RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

A. J. Chinčin, **Řetězové zlomky**. Z druhého vydání (1949) přeložil Dr *K. Rychlík*. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952. Str. 104, náklad 2200, cena brož. 82 Kčs.

V r. 1935, kdy vyšlo první vydání této knížky, nebylo v sovětské (porevoluční) literatuře monografie o řetězových zlomcích a také vysokoškolské učebnice neobsahovaly výklad této nauky. Vyplnila tedy Chinčinova knížka tehdy podstatnou mezeru v sovětské matematické literatuře, a vyplnila ji znamenitě. Touž mezeru v naší literatuře vyplňuje nyní její překlad. Knížka se skládá ze dvou podstatně různých částí. První část obsahuje klasické počátky nauky o řetězových zlomcích neboli řetězcích (kap. I a II, str. 7—46); k této části připojil překladatel hojné poznámky (str. 81—99). Druhá část (kap. III, str. 47—80) obsahuje několik důležitých výsledků moderní metrické theorie řetězců.

Kniha jedná výhradně o řetězcích tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} \tag{1}$$

(konečné řetězce) a o obdobných nekonečných řetězcích

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots]. \tag{2}$$

O obecnějších řetězcích (kde na př. v (1) místo jedniček stojí libovolná čísla $b_1, \ldots, b_n$) je pouze nepatrná zmínka překladatelova na str. 98—99. Převedeme-li řetězec $[a_0; a_1, \ldots, a_k]$ obvyklými formálními operacemi na jednoduchý zlomek, dostaneme zlomek $\frac{p_k}{q_k}$, kde

$$\begin{gathered} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2},\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (k \geqq 2), \\ p_0 = a_0,\ q_0 = 1,\ p_1 = a_1 a_0 + 1,\ q_1 = a_1. \end{gathered} \tag{3}$$

Tyto rekurentní relace tvoří základ formálního početního aparátu, na němž se buduje theorie řetězců. Zlomkům

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots \tag{4}$$

říkáme sblížené zlomky řetězce (1) nebo (2) [v případě (1) ovšem posloupnost (4) končí u indexu n]. Abychom neměli obtíží, předpokládejme nyní stále, že a_0 je reálné číslo a že $a_1, a_2, \ldots$ jsou čísla kladná. Potom hodnota řetězce (1) je $\frac{p_n}{q_n}$, hodnotu řetězce (2) definujeme jako $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k}$, jestliže tato limita existuje; říkáme potom, že řetězec (2) konverguje. To nastane tehdy a jen tehdy, jestliže řada $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ diverguje (věta 10).

Skoro celý další obsah knihy se omezuje na t. zv. *pravidelné řetězce*, t. j. na případ, že a_0 je celé a že $a_1, a_2, \ldots$ jsou celá kladná. Potom každý konečný řetězec (rozuměj stále:

pravidelný) má racionální hodnotu a naopak, každé racionální číslo lze rozvinouti právě dvěma způsoby (jen nepodstatně odlišnými, viz § 5 na str. 84—85) v konečný řetězec. Každý nekonečný řetězec má pak hodnotu iracionální a naopak každé reálné iracionální číslo α lze rozvinouti právě jedním způsobem v nekonečný (pravidelný) řetězec

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]. \tag{5}$$

Tento řetězec je „periodický“ tehdy a jen tehdy, jestliže α je kvadratická iracionalita. Píšeme-li

$$r_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, a_{k+3} \ldots] \text{ („zbytek“ řetězce)}, \tag{6}$$

máme

$$\alpha - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k(r_{k+1}q_k + q_{k-1})}, \quad a_{k+1} < r_{k+1} < a_{k+1} + 1 \tag{7}$$

(omezuji se pro stručnost na iracionální α), takže vzorec (7) dává velmi dobrou informaci o aproximaci čísla α sblíženými zlomky jeho řetězce. Dá se ukázati, že až na jistou triviální výjimku splývají sblížené zlomky právě s „nejlepšími přiblíženími 2. druhu“ čísla α; při tom zlomek $\frac{a}{b}$ (t. j. dvojici celých čísel a, $b(b > 0)$) nazvu nejlepším přiblížením 2. druhu, jestliže pro každou *jinou* dvojici celých čísel c, d, pro kterou $0 < d \leqq b$, je $|d\alpha - c| > |b\alpha - a|$. Proto jsou aproximace čísla α sblíženými zlomky (viz (7)) velmi důležité a Chinčin je podrobně studuje a odvozuje o nich klasické věty; na př. Hurwitz-Borelovu větu o existenci nekonečně mnoha indexů k, pro které je

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} \,.\, q_k^2},$$

větu Liouvilleovu o aproximaci algebraických čísel spolu s konstrukcí Liouvilleových transcendentních čísel, větu Čebyševovu a pozdější větu Chinčinovu o nehomogenních aproximacích, t. j. o přibližných řešeních rovnice $\alpha x - y = \beta$ celými čísly x, y.

To je asi obsah prvních dvou kapitol; je zde velmi jasně a elementárně vyloženo o řetězcích asi to, co by měl znáti každý matematik. Výklad může dobře sledovati absolvent gymnasia. Pouze důkaz věty 10 je podstatně obtížnější a je proto velmi dobře, že překladatel uvedl na str. 81 jednodušší větu, která pro další potřebu plně postačuje. Velmi záslužné jsou poznámky překladatelovy, které na str. 81—99 uvádějí čtenáře do početní techniky řetězců, podávají návod k řešení rovnice $ax - by = c$ celými čísly atd. a tak ukazují čtenáři, jak v početní praxi užívati theoretických poznatků, vyložených Chinčinem.

Než přejdu k druhé části, chtěl bych upozornit na nesprávné znění věty 17. Zde se jako výjimečný případ uvádí zlomek $\frac{p_0}{q_0}$ jen v případě $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$; správně má býti $\alpha = a_0 + \Theta$, kde $\frac{1}{2} \leqq \Theta < 1$. Chyba je v důkazu na str. 28, ř. 5. Je totiž $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $q_1 < q_2 < q_3 \ldots$ Z nerovnosti $q_s \leqq q_k$ nemusí tedy plynout $s \leqq k$; je možný ještě případ $s = 1$, $k = 0$, načež nutně $a_1 = q_1 = q_0 = 1$, což je právě případ $\frac{1}{2} < \Theta < 1$, opomenutý autorem. Podobné nedopatření — ale méně závažné — je v důkazu věty 18, str. 30, ř. 7: je možna rovnost $q_1 = q_0$, ale v tomto případě se věta 18 snadno dokáže přímo.

Druhá část (t. j. kap. III) se týká metrické theorie řetězců. Změníme-li α o celé číslo, změní se v řetězci (5) jen prvek a_0; omezme se proto jen na čísla intervalu (0,1) — a to na iracionální čísla, t. j. na čísla tvaru

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]. \tag{8}$$

Prvky

$$a_1, a_2, \ldots \tag{9}$$

jsou funkcemi čísla α a kap. III se zabývá otázkami tohoto rázu: Jaké vlastnosti má posloupnost (9) pro skoro všechna α, t. j. pro všechna α (intervalu (0,1)) až na množinu Lebesgueovy míry nulové? O racionální čísla se nemusíme starat, ježto tvoří množinu nulové míry. Jako úvod je dokázána věta: Pro skoro všechna α je posloupnost (9) neomezená. Obsažnější je tato věta: Budiž $\varphi(n)$ kladná funkce a budiž M množina oněch čísel α intervalu (0, 1), jež mají tuto vlastnost: pro nekonečně mnoho hodnot n je $a_n > \varphi(n)$. Potom platí: je-li $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ divergentní, je míra $\mu(M) = 1$, je-li řada konvergentní, je $\mu(M) = 0$. Tato snadná věta pochází od *Borela* a *F. Bernsteina*, ale další a hlubší rozvoj metrické theorie řetězců je především dílem sovětských matematiků. Tak od Chinčina pochází tato fundamentální věta: Budiž $x \,.\, f(x)$ funkce kladná, spojitá a nerostoucí pro $x > 0$. Budiž M množina oněch čísel α intervalu (0, 1), jež mají tuto vlastnost: Nerovnost $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q}$ je splněna pro nekonečně mnoho párů celých čísel p, q ($q > 0$). Potom platí: je-li $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ divergentní, je $\mu(M) = 1$, je-li však integrál konvergentní, je $\mu(M) = 0$. Poslední problém, jemuž je věnováno 17 stran, pochází v podstatě od *Gausse*. Je-li α dáno řetězcem (8), položme $z_n(\alpha) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$, takže vždy $0 < z_n(\alpha) < 1$. Budiž $m_n(x)$ míra množiny oněch čísel α ($0 < \alpha < 1$), pro něž $z_n(\alpha) < x$. Gauss tvrdí v jednom dopise *Laplaceovi*, že dokázal rovnici

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2} \quad \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \tag{10}$$

jeho důkaz však nebyl nikde uveřejněn. První důkaz podal teprve sovětský matematik *Kuzmin* r. 1928, který také našel velmi dobrý odhad pro rychlost konvergence v limitním vztahu (10). Z (10) plynou ještě další zajímavá tvrzení, na př. toto: Je-li dáno přirozené číslo k a je-li $E_{n,k}$ množina oněch α ($0 < \alpha < 1$), pro něž je $a_n = k$, je

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,k}) = \lg\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) : \lg 2.$$

Lze však dokázati i podstatně obecnější výsledky — což také Kuzmin učinil — které jsou klíčem k dalším zajímavým důsledkům. Na př.: Vezměme přirozené číslo k a označme $\psi_n(k)$ číslo udávající, kolikrát se mezi prvními n prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ v (9) vyskytuje číslo k; číslo $\psi_n(k)$ je ovšem funkcí α. Potom pro skoro všechna $\alpha (0 < \alpha < 1)$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(k)}{n} = \lg\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) : \lg 2;$$

pravá strana této rovnice udává tedy jakousi hustotu čísla k v posloupnosti (9), a to pro skoro všechna α. Dále je pro skoro všechna α

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\lg k}{\lg 2}},$$

kdežto posloupnost aritmetických středů $\frac{a_1}{1}, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \ldots$ je, jak se snadno nahlédne, pro skoro všechna α neomezená.

To je asi obsah III. kapitoly Chinčinovy knihy. Látka je zde podstatně obtížnější než v kap. I a II, ale studium je neobyčejně ulehčeno mistrovským podáním, které je u Chinčina obvyklé. Chtěl bych upozornit jen na jednu nejasnost na str. 70. Zde je předložena posloupnost funkcí $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., při čemž $\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x}$ (g, G konstanty). Odtud Chinčin odvozuje vztah $\frac{g_1}{1+x} < f_n(x) < \frac{G_1}{1+x}$, kde g_1, G_1 závisí na n; odhaduje (viz str. 69) $G_1 - g_1$ a poukazuje na to, že *pro dosti velká n* je (podle str. 69) $g < g_1 < G_1 < < G$. Vezme takové n, vyjde z funkce f_n a dospěje k obdobným odhadům pro funkci f_{2n}, totiž $\frac{g_2}{1+x} < f_{2n}(x) < \frac{G_2}{1+x}$, $g_1 < g_2 < G_2 < G_1$; tak pokračuje dále až k funkci f_{n^2}. Zde však není patrno, že při přechodu od f_n k f_{2n} vystačí s touž hodnotou n jako při přechodu od f_0 k f_n. Ale tomu se dá odpomoci takto: podle 3. pomocné věty (str. 67) lze místo g_1 vzíti Max (g, g_1) a místo G_1 vzíti Min (G, G_1). Označíme-li tato čísla znaky g_1, G_1, máme pro *každé n* nerovnosti $g \leqq g_1 < G_1 \leqq G$, což nám stačí. Doporučuji, aby si čtenář přepracoval str. 70 v tomto smyslu.

Zmínil jsem se již o záslužných poznámkách překladatelových; za zmínku stojí též pečlivé názvosloví. Překlad je vůbec pečlivý, pouze někde se mně zdá, že podobnost některých českých a ruských slov svedla překladatele k použití výrazů, které mají v češtině jiný významový odstín než v ruštině (bohužel nemám po ruce ruský originál). Tak na př. nezní dobře věta: „Odtud plyne ihned potvrzení věty“ na str. 30, ř. 8 a podobně v jiných případech. Na str. 40, ř. 1 má býti patrně „požadujeme“ místo „potřebujeme“. Překladatel sestavil též pěkný seznam literatury (str. 100—101), který je bohužel vysázen nepřehledným způsobem: citáty různých autorů jsou natlačeny na sebe, kdežto různé citáty téhož autora jsou odděleny mezerami. Čitelnost knihy snižuje, že je celá sázena petitem. Tiskových chyb je málo a čtenář si je většinou snadno opraví sám. Uvádím pouze: na str. 55, vzorec (59) čti $<$ místo $>$; na str. 71, ř. 8 zdola, čti znak minus místo prvního rovnítka; na str. 75, první vzorec (85) čti u_k^2; na str. 76, ř. 2 zdola čti $f(a_k)$ místo $f(a_k)^2$; na str. 78, ř. 6 zdola je na pravé straně rovnice špatně umístěno znamení absolutní hodnoty.

Vojtěch Jarník, Praha.