Časopis pro pěstování matematiky

Boris Vladimirovich Gnedenko

Pafnutij Lvovič Čebyšev

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 1, 89--103

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117069`

PAFNUTIJ LVOVIČ ČEBYŠEV

B. V. GNEDENKO, dopis. člen Akademie věd USSR.

DT: 92
Čebyšