\alpha\beta} N^A = B^A_c \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} - w_{ab} N^A . \tag{b}$$

Pozorováním pravých stran v (a), (b) plyne

$$w_{ab}(N^A - B^A_{\bar{a}} M^{\bar{a}}) = 0 . \tag{2,36}$$

Jednoduchý případ, kdy $w_{ab} = 0$ v každém bodě variety $G_p$, jsme vyřídili větou 2. Jestliže uvažujeme varietu $G_p$ z věty 3 (tedy $w_{ab}$ není roven nule v uvažovaném oboru variety $G_p$), potom plyne z (2,36)

$$N^A = \tilde{B}^A_{\bar{a}} M^{\bar{a}} . \tag{2,37}$$

Má tedy vektor $M^{\bar{a}}$ v $E_{p+1}$ složky v $E_{n+1}$ rovny $N^A$, t. j. vektor $M$ splývá s normálou $N$ variety $V_n$ v bodech variety $G_p$. Nyní můžeme vyslovit tuto větu:

**Věta 5.** *Budiž $\underset{0}{P}$ bodem variety $V_n$ a $\underset{0}{\mathfrak{P}}$ p-vektor z p hlavních lineárně nezávislých směrů tensoru $h_{\alpha\beta}$ variety $V_n$ v tomto bodě. Existuje-li p-rozměrná totálně geodetická varieta $G_p$ ve $V_n$, která*

*a) prochází bodem $\underset{0}{P}$,*

*b) obsahuje v bodě $\underset{0}{P}$ p-vektor $\underset{0}{\mathfrak{P}}$,*

*c) není p-rozměrnou nadrovinou ve $V_n$, potom*

1. *je $G_p$ jedinou totálně geodetickou varietou p-rozměrnou ve $V_n$ s vlastnostmi a), b), c),*

2. *varieta $G_p$ leží v $(p + 1)$-rozměrné nadrovině $E_{p+1}$, procházející bodem $\underset{0}{P}$, obsahující p-vektor $\underset{0}{\mathfrak{P}}$ a normálu variety $V_n$ v bodě $\underset{0}{P}$.*

Důkaz: Nutná podmínka z věty 3 je v bodě $\underset{0}{P}$ splněna. Podle věty 4 existuje $(p + 1)$ rozměrná nadrovina $E_{p+1}$ ve $V_n$ obsahující varietu $G_p$. Prochází tedy tato nadrovina bodem $\underset{0}{P}$ a obsahuje $p$-vektor hlavní $\underset{0}{\mathfrak{P}}$ v tomto bodě. Bod $\underset{0}{P}$ je bodem variety $V_n$ s normálním vektorem $\underset{0}{N^A}$ v bodě $\underset{0}{P}$. Podle poznámky 2 obsahuje nadrovina $E_{p+1}$, obsahující $G_p$, normální vektor $\underset{0}{N^A}$. Avšak bodem $\underset{0}{P}$ v $E_{n+1}$, normálním vektorem $\underset{0}{N^A}$ v bodě $\underset{0}{P}$ a hlavním $p$-vektorem $\underset{0}{\mathfrak{P}}$ je $E_{p+1}$ jakožto útvar v $E_{n+1}$ jednoznačně stanovena.

Existuje-li tedy totálně geodetická $p$-rozměrná varieta s vlastnostmi a), b), c), potom tato varieta $G_p$ je průnikem variety $V_n$ (jež je jednoznačně definována v $E_{n+1}$) s jednoznačně definovanou nadrovinou $E_{p+1}$ ve $V_n$. S tvrzením 2. věty platí tedy též tvrzení 1. Tím je důkaz věty 5 proveden.

Poznámka 3. Důkaz věty 5 lze snadno sledovat v početní symbolice. Buďtež $\underset{i}{v}^\alpha$, $i = 1, 2, \ldots, p$ jednotkové vzájemně kolmé vektory v hlavních směrech tensoru $h_{\alpha\beta}$ ve $V_n$, $(\underset{i}{v}^\alpha)_0$, $i = 1, \ldots, p$ pak složky těchto vektorů v bodě $\underset{0}{P}$ variety $V_n$, jehož souřadnice v $E_{n+1}$, v němž $V_n$ leží, označme

$$\underset{0}{x}^A = x^A(\xi_0^\alpha)\,, \quad A = 1, 2, \ldots, n+1\,;\ \alpha = 1, \ldots, n.$$

Vektory $(\underset{i}{v}^\alpha)_0$ mají složky v $E_{n+1}$

$$(\underset{i}{v}^A)_0 = (B_\alpha^A \underset{i}{v}^\alpha)_0\,, \quad i = 1, \ldots, p\,.$$

