Recenze článků a knih: Sovětské učebnice analytické geometrie

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 2, 169--182

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117083

RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

Sovětské učebnice analytické geometrie.

Sovětské učebnice analytické geometrie pro vysoké školy nebyly dosud u nás recensovány. Proto se redakce rozhodla uveřejnit recense základních učebnic tohoto oboru, třebaže nejde mnohde o učebnice nové, jak je vidět z velké řady vydání některých z nich. Čtenáři mohou tak porovnat látku učebních kursů z analytické geometrie v SSSR s osnovami, které se u nás právě zavádějí.

И. И. Привалов: **Аналитическая геометрия.** (*I. I. Privalov*: **Analytická geometrie.**) Státní vydavatelství technicko-theoretické literatury, Moskva-Leningrad 1949, šestnácté vydání, stran 312, cena 8 r. 15 k.

Privalovova knížka je učebnicí analytické geometrie pro posluchače techniky. Tím už je určen výběr látky. Podává metrickou geometrii lineárních a kvadratických útvarů v rovině a v prostoru, užívá k tomu kartézských pravoúhlých souřadnic a v rovině též souřadnic polárních a uvádí pro technika důležitý vektorový počet, ovšem jen běžné začátky. Souřadnice homogenní nikde autor nezavádí. Z našeho časopisu „*Vysoká škola*" (č. 7, květen 1951, str. 220—223) se dovídáme, že tato Privalovova knížka je oficiální učebnicí na sovětských technikách; velký počet vydání ukazuje, že je dobře vyzkoušená a úspěšná.

Kniha se dělí na dvě části; v první části je rovinná geometrie a pomocná kapitola o determinantech druhého a třetího řádu; druhá část podává geometrii prostorovou a vektorový počet.

Část I. obsahuje celkem 7 kapitol. Po zavedení pravoúhlých souřadnic v rovině a pojmu orientované úsečky podává autor hlavní vzorce a výsledky ve formě t. zv. *základních úloh* (osnovny zadače). Zde na začátku je výklad velmi podrobný a obšírný a ke každé i sebe lehčí obecné úvaze je přidán numerický příklad, opět podrobně propočítaný; je možné, že pro nadaného studenta je takový způsob výkladu trochu nudný. Rozdělení výkladu typických případů do uvedených už základních úloh poskytuje studujícímu velmi dobrý a jasný přehled celé látky. Na rozdíl od našich zvyklostí zavádí Privalov pojem dělícího poměru bodu bez zřetele na orientaci úseček; určuje toliko dělicí poměr vnitřních bodů úsečky vzhledem k jejím koncovým bodům a zavádí jej jako veličinu kladnou (střed úsečky má tedy u něj dělicí poměr $+1$). Koncem první kapitoly hovoří o kolmém průmětu úsečky a lomené čáry na danou přímku a probírá tuto otázku zároveň i v prostoru; dokonce jsou zde uvedeny i vlastnosti průmětu plochy rovinného útvaru na jinou rovinu. To trochu kontrastuje s celkovou stavbou knihy, jinak velmi pěknou, protože prostorové úvahy patří svou povahou do druhé části. Druhá kapitola pojednává o přímce v rovině. O svazku přímek se autor zmiňuje jen stručně a užívá ho k praktickému počítání jen v několika málo příkladech. Všechen výklad se zde prozatím děje bez užití determinantů. V textu je opět propočítána řada příkladů; příklad 2. v § 12 patří však do § 11. Závěrem kapitoly uvádí autor výpočet vzdálenosti bodu od přímky, a to několika způsoby. Při tom se na str. 49 dopouští menší terminologické nepřesnosti, když rovnici pomocné přímky (5. řádek zdola) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - P = 0$ nazývá její *normální* rovnicí, při čemž zde zřejmě připouští i $P < 0$, zatím co na začátku druhé kapitoly zavedl tento název jen pro případ $P \geqq 0$. — Ve třetí kapitole pojednává Privalov všeobecně o rovnicích čar. Čáru pokládá za geometrické místo bodů, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $F(x, y) = 0$, kde F je funkce dvou proměnných x, y. O této funkci neuvádí sice žádné předpoklady, ale na příkladech ukazuje typické případy. Nezapomíná ani na takové příklady, kdy uvedená rovnice určuje konečný počet reálných bodů nebo čáru složenou a pod. Pak hned přechází k základním rovnicím kuželoseček a k jejich elementárním vlastnostem. Současně zde studuje tyto křivky i v souřadnicích polárních, kde připouští i záporné hodnoty průvodiče; tím se věc poněkud komplikuje, jednodušší by bylo uvažovat jen kladné průvodiče. Vedle kuželoseček, probíraných v textu, podává autor ve cvičení ještě jiné křivky, jako Bernoulliho lemniskatu, Pascalovu závitnici a pod., z nichž leckteré jsou technicky důležité. — Metrická geometrie kuželoseček je soustavně probrána v kapitole čtvrté, velmi důležité, k níž je přidáno hodně cvičení. — V páté kapitole probírá Privalov především transformace souřadnic, jež jsou mu vhodným prostředkem k základní klasifikaci křivek, totiž k rozdělení na křivky algebraické a transcendentní. — Šestá kapitola je věnována úvahám pomocným, totiž výkladu determinantů druhého a třetího řádu s běžnými aplikacemi geometrickými. — Na to navazuje v sedmé kapitole rozbor rovnice druhého stupně, a to na podkladě transformace souřadnic. Autor uvádí tři základní metrické invarianty kvadratické rovnice, při čemž nezávislost diskriminantu (tohoto názvu neužívá) na transformaci souřadnic v případě nestředových kuželoseček dokazuje limitním přechodem, který by snad zasluhoval podrobnější výklad.

Část II. je věnována prostorové geometrii a obsahuje 6 kapitol. V první kapitole jsou uvedeny základní pojmy: směrové kosiny, transformace souřadnic (užitím Eulerových úhlů) a pod. — Ve druhé kapitole uvádí autor čtenáře do vektorové algebry způsobem obvyklým ve fysice a v technických aplikacích. Nevyhýbá se při tom odvození základních vlastností vektorů na podkladě geometrického názoru. Tento způsob plně vyhovuje potřebám technika, aniž jej zatěžuje namáhavými abstrakcemi. Přitom jednotlivá tvrzení jsou formulována naprosto přesně. Řekl bych, že zde vidíme jednu z cest, kterými by bylo možno dojít k řešení problému výkladu matematiky na technikách. Nejde o to, má-li se technikům vykládat obsah matematických pojmů a tvrzení s naprostou přesností či povrchně, v tom není zajisté pochyb, jako spíše o to, jak daleko lze jít při výkladu v abstrakcích. Domnívám se, že Privalovův způsob výkladu je v tomto směru velmi zdravý. Snadno pak také ukazuje čtenáři praktické aplikace vektorového počtu (moment síly, práce, objem čtyřstěnu a pod.). V dalších kapitolách je vektorové symboliky užíváno důsledně vedle obyčejného způsobu. — Na vektorovou algebru navazuje v dalších dvou kapitolách lineární geometrie. Úvahy o přímce opírá většinou o určitý standardní typ rovnic, což není vždy nejrychlejší a ani po věcné stránce bezvadné, jak je vidět na příkladu 2. v textu na str. 249, kde autor píše nuly i ve jmenovatelích zlomků, jen aby zachoval formu vzorců, jichž užívá. Podobně viz příklad 1. na str. 261. — Pátou kapitolu lze přirovnat ke kapitole třetí z I. části. Autor zde ukazuje příklady rovnic jiných ploch a čar nežli roviny a přímky, ale na rozdíl od geometrie v rovině postupuje zde stručněji a spokojuje se jen nejtypičtějšími případy. Kvadratické válce a kužele určuje v nejobecnějších polohách (této otázce je věnováno dost místa). — Poslední šestá kapitola pojednává o kvadratických plochách, ale jen velmi stručně. Autor upozorňuje vlastně pouze na existenci kvadrik, jejich různých typů a na možnost zvládnout je analyticky.

K obsahu knihy ještě patří podotknout, že vedle řady příkladů, které jsou v textu přímo propočítány, je ke každé kapitole s výjimkou poslední přidána řada úloh jako cvičení; jejich výsledky jsou uvedeny na konci knihy. Velkou předností knihy je jasný výklad, který, jak jsem poznal, nečiní studentům nejmenších potíží. Rovněž nízká krámská cena je studentům přijatelná.

Pokud jde o tiskové chyby, nutno říci, že v tomto 16. vydání se sice vyskytují, ale jsou takového rázu, že je lze na první pohled snadno najít a opravit. Při tom jich vzhledem k rozsahu knihy není mnoho. Na přání redakce zde tyto tiskové chyby přehledně uvádím, aby si je čtenář mohl snadněji opravit;

Str. 19, řádek 3 zdola: místo x_1y má být x_1y_2.
Str. 35, řádek 8 zdola: místo $x = b$ má být $y = b$.
Str. 43, řádek 1 shora: místo $k = \frac{2}{4}$ má být $k = \frac{2}{3}$.
Str. 109, řádek 9 shora: místo x má být X.
Str. 144: ve cvičení 9a má být zřejmě determinant

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \sin\beta, & 1 \\ \sin\alpha, & \cos\beta, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

jak vyplývá z výsledku uvedeného na konci knihy.

Str. 146, řádek 5 shora: místo Cx má být Cy.

Str. 150, řádek 16 shora: místo $B \sin\alpha \cos\alpha$ má být $2B \sin\alpha \cos\alpha$.

Str. 153, řádek 17 shora: místo 1 — ro má být 2 — ro.

Str. 154, řádek 1 zdola: místo $D \begin{vmatrix} A, B \\ B, C \end{vmatrix}$ má být ve jmenovateli pouze $\begin{vmatrix} A, B \\ B, C \end{vmatrix}$

Str. 156, řádek 8 shora: v posledním determinantu tohoto řádku chybí zlomková čáry u prvního prvku, který je $\frac{3}{2}$.

Str. 159, řádek 18 shora: v rovnici (16′) chybí zlomkové čáry ve jmenovatelích složených zlomků.

Str. 161, řádek 9 zdola: v druhém determinantu má být v prvním sloupci a třetím řádku prvek D_1'.

Str. 170, řádek 1 zdola: místo $\sin\varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ má být $\sin\varphi = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Str. 180, řádek 19 shora: místo M má být M_1.

Str. 192, řádek 10 shora: místo $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} = A$ má být $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} = \mathbf{A}$.

Str. 195, řádek 7 shora: znak + je třeba vynechat; jde o dvě rovnice.

Str. 209, řádek 4 zdola; místo $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$ má být $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$.

Str. 233, řádek 8 shora: rovnice (19) má být správně napsána ve tvaru

$$((\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)) = 0.$$

(viz označení zavedené na str. 212).

Str. 244, řádek 5 zdola: místo $\mathbf{r}_0$ má být $\mathbf{r}$.

Str. 246, řádek 17 shora: první rovnice v tomto řádku má znít

$$\frac{x - a}{m} = \frac{z - c}{p} \quad \left(\text{místo} = \frac{z - c}{b}\right).$$

Str. 246: v obr. 105 má být příslušný bod označen M místo M_1.
Str. 252, řádek 15 shora: místo x_2e má být x_2.

Karel Havlíček, Praha.

О. Н. Цубербиллер: **Задачи и упражнения по аналитической геометрии.** (*O. N. Cuberbiller*: **Úlohy a cvičení z analytické geometrie.**) Státní vydavatelstvo technicko-theoretické literatury, Moskva-Leningrad 1949, patnácté vydání, stran 335, cena 9 r. 40 k.

Sbírky příkladů jsou užitečnou pomůckou při studiu základních učebnic všech oborů matematiky. Cuberbillerova sbírka je takovým vhodným doplňkem v analytické geometrii; v naší literatuře nemáme dosud její obdobu. Je zaměřena pro potřeby studujících na technikách a na pedagogických vysokých školách v SSSR. Obsahuje celkem 1233 úloh, jež vyčerpávají látku z analytické geometrie přibližně ve stejném rozsahu jako Privalovova učebnice, o níž referuji výše. Proto už zde podrobný obsah nevypisuji. Podotýkám pouze, že tu jde o metrickou geometrii lineárních a kvadratických útvarů v rovině a v prostoru; autor užívá jen pravoúhlých kartézských souřadnic nehomogenních a souřadnic polárních. Předpokládá znalost determinantů nejvýše čtvrtého řádu.

Úlohy jsou rozvrženy do šestnácti kapitol, rozdělených do čtyř samostatných částí. Část první podává úlohy z analytické geometrie v přímce, druhá část je věnována analytické geometrii v rovině, ve třetí části je geometrie prostorová a konečně čtvrtá část podává úlohy z vektorového počtu s geometrickými aplikacemi. Každá kapitola se dělí na několik odstavců. Na začátku každého z těchto odstavců uvádí autor stručný výklad látky i návod k řešení příslušných úloh, vypisuje základní vzorce a řeší typické příklady. Důkazy jednotlivých tvrzení v těchto stručných úvodních výkladech většinou neprovádí, jak to ostatně odpovídá povaze sbírky úloh. Úlohy jsou seřazeny tak, že na začátku odstavce jsou úlohy snadné a pak přicházejí úlohy těžší, jejichž obtížnost postupně roste.

Výběr příkladů a úloh je v této sbírce velmi bohatý. Vedle běžných příkladů a geometrických úloh zařadil sem autor také celou řadu úloh z praxe, zvláště z mechaniky. Najdeme zde na příklad různé úlohy, týkající se grafických jízdních řádů železnic, analytické zdůvodnění různých mechanismů a pod.

Aby student mohl kontrolovat svoji práci, jsou na konci knihy udány výsledky všech úloh sbírky a často (u obtížnějších úloh) i návod nebo postup celého řešení. Takové návody jsou leckdy dost podrobné, takže výsledky i řešení úloh zabírají v knize celkem 93 stran. Práci studentovu usnadňuje 160 obrázků, z nichž mnohé jsou zařazeny až na těchto posledních 93 stranách.

Tento stručný referát končím upozorněním, že Cuberbillerova sbírka je na sovětských technikách zařazena mezi učební pomůcky (viz opět časopis „Vysoká škola", Praha 1951, č. 7., str. 223). Také skutečnost, že se už dočkala patnáctého vydání, ji sama jistě doporučuje i našim posluchačům techniky i jiných vysokých škol, zvláště pak posluchačům I. ročníku.

Karel Havlíček, Praha.

Н. М. Бескин: **Курс аналитической геометрии для втузов.** (*N. M. Beskin*: **Kurs analytické geometrie pro techniky.**) Státní nakladatelství technicko-theoretické literatury, Moskva-Leningrad, 1948, str. 500, cena 15 rublů (75 Kčs).

Pojetím a zaměřením se tento kurs liší od kursu universitního. Není to jen jeho zmenšená kopie; má svou vlastní methodu a také výběr látky je jiný. Přes svůj elementární charakter zabíhá na některých místech do algebraické geometrie a analysy. Ryzost methody je nahražena její užitečností a vhodností v praxi, která si samozřejmě vynutila také látku tohoto kursu. Viz na př. různé technicky důležité transcendentní křivky nebo křivky jakožto grafické obrazy jednoduchých a důležitých funkcí. Přístupnost a názornost výkladu je maximální. Jím také velice vzrostla objemnost knihy, jakož i velikým množstvím názorných obrázků a konstrukcí různých křivek. Autor nepředpokládal žádných znalostí z jiných oborů matematiky jako na př. z algebry pojem determinantu a jeho užití při řešení soustavy lineárních rovnic, z analysy pojem funkce a jejího grafu. Vykládá tuto látku buď v úvodě nebo přímo v textu, takže byla trochu porušena souvislost výkladu. Tuto vadu napravuje obšírný obsah uvedený vpředu. Celá látka je konkretisována jak přímo ve výkladě, tak i ve velkém množství příkladů, u nichž jsou uvedeny výsledky (na konci knihy) a někdy i návody k řešení. V partiích tištěných velkým tiskem je obsažena látka odpovídající osnovám sovětských vysokých technických škol zatím co petitem je vysázen výklad zabíhající více do podrobností nebo je v něm více ozřejměno osobní hledisko autorovo na některé problémy. Kniha jest rozdělena tradičně na geometrii v rovině a v prostoru. Obě části jsou od sebe příkře odděleny jak obsahově a methodicky, tak i vnější úpravou (s novou předmluvou u druhé části). Autor se omezil na pravoúhlý systém souřadnic; polární souřadnice zavádí jen pro některé křivky transcendentní.

Ústřední částí rovinné geometrie jsou kuželosečky (rozbor obecné kvadratické rovnice), avšak v prostoru jsou studovány kvadriky jen v nejjednodušší poloze. S vektory pracuje autor systematicky až v prostoru a sice tak, že konfrontuje tuto methodu s methodou obyčejnou. § hlediska praktického řešení příkladů to má jistě význam, nehledě k tomu, že čtenáři tak ulehčil pochopení souvislosti mezi oběma methodami. Někde se autor postupem výkladu odlišil od tradice. Tak na příklad před kapitolou o přímce jsou methodou geometrického místa odvozeny již nejjednodušší rovnice kuželoseček, nehledě ovšem k partiím pojednávajícím o křivkách jako grafech funkcí. Zajímavý je také výklad v § 3, kap. III. první části o pojmu stupně volnosti, kterýžto pojem jest podle autora důležitý pro výklad analytické geometrie.

Hlavním účelem této knihy jest věnovati větší pozornost analytické geometrii na vysokých školách technického směru, neboť je známo, že se zde nejvíce času spotřebuje na výklad diferenciálního a integrálního počtu. To jest také vidět na učebnicích matematiky pro tyto školy (viz na př. naši učebnici Vojtěchovu). Z toho důvodu může být tato kniha dobrou pomůckou i našim studentům na technikách, při čemž by se dalo využít některých jejích partií jako podkladu ke studiu matematiky v zájmových kroužcích na školách třetího stupně.

Pokud jde o tiskové chyby, jsou tyto takového charakteru, že neruší smysl výkladu, takže si je čtenář snadno opraví sám.

Jiří Štěpánek, Praha.

Б. Н. Делоне - Д. А. Райков: **Аналитическая геометрия.** (*B. N. Delone - D. A. Rajkov*: **Analytická geometrie.**) Gostechizdat, Moskva-Leningrad, 1949, I + II, 456 a 516 str., cena 87,50 a 87,50 Kčs.

Tato dvoudílná učebnice analytické geometrie je výsledkem mnoholetých přednášek B. N. Deloneho na mechanicko-matematické fakultě moskevské university a odpovídá učebnímu plánu analytické geometrie na moskevské universitě. Autoři si v předmluvě všímají různých způsobů výkladů geometrie, sami vycházejí ze studia afinní a metrické geometrie a ke geometrii projektivní docházejí až na konci kursu, při čemž se omezují výhradně na prostor dvoj- a trojrozměrný. Při tom neužívají axiomatické methody zavedení důležitých pojmů, ale přebírají je z názoru. Autoři se snaží osvětlit probíranou látku z více stran, proto mnohdy výklad o témž předmětu je veden různými navzájem nezávislými methodami. Mimo normálního textu obsahuje kniha mnoho stran drobného textu, v němž jsou hlavní části prohlubovány a doplňovány a kde jsou též odvozeny některé věci z algebry a analysy, pro studium nutné.

Kniha se dělí na čtyři části: kartézské souřadnice, vektory a lineární zobrazení; analytickou geometrii v rovině; analytickou geometrii v prostoru; analytickou geometrii v rovině a prostoru.

Prvá část ve dvou kapitolách probírá základní pojmy a jejich vlastnosti. V prvé kapitole jsou zavedeny vektory v rovině a v prostoru. Pro koncepci knihy je nejdůležitější druhá kapitola, zabývající se ortogonálními a afinními transformacemi. Po zavedení pojmu zobrazení prvého a druhého rodu — převádějícího basi kladně orientovanou v basi kladně resp. záporně orientovanou — jsou dokázány základní věty: každé ortogonální zobrazení je pohyb a souměrnost; každé afinní zobrazení v rovině resp. prostoru je ortogonální zobrazení se dvěma resp. třemi vzájemně kolmými „zkráceními" („sžatije" — t. j. kolmá osová afinita); dále je dokázána invariantnost dělicího poměru při afinním zobrazení. Nezávisle na předchozím je v další části této kapitoly zaveden pojem afinního zobrazení analyticky, je vyložen pojem grupy lineárních zobrazení a jejích podgrup.

Druhá část jedná ve třech kapitolách o přímce v rovině, jsou probrány vlastnosti elipsy, hyperboly a paraboly a konečně vyložena obecná theorie kuželoseček. Ve třetí kapitole jsou velmi zajímavé paragrafy o lineárních nerovnostech, jež po probrání pojmu konvexní množiny a konvexního obalu konečné bodové množiny určují nutné a postačující podmínky pro to, aby tři lineární nerovnosti určily trojúhelník resp. vnitřek trojúhelníka.

Velmi obsažná čtvrtá kapitola obsahuje theorii jednotlivých kuželoseček, zavedených poněkud neobvyklým způsobem jako afinní obrazy nejjednodušší elipsy, hyperboly resp. paraboly o rovnicích $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 - y^2 - 1 = 0$ resp. $x^2 - y = 0$, což umožňuje velmi jednoduchým způsobem vyložiti afinní vlastnost kuželoseček. Poměrně hluboko je vypracována theorie zobrazení, reprodukujících hyperbolu, kde je ukázáno zavedení hyperbolických funkcí a vztah transformačních rovnic s transformací Lorentzovou. Protože předchozí zavedení jednotlivých kuželoseček by bylo nepohodlné k určení metrických vlastností, zavádějí se kuželosečky analyticky kanonickými rovnicemi v některém pravoúhlém systému souřadnicovém. Jsou též vyloženy některé partie, probírané u nás zpravidla v učebnicích deskriptivní geometrie. Kapitola pátá obsahuje obecnou theorii kuželoseček, je provedena afinní klasifikace a určeny invarianty i jejich geometrický význam. Konec kapitoly je věnován theorii reálných kuželoseček v komplexní rovině.