Nechť hlavní $p$-vektor $\underset{0}{\mathfrak{P}}$ v bodě $\underset{0}{P}$ je tvořen uvedenými hlavními vektory $(\underset{i}{v}^A)_0$ v tomto bodě. Je-li $\underset{0}{N}^A$ jednotkový vektor normály variety $V_n$ v bodě $\underset{0}{P}$, potom rovnice nadroviny $E_{p+1}$ v $E_{n+1}$ jdoucí bodem $\underset{0}{P}$, obsahující $p$-vektor $\underset{0}{\mathfrak{P}}$ a vektor $\underset{0}{N}^A$ v tomto bodě, tedy nadroviny obsahující $G_p$, jsou

$$(x^A - \underset{0}{x}^A)\,(\underset{k}{t}_A)_0 = 0\,, \quad k = p+1, \ldots, n, \tag{2,38}$$

kde $\underset{0}{x}^A$ jsou souřadnice bodu $\underset{0}{P}$, $x^A$ souřadnice běžného bodu v $E_{p+1}$, $(\underset{k}{t}_A)_0$ jsou pro $k = p+1, \ldots, n$ jednotkové, vzájemně kolmé vektory v bodě $\underset{0}{P}$, ležící v hlavních směrech tensoru $h_{\alpha\beta}$ variety $V_n$ v bodě $\underset{0}{P}$, které jsou kolmé k hlavním směrům $(\underset{i}{v}^A)_0$, tvořícím $p$-vektor $\underset{0}{\mathfrak{P}}$ v bodě $\underset{0}{P}$, tedy

$$(\underset{i}{v}^A \underset{k}{t}_A)_0 = 0\,, \quad i = 1, \ldots, p;\ k = p+1, \ldots, n\,. \tag{2,39}$$

Jsou-li (2,3) rovnice variety $V_n$ v $E_{n+1}$, potom rovnice průniku variety $V_n$ s nadrovinou (2,38) jsou

$$(x^A(\xi^\alpha) - \underset{0}{x}^A)\,(\underset{k}{t}_A)_0 = 0\,, \quad k = p+1, \ldots, n\,, \tag{2,40}$$

což je celkem $n - p$ rovnic mezi proměnnými $\xi^\alpha$. Existuje-li tedy ve $V_n$ totálně geodetické varietě $G_p$ s vlastnostmi a), b), c) z věty 5, potom lze tuto varietu $G_p$ jakožto útvar ve $V_n$ popsat rovnicemi (2,40).

Soustava rovnic (2,40) jest soustavou $n - p$ implicitních vztahů mezi $\xi^\alpha$ tvaru

$$\Phi_k(\xi^\alpha) = 0\,, \quad k = p+1, \ldots, n\,. \tag{2,41}$$

Jest podle (2,40)

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi^\alpha} = (\underset{k}{t}_A)_0 B^A_\alpha$$

a tedy

$$\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi^\alpha}\right)_0 = (\underset{k}{t}_A B^A_\alpha)_0 = (B^A_\alpha g_{AB} \underset{k}{n}^B)_0 = (B^A_\alpha g_{AB} B^B_\beta \underset{k}{n}^\beta)_0 \,,$$

při čemž používáme označení $\underset{k}{n}^B \equiv g^{BA} \underset{k}{t}_A$, $\underset{k}{n}^\beta = g^{\beta\alpha} \underset{k}{t}_\alpha$. Tedy

$$\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi^\alpha}\right)_0 = (\underset{k}{t}_\alpha)_0 .$$

Poněvadž hodnost matice $( \underset{p+1}{t}_\alpha, \underset{p+2}{t}_\alpha, \ldots, \underset{n}{t}_\alpha)_0$ jest $n - p$, můžeme z rovnic (2,41) tedy z rovnic (2,40) v okolí bodu $\underset{0}{P}$ vypočítat jednoznačně $n - p$ souřadnic jakožto funkce zbývajících $p$ souřadnic $\xi$. Dosazením do rovnic (2,3) variety $V_n$ dostaneme pak v okolí bodu $\underset{0}{P}$ jednoznačně varietu $p$-rozměrnou jakožto průnik nadroviny (2,38) s varietou $V_n$.

Poznámka 4. Výsledky v této práci jsou mocnou pomůckou k hledání postačujících podmínek pro existenci totálně geodetických subvariet ve $V_n$. (Postačující podmínky pro existenci totálně geodetických subvariet ve $V_n$ spolu s příklady budou předmětem pozdější III. části práce.)