Kapitoly šestá až osmá třetí části, jednající o rovině a přímce v prostoru, afinních a metrických vlastnostech elipsoidu, hyperboloidu a paraboloidu a konečně o obecné theorii kvadrik, jsou nutně vypracovány týmž způsobem jako kapitoly třetí a pátá druhé části. Velmi podrobně je pojednáno o reálných přímkách na kvadrice a kruhových řezech kvadrik, jakož i o kvadrice v komplexním prostoru.

Místy velmi zajímavým způsobem je pojata čtvrtá část učebnice o analytické geometrii v projektivní rovině a prostoru. Důsledně jsou využity dříve odvozené vlastnosti afinních zobrazení. Autoři konstruují některé modely projektivní roviny a docházejí k obecnější definici projektivní roviny jako souhrnu dvou množin bodů a přímek, mezi nimiž je definována incidence a které se dají vzájemně jednoznačně zobrazit na množiny přímek a rovin libovolného vlastního trsu tak, že incidence je zachována. Projektivní homogenní souřadnice přímky v trsu jsou definovány jako třída souřadnic všech nenulových vektorů té přímky, bod projektivní roviny má potom tytéž souřadnice jako jemu odpovídající přímka. Po probrání projektivního zobrazení je určena afinně — projektivní a projektivní klasifikace kuželoseček. Na rozdíl od této geometrické theorie se v dalším textu postupuje analyticky. Ke konci deváté kapitoly je vyložena theorie křivek druhého stupně v projektivní rovině, obsahem obdobná této theorii v předchozí geometrické interpretaci. Desátá a poslední kapitola pojednává o projektivním prostoru.

Z uvedeného přehledu je vidět, že recensovaná učebnice obsahuje zhruba látku v rozsahu ostatních sovětských učebnic, i když daleko rozsáhleji zpracovanou. Partie o svazcích kuželoseček, resp. svazcích kružnic v metrické rovině nejsou probírány, je však nutno poznamenat, že tyto části nejsou uvedeny ani v některých jiných sovětských učebnicích analytické geometrie. Bylo by zajímavé zjistit, jak hluboko je kniha probírána při universitních přednáškách, případně zjistit program z algebraické geometrie, která patrně na ni navazuje.

Studium knihy vyžaduje znalost matematiky, zvláště planimetrie a stereometrie, v rozsahu gymnasiální látky. Učebnice se dá velmi lehko studovat, protože text i důkazy jsou psány velmi obšírně a srozumitelně. Způsob výkladu je jistě výhodný pro studující, kteří používají knihy k doplnění a prohloubení universitních přednášek, myslím však, že výklad téže věci různými methodami činí knihu nevhodnou pro samostatné studium začátečníkem, který nedovede plně ocenit nezávislost výsledků na výsledcích jiných.

Oba díly jsou doprovázeny množstvím názorných obrázků, někdy však hřešících proti pravidlům zobrazení — na př. str. 71, II. dílu — a abecedním rejstříkem. Učebnice však nebyla doplněna příklady ke cvičení. Po odborné stránce jsem nalezl v obou dílech jen menší nedopatření.

Konečně chci upozornit čtenáře na Gordonovu recensi, která byla uveřejněna v časopise *Uspěchi matematičeskich nauk*, svazek V, číslo 6—40; listopad—prosinec 1950, str. 180.

Alois Švec, Praha.

А. М. Лопшиц: **Аналитическая геометрия.** (*A. M. Lopšic*: **Analytická geometrie**), UČPEDGIZ, Moskva 1948, str. 576, cena 15 rub.

Kniha je určena pro posluchače fysikálně-matematických fakult pedagogických institutů. Její první část (6 kapitol) jedná o analytické geometrii v rovině; její druhá část (7 kapitol) jedná o analytické geometrii v prostoru.

Část prvá. Po kapitole prvé, věnované počátkům vektorové algebry, probírají se v kapitole druhé elementární otázky analytické geometrie, jako: určení polohy bodu pomocí jeho radius-vektoru, určení souřadnic bodu v rovině jako souřadnic jeho radius-vektoru (afinní, kartézská a pravoúhlá soustava souřadnicová), atd.

V kapitole třetí se jedná především o vnějším součinu $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ resp. skalárním součinu $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ dvou vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ a jejich užití při řešení problémů analytické geometrie. Mimo to se odvozují vzorce pro sinus a kosinus úhlu dvou vektorů, zavádějí polární souřadnice, probírají transformace souřadnic a činí zmínka o komplexních vektorech a bodech.

Kapitola čtvrtá jedná o rovnici geometrického místa bodů. Odvozují se zde: Rovnice přímky, rovnice elipsy, hyperboly a paraboly (definované užitím obsahů jistých orientovaných trojúhelníků) a zjišťují některé vlastnosti těchto kuželoseček. Mimo to tu jsou probírány základní ohniskové vlastnosti kuželoseček, rovnice kuželoseček v polárních souřadnicích a rovnice rovinných křivek (též rovnice parametrické).

Obsah kapitoly páté tvoří afinní resp. metrické úlohy týkající se přímky: Vzájemná poloha přímek, rovnice svazku přímek, zavedení nevlastních bodů, rozdělení roviny přímkou, dvojpoměr čtyř přímek ve svazku resp. úhel dvou přímek a vzdálenost bodu od přímky.

Kapitola šestá jedná o křivkách 2. stupně (kuželosečkách) v afinní rovině. Hlavní problémy, zde probírané, jsou: Studium křivky dané rovnicí $Ax^2 + By^2 + C = 0$. Afinní klasifikace kuželoseček. (Převedení rovnice kuželosečky na kanonický tvar.) Vzájemná poloha přímky a kuželosečky (geometrická interpretace výsledků studia základní kvadratické rovnice pro průsečíky přímky s kuželosečkou). Nevlastní body kuželosečky. Tečna (asymptota) kuželosečky, singulární body kuželosečky, vnější a vnitřní body vzhledem ke kuželosečce. Sdružené průměry a osy kuželosečky. Zjednodušení rovnice kuželosečky vhodnou volbou soustavy souřadnicové.

Část druhá. Kapitola sedmá probírá základní pojmy a formule analytické geometrie v prostoru. Zavádí pojem souřadnic vektoru a odtud pojem afinních resp. kartézských resp. pravoúhlých souřadnic bodu jako souřadnic jeho radius-vektoru v příslušné soustavě souřadnicové. Užitím souřadnic řeší některé úlohy, jako: Nalézti podmínky komplanárnosti tří vektorů (čtyř bodů), určiti souřadnice bodu dělícího úsečku v daném poměru, odvoditi formule pro vzdálenost dvou bodů, kosinus úhlu dvou vektorů, atd.

Kapitola osmá jedná o vektorové algebře a jejím užití v geometrii (v prostoru). Zavádí se pojem skalárního součinu $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ resp. skalárního součinu $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}$ tří vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, odvozují se jejich základní vlastnosti a používá se jich k řešení geometrických úloh. Probírají se polární souřadnice v prostoru. Definuje se vektorový součin $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a studují možnosti jeho použití v geometrii. Zavádějí se t. zv. vzájemné souřadnicové soustavy, kovariantní resp. kontravariantní souřadnice vektoru a užívá se jich při výpočtech. Závěrem se probírá vektorové dělení a studují transformace afinních resp. pravoúhlých kartézských souřadnic (orthogonální matice, Eulerovy úhly).

V kapitole deváté se zkoumají (methodou řezů) základní vlastnosti elipsoidu, jednodílného a dvojdílného hyperboloidu, eliptického a hyperbolického paraboloidu, plochy válcové, kuželové a rotační. Zavádí se zde též pojem algebraické plochy n-tého stupně. Závěrem se hovoří o rovnici křivky v prostoru, o parametrických rovnicích křivky a plochy.

Obsahem kapitoly desáté jest analytické studium roviny v prostoru (vlastnosti afinní a metrické). Užitím skalárního součinu tří vektorů se odvozují některé typy rovnic roviny; dokazuje se, že rovnice roviny jest lineární a naopak. Studuje se vzájemná poloha dvou resp. více rovin, svazek rovin a trs rovin. Jest zde zmínka o nevlastních bodech prostoru a o rozdělení prostoru rovinou. Užitím skalárního součinu dvou vektorů se studují metrické vlastnosti roviny (vzdálenost bodu od roviny, normální rovnice roviny).

Kapitola jedenáctá se zabývá afinními a metrickými vlastnostmi přímky v prostoru. Jedná se tu o některé typy rovnic přímky, zkoumá se vzájemná poloha dvou přímek resp. přímky a roviny. Metrické úlohy se týkají úhlu dvou přímek, úhlu přímky a roviny, vzdálenosti bodu od přímky, osy mimoběžek, atd. Závěrem se odvozuje vektorová rovnice přímky ($\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{M}$, kde $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{M} = 0$) a prokazuje její užitečnost.

Kapitola dvanáctá jedná o plochách 2. stupně (kvadrikách) v afinním resp. euklidovském prostoru. Hlavní problémy, zde probírané, jsou: Studium plochy, dané rovnicí $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$. Afinní klasifikace kvadrik. Převedení rovnice kvadriky na kanonický tvar. Kriteria pro určení typu kvadriky. Vzájemná poloha přímky a kvadriky (základní rovnice pro průsečíky přímky s kvadrikou). Pojem kvasi-skalárního součinu $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ vzhledem k dané kvadrice ($\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} * \boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{a} * (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})$; pro souřadnicové vektory $\boldsymbol{u}_i (i = 1, 2, 3)$ platí $\boldsymbol{u}_i * \boldsymbol{u}_k = a_{ik}$) a jeho užití v theorii kvadrik. Vektorová rovnice kvadriky ($\boldsymbol{r} * \boldsymbol{r} + 2\,\boldsymbol{N}\boldsymbol{r} + a_{44} = 0$) a vektorové řešení úlohy o průsečících přímky s kvadrikou. Rovnice kužele opsaného z bodu kvadrice, rovnice tečné roviny, přímky na kvadrice. Pól a polární rovina vzhledem ke kvadrice, základní vlastnosti polarity. Průměrové roviny kvadriky, střed kvadriky, sdružené průměry kvadriky. Zjednodušení rovnice kvadriky vhodnou transformací afinních souřadnic. Hlavní směry kvadriky. Metrická klasifikace kvadrik. Ortogonální invarianty.

Kapitola třináctá se zabývá transformacemi prostoru. Vyjadřuje se analyticky lineární transformace a studují se její geometrické vlastnosti. Definuje se afinní transformace prostoru, odvozují se její charakteristické vlastnosti a dokazuje, že každá afinní transformace je lineární transformace. Definuje se lineární vektorová funkce (afinor) a ukazuje její užití. Závěrem se uvádějí definice afinního pojmu, afinní vlastnosti, afinní věty a afinní geometrie.

Charakteristické znaky knihy jako celku jsou:

1. Při výkladu se bere zřetel nejen na logickou výstavbu, ale také na objasnění vzniku problémů, cestu jejich rozvíjení a způsob jejich řešení.

2. Soustavné používání vektorové algebry při řešení geometrických problémů. Podrob-

ný, jasný a názorný výklad základů vektorové algebry, četnými charakteristickými příklady a methodou výkladu objasněna těsná souvislost vektorové algebry s geometrickou představou, s geometrickými fakty a s jejich studiem.

Zavedení pojmu kvasi-skalárního součinu dvou vektorů umožňuje vyložiti theorii kvadrik bez hromadění algebraických transformací (obvyklých při výkladu pomocí souřadnic) a usnadňuje studujícím ujasniti si geometrický smysl výkladu.

3. Jasný, podrobný a geometricky názorný výklad, důsledně doprovázený propočítávanými příklady, úlohami, obrázky (v počtu 254) a schematy. Pro důkladné procvičení vyložené látky obsahuje každá kapitola řadu úloh (celkem 520), k nimž jsou na konci knihy uvedeny výsledky.

Tato kniha bude zřejmě užitečná především našim posluchačům matematiky v 1. a 2. roce universitního studia.

Nakonec několik poznámek o nedopatřeních a nepřesnostech v textu knihy.

Nedopatření:

Na str. 80 ve vzorci (7) má býti (na počátku) $\boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ místo $\boldsymbol{a} (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.
Na str. 114 ve 14. řádku shora má býti i$\boldsymbol{b}$ místo $\boldsymbol{i}\boldsymbol{b}$.
Na str. 115 má býti všude i místo $\boldsymbol{i}$.
Na str. 115 ve 4. řádku od zdola má býti $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ místo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha u} + \boldsymbol{\beta v}$.
Na str. 116 v poznámce pod čarou má býti

$$\sigma = \frac{\tilde{\boldsymbol{a}} \circ \tilde{\boldsymbol{v}}}{\tilde{\boldsymbol{u}} \circ \tilde{\boldsymbol{v}}}; \quad \tau = \frac{\tilde{\boldsymbol{u}} \circ \tilde{\boldsymbol{a}}}{\tilde{\boldsymbol{u}} \circ \tilde{\boldsymbol{v}}}.$$

Na str. 189 ve 4. řádku od zdola má býti $\boldsymbol{a} = -B\boldsymbol{u}$.
Na str. 230 ve 3. řádku od zdola má býti $\Phi(x, y)$ místo $\Phi(x_1 y)$.
Na str. 246 v identitě (54) má býti $\Phi_3(x, y)$ místo $\Phi_3(x_1, y)$.
Na str. 331 v 5. řádku od zdola má býti (60) místo (61').
Na str. 331 ve vzorci (62) má býti $A'B' = AB \sin (\overline{AB}, \boldsymbol{n})$.
Na str. 448 v 1. řádku má býti $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ místo $M_0(r_0)$.
Na str. 484 v 9. řádku od shora má býti (28) místo (27).
Na str. 484 ve 22. řádku od shora má býti (28″) místo (28).

Nepřesnosti:

Věta na str. 490 nahoře platí pouze v případě, že $\boldsymbol{r}_0$ je regulární bod (radius-vektor regulárního bodu).
V úvaze o možnosti přiřadit každému bodu (určitou) polární rovinu vzhledem k dané kvadrice (na str. 499 dole), jedná se pouze o kvadriku regulární.
V theorii kvadrik chybí vůbec jakákoliv zmínka o tak důležitém pojmu, jako je pojem singulárního bodu kvadriky.

Nejasnosti a nepřesnosti ve výkladu (zbytečně obecném) o plochách a křivkách v prostoru.

Zdeněk Vančura, Praha.

С. П. Фиников: **Аналитическая геометрия.** (*S. P. Finikov*: **Analytická geometrie.**) UČPEDGIZ Moskva, 1. vydání 1949, str. 328, cena 8 r. 40 k.; 2. vydání 1952, str. 327, cena 7 r. 50 k.

Nejprve podána recense 1. vydání. Tato recense, spolu s poznámkami o rozdílech mezi prvým a druhým vydáním, jest recensí 2. vydání.

Kniha (1. vydání) se dělí ve dvě části. Část prvá (12 kapitol) jedná o analytické geometrii v rovině. Část druhá (15 kapitol) jedná o analytické geometrii v prostoru.

Část prvá.

Kapitola **prvá** jedná o geometrii na přímce. Nejdříve se definuje vektor a základní operace s vektory. Zvolíme-li na dané přímce p pevně libovolný nenulový vektor $\mathbf{e}$, lze každému vektoru $\mathbf{M}$ přímky p přiřaditi vzájemně jednoznačně reálné číslo x, t. zv. souřadnici vektoru $\mathbf{M}$. Toto nám v dalším umožňuje vzájemně jednoznačné přiřazení bodů přímky p a reálných čísel. Zvolíme na přímce p libovolný bod O a libovolný nenulový vektor $\mathbf{e}$. Potom každý bod M přímky p určuje radius-vektor $\overrightarrow{OM} = \mathbf{M}$, jehož souřadnici x nazýváme souřadnicí bodu M v (afinní) soustavě souřadnicové o počátku O a souřadnicovém vektoru $\mathbf{e}$. (Je-li $\mathbf{e}$ jednotkový vektor, dostáváme kartézskou soustavu souřadnicovou). Užitím bodových souřadnic řešíme pak rozmanité úlohy týkající se bodů na přímce. Pro bod $M(x)$ na přímce určené body $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, pro nějž $\lambda = M_1M : MM_2$, dostáváme $x = (x_1 + \lambda x_2) : (1 + \lambda)$ (pro $1 + \lambda \neq 0$), z čehož, položíme-li $\lambda = n : m$, dostaneme $x = (mx_1 + nx_2) : (m + n)$, kde $m + n \neq 0$. Čísla m, n nazýváme homogenní projektivní souřadnice bodu na přímce. Eukleidovskou přímku p doplňujeme t. zv. „bodem nevlastním", který leží za všemi jejími body (t. zv. „body vlastními"). Tomuto nevlastnímu bodu přiřazujeme hodnotu $\lambda = -1$. Tak dospíváme k pojmu projektivní přímky.

V kapitole **druhé** se jedná hlavně o zavedení afinních resp. kartézských soustav souřadnicových v rovině. V rovině se zvolí pevný bod O a dva lineárně nezávislé vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a každému bodu M roviny se jako souřadnice přiřadí souřadnice jeho radius-vektoru $\overrightarrow{OM}$ vzhledem k souřadnicovým vektorům $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Dostáváme tak afinní soustavu souřadnicovou (pro jednotkové resp. jednotkové a kolmé vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ dostáváme kosoúhlou resp. pravoúhlou kartézskou soustavu souřadnicovou). Analogicky jako na přímce se potom provádí rozdělení úsečky v daném poměru. Dále jest tu definován skalární součin dvou vektorů, zjištěny jeho základní vlastnosti a užito skalárního součinu při řešení některých úloh. Závěrem pak, použitím základních operací s vektory, odvozeny transformační rovnice mezi dvěma afinními soustavami souřadnicovými.

V kapitole **třetí** je především zaveden pojem geometrického místa bodů v rovině, určeného rovnicí mezi bodovými souřadnicemi. Potom na základě definic kružnice, elipsy, hyperboly a paraboly (z elementární geometrie) jsou odvozeny (kanonické) rovnice a některé vlastnosti těchto křivek.

Hlavní themata kapitoly **čtvrté**: Společné body dvou křivek. Křivky algebraické (klasifikace podle jejich stupňů) a křivky transcendentní. Vlastnosti a výrazy nezávislé (invariantní) na transformacích afinních souřadnic. Svazek křivek a jeho základní vlastnosti. Polární souřadnice v rovině.

Kapitola **pátá** jedná o křivce 1. stupně. Nejprve dokázáno, že přímka je křivkou 1. stupně a naopak. Probrány rozmanité tvary rovnice přímky a objasněn geometrický význam koeficientů v těchto rovnicích. Odvozen vzorec pro vzdálenost bodu od přímky a vzorec pro tangens úhlu dvou přímek. Dále odvozeny podmínky rovnoběžnosti a kolmosti dvou přímek a podmínka pro to, aby tři body ležely v přímce. Závěrem stanoven průsečík dvou přímek.

Kapitola **šestá** se zabývá projektivní rovinou, speciálně pak přímkami v projektivní rovině. Nejprve se zavádějí na základě afinních (nehomogenních) souřadnic bodů homogenní souřadnice bodů, potom pojem projektivní roviny (množina všech bodů (x_1, x_2, x_0), t. j. všech uspořádaných nenulových trojic reálných čísel). Dále se béře: Rozšířená eukleidovská rovina vzniklá z eukleidovské roviny přidáním nevlastních bodů $(x_1, x_2, 0)$ (jako model projektivní roviny), průsečík dvou přímek a svazek přímek. Vedle pojmu geometrického bodu $M(x_1, x_2, x_0)$ (jakožto trojic čísel x_1, x_2, x_0 a všech trojic tx_1, tx_2, tx_0, $t \neq 0$) se zavádí pojem analytického bodu $\mathbf{M}$ (x_1, x_2, x_0) jako trojice homogenních souřadnic x_1, x_2, x_0 bodu $M(x_1, x_2, x_0)$. Čísla x_1, x_2, x_0 se nazývají souřadnice analytického bodu $\mathbf{M}(x_1, x_2, x_0)$. Analogicky jako u vektorů se definuje rovnost a součet dvou analytických bodů, násobení analytického bodu skalárem a lineární závislost (nezávislost) analytických bodů. Jsou-li $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_0$ tři lineárně nezávislé analytické body, potom tři čísla x_1, x_2, x_0, splňující rovnici $\boldsymbol{M} = \sum_{i=0}^{2} x_i \boldsymbol{A}_i$, nazýváme projektivními souřadnicemi analytického bodu M vzhledem k souřadnému trojúhelníku $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_0$. V dalším jsou (mimo jiné) odvozeny transformace projektivních souřadnic a dokázána invariantnost stupně homogenní algebraické rovnice vůči těmto transformacím. Závěrem pak dokázáno, že homogenní afinní souřadnice v rozšířené eukleidovské rovině jsou zvláštním případem projektivních souřadnic.

Kapitola sedmá zahrnuje v sobě všeobecné poznámky o křivkách 2. stupně (kuželosečkách), týkající se obecné rovnice kuželosečky, určení kuželosečky pěti body, průsečíků kuželosečky s přímkou, tečen a nevlastních bodů kuželosečky.

V kapitole osmé se studují projektivní vlastnosti kuželoseček. Definují se zde pojmy: Polárně sdružené body resp. přímky (pomocí pojmu harmonické čtveřice), pól, polára, polarita; zjišťují se jejich základní vlastnosti a zkoumá souvislost polarity s diskriminantem kuželosečky (kuželosečky jednoduché a složené).

Jádrem kapitoly deváté jest studium afinních vlastností kuželoseček. Nejprve je vyloženo, co rozumíme projektivními resp. afinními resp. metrickými vlastnostmi útvarů a potom co rozumíme projektivní resp. afinní resp. metrickou geometrií. Pak se probírají afinní vlastnosti kuželoseček. Jsou definovány a studovány střed, průměry, sdružené průměry a asymptoty kuželosečky (při hledání rovnice asymptot použito theorie svazku kuželoseček).

Kapitola desátá jedná o metrických vlastnostech kuželoseček. Odvozuje a studuje se zde charakteristická rovnice pro hlavní směry a výsledky tohoto studia se geometricky interpretují. Nacházejí se zde všechny tři nezávislé invarianty kuželosečky.

Kapitola jedenáctá se týká stanovení t. zv. kanonických rovnic kuželoseček (v projektivní resp. afinní resp. kartézské soustavě souřadnicové). Děje se tak použitím autopolárních trojúhelníků jako trojúhelníků souřadnicových (před tím dokázána existence právě dvou druhů autopolárních trojúhelníků). Dále se převádí rovnice kuželosečky na kanonický tvar (použitím invariantů kuželosečky). Závěrem se charakterisují rozličné typy kuželoseček pomocí invariantů.

Kapitola dvanáctá jedná o ohniskových vlastnostech kuželoseček. Nejprve definováno ohnisko kuželosečky a odvozeny jeho charakteristické vlastnosti. Dále se odvozuje rovnice kuželosečky o daném ohnisku a dané řídicí přímce a odtud potom formule pro číselnou excentricitu kuželosečky. Závěrem se zjišťuje počet ohnisek a jejich poloha u centrálních i necentrálních kuželoseček.

Část druhá. Kapitola prvá zavádí souřadnice v prostoru. Nejprve se (analogicky jako v rovině) zavádějí souřadnice vektoru a pomocí nich afinní a kartézské souřadnice bodu. Použitím skalárního součinu dvou vektorů vypočten kosinus úhlu dvou vektorů a vzdálenost dvou bodů. Dále se zavádí skalární součin $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$ tří vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (absolutní hodnota skalárního součinu $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$ je rovna objemu rovnoběžnostěnu o hranách $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$), vyvozují jeho základní vlastnosti a používá se ho při výpočtu objemu tetraedru. Závěrem se pak definuje vektorový součin $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ dvou vektorů $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$, zjišťuje vztah mezi $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$ a $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ a použitím vektorového součinu počítá obsah trojúhelníka ze souřadnic jeho vrcholů.

Kapitola druhá jedná o transformaci souřadnic. Použitím základních operací s vektory odvozují se transformace afinních souřadnic, speciálně pak transformace pravoúhlých kartézských souřadnic. (Eulerovy úhly.) Závěrem se dokazuje, že stupeň algebraické rovnice jest invariant afinních transformací.

Obsah kapitoly třetí je tento: Geometrické místo bodů určené danou rovnicí. Rovnice koule. Rovnice křivky v prostoru. Algebraické a transcendentní plochy. Stupeň algebr. plochy a jeho geometrický význam. Jednorozměrný resp. dvojrozměrný svazek ploch a jeho základní vlastnosti.

Kapitola čtvrtá se zabývá rovinami v eukleidovském prostoru. Použitím základ. operací s vektory se odvozuje rovnice roviny jdoucí daným bodem kolmo k dané přímce, odtud potom normální tvar rovnice roviny a jeho použitím vzorec pro vzdálenost bodu od roviny. Dále se jedná o úsekovém tvaru rovnice roviny a úhlu dvou rovin. Konečně použitím skalárního součinu tří vektorů se odvozuje rovnice roviny dané třemi body.

Kapitola pátá jedná o přímkách v eukleidovském prostoru. Pomocí základních operací s vektory odvozeny a studovány některé typy rovnic přímky, úhel dvou přímek a úhel přímky s rovinou. Použitím skalárního součinu tří vektorů zjištěna nutná a postačující podmínka pro to, aby dvě přímky ležely v rovině. Použitím jisté vlastnosti dvakrát provedeného (dvojnásobného) vektorového součinu tří vektorů se odvozuje Laplaceova formule: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$. Vzdálenost dvou mimoběžek vypočtena jako délka kolmého průmětu libovolného vektoru o krajních bodech na mimoběžkách na osu mimoběžek (použitím Laplaceovy formule). Použitím dvojnásobného vektorového součinu se určují rovnice a délka kolmice spuštěné z bodu na přímku.

V kapitole šesté se vykládá o projektivním prostoru. Projektivní prostor se definuje jako množina všech bodů (uspořádaných nenulových čtveřic reálných čísel) splňujících jisté požadavky. Jako model projektivního prostoru se uvažuje rozšířený eukleidovský prostor. Definuje se analytický bod (jako čtveřice homogenních souřadnic geometrického bodu), základní operace s analytickými body (analogické základním operacím s vektory) a zjišťují souvislosti mezi analytickými a geometrickými body. Zavádějí se projektivní souřadnice bodu a dokazuje se, že (homogenní) afinní resp. kartézské souřadnice v rozšířeném eukleidovském prostoru jsou speciálním případem souřadnic projektivních. Závěrem se odvozují transformační rovnice projektivních souřadnic a hovoří se o rovnicích kužele, svazku a trsu rovin.

V kapitole sedmé se jedná o projektivních a afinních transformacích prostoru. Sledují se zde základní vlastnosti a analytické vyjádření těchto transformací, definuje projektivní resp. afinní geometrie a závěrem uvádí grupa pohybů v prostoru.

Kapitola osmá jedná o obecných vlastnostech ploch 2. stupně (kvadrik) v projektivním prostoru. O vzájemné poloze přímky resp. roviny a kvadriky a o eliptických, hyperbolických a parabolických bodech kvadrik.

Kapitola devátá se zabývá hlavně theorií pólů a polárních rovin. Mimo to se studují singulární polarity a jejich souvislost se singulárními body kvadriky.

Kapitola desátá je věnována autopolárním tetraedrům. Rozděluje je na dva druhy, dokazuje, že ke každé kvadrice existují autopolární tetraedry obojího druhu a zjišťuje základní vlastnosti těchto tetraedrů u regulárních kvadrik a kužele.

Jádro kapitoly jedenácté tvoří kanonické rovnice kvadrik v projektivním prostoru. Vztáhneme-li kvadriku k autopolárnímu tetraedru 1. druhu a vhodně normujeme souřadnice vrcholů autopol. tetraedru, dospíváme ke kanonickým rovnicím kvadrik v projektivním prostoru. Dokazuje se, že signatura kvadr. formy je projektivní invariant. Zavádí se pojem vnějšího a vnitřního bodu vzhledem ke kvadrice. Provádí se projektivní klasifikace kvadrik.

Kapitola dvanáctá obsahuje afinní theorii kvadrik. Probírají se zde střed (středy), průměrové roviny, průměry a sdružené průměry kvadriky.

Jádrem kapitoly třinácté jsou kanonické rovnice kvadrik v afinním prostoru. Vztažením kvadriky k autopolárnímu tetraedru prvého resp. druhého druhu odvozují se zde kanonické rovnice centrálních resp. necentrálních kvadrik. Dále se provádí afinní klasifikace singulárních kvadrik, zkoumání rovinných řezů kvadrik a asymptotického kužele kvadriky. Závěrem se probírají relativní invarianty kvadriky vůči afinní grupě a odvozují rovnice systémů přímek na jednoplochém hyperboloidu a hyperbolickém paraboloidu.

Hlavním thematem kapitoly čtrnácté jsou kanonické rovnice kvadrik v eukleidovském prostoru. Odvozuje a studuje se zde charakteristická rovnice pro hlavní směry, výsledky tohoto studia se geometricky interpretují a uvádějí se kanonické rovnice kvadrik. Dále se dokazuje, že obecná kvadrika má právě čtyři nezávislé invarianty. V dalším se provádí redukce rovnice kvadriky na kanonický tvar. Závěrem se jedná o kvadrikách, u nichž je počet nezávislých invariantů větší než čtyři (kvadriky s neurčitým středem nebo s neurčitými hlavními směry) a provádí charakteristika kvadrik pomocí invariantů.

V kapitole patnácté se studují rovinné řezy kvadrik.

Všimněme si nyní knihy jako celku a vytkněme její charakteristické znaky.

Celá kniha je psána jasně, srozumitelně a přehledně. Charakteristické pro celý výklad je důsledné uplatňování method vektorové algebry. Soustavné používání vektorové algebry při řešení geometrických problémů spolu s vhodnou volbou soustav souřadnicových jeví se tak čtenáři již od počátku jako názorný, přirozený a účinný způsob chápání, formulace a řešení geometrických problémů. Velkou výhodou tohoto způsobu jest dále jak jednoduchost a přehlednost method, tak jednoduchost a přehlednost výsledků. Kromě skalárního součinu dvou vektorů resp. vektorového součinu dvou vektorů užívá se tu též skalárního součinu tří vektorů resp. dvakrát provedeného vektorového součinu tří vektorů.

Dalším charakteristickým rysem knihy jest jasný, srozumitelný a podrobný výklad zavádění rozmanitých soustav souřadnicových (projektivních, afinních a kartézských) na přímce, v rovině a v prostoru, systematické používání co nejvhodnějších, z povahy geometrických problémů vyrůstajících soustav souřadnicových a přehledný způsob odvozování transformací souřadnic.

S tím souvisí dále stručný a jasný výklad o vlastnostech (geometrických útvarů) resp. výrazech invariantních vůči rozmanitým grupám transformací a vysvětlení, co rozumíme projektivní resp. afinní resp. metrickou geometrií. Zvláště podrobně se vysvětluje úloha a význam invariantů při metrické klasifikaci kuželoseček a kvadrik; hledají se též všechny nezávislé invarianty.

Jádrem celé knihy jest theorie kuželoseček a kvadrik v projektivním resp. eukleidovském prostoru. Tyto theorie jsou vyloženy jasně, přesně, srozumitelně a přehledně methodami organicky vyrůstajícími z povahy věci.

Výklad látky jest doprovázen jednak obrázky (v počtu 96), jednak úlohami v textu počítanými.

Tato kniha bude rozhodně velmi užitečná především našim posluchačům matematiky v prvním a druhém roce universitního studia. K důkladnému procvičení látky v knize vyložené nestačí ovšem úlohy v textu propočítané, nýbrž je nutno propočítat celou řadu příkladů složitějších, vzatých odjinud; kniha neobsahuje totiž — mimo příklady v textu počítané — žádné jiné příklady.

Nakonec několik poznámek o nedopatřeních a nepřesnostech v textu knihy.

Nedopatření:

Na str. 96 v 15. řádku od zdola má býti $\mathbf{M}(x_i)$ místo $M(x_i)$.
Ve větě na str. 115 má býti $\mathbf{M}^* = p^*\mathbf{M}_1 + q^*\mathbf{M}_2$ místo $\mathbf{M}^* = p^*M_1 + q^*M_2$.
Na str. 187 v 6. řádku od shora má býti a_1, a_2, a_3 místo $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.
Na str. 221 v 6. řádku od zdola má býti $\mathbf{b}$ místo b a $\mathbf{c}$ místo c.
Na str. 301 v 6. řádku od shora má býti $\boldsymbol{\xi}$ místo ξ.

Nepřesnosti:

Věta v § 5 na str. 61 neplatí pro přímku, která je součástí křivky.
Důsledek 1 na str. 197 neplatí v případě, kdy rovina je součástí plochy.
Důsledek 2 na str. 197 neplatí v případě, kdy přímka je součástí plochy.
Věta v § 3 na str. 247 neplatí v případě, kdy rovina je součástí plochy.
Nesprávná definice středu kvadriky na str. 272.
Na str. 275 v 8. řádku od shora se jedná o dvě roviny, nikoliv pouze o dvě rovnoběžné roviny.

V dalším si všimneme rozdílů mezi prvním a druhým vydáním. Nejprve tyto dvě poznámky (týkající se 2. vydání);

1. Indexy rozlišující souřadnice téhož bodu (vektoru) jsou psány vpravo nahoře.
2. Studium metrických vlastností se provádí v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnicové.

A nyní uvedeme ty kapitoly 2. vydání, které se liší od příslušných kapitol 1. vydání, zároveň s udáním rozdílů.

Část prvá. Kapitola prvá. Vektor se zavádí jako fysikální veličina. V kapitole se nemluví o projektivních souřadnicích bodů na přímce a o modelu projektivní přímky.

Kapitola třetí obsahuje navíc partii jednající o rovnici přímky v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnicové.

V kapitole páté se nemluví o rovnici 1. stupně v kosoúhlé kartézské soustavě souřadnicové.

Ke kapitole sedmé přidán výklad o imaginárních bodech roviny (komplexní bod, komplexní rovina, komplexní přímka).

V kapitole osmé dokázáno, že dvojpoměr čtyř geometrických bodů jest nezávislý na normování souřadnic těchto bodů.

Část druhá. Kapitola prvá. Nejprve (na rozdíl od 1. vydání) se definuje vektorový součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dvou vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Potom teprve (užitím vektorového součinu) se definuje součin $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$ tří vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$: $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Ke kapitole šesté přidán výklad o komplexním projektivním prostoru. (Roviny a přímky v komplexním projektivním prostoru.)

Kapitola desátá. Výklad o autopolárních tetraedrech doplněn výkladem o autopolárním tetraedru 3. druhu (všechny jeho vrcholy leží na ploše a všechny jeho stěny jsou tečnými rovinami plochy).

Druhé vydání odstranilo (až na případ na str. 113 – 1. vydání str. 115) nedopatření jmenovaná v recensi 1. vydání. Z jmenovaných nepřesností 1. vydání odstranilo 2. vydání nepřesnost na str. 61 (2. vydání str. 62), neodstranilo však ostatní. Jsou to nepřesnosti na stranách 195, 247, 273 a 277 (1. vydání str. 197, 247, 272 a 275).

Je zřejmé, že doplňky provedené v 2. vydání budou čtenáři užitečné.

Zdeněk Vančura, Praha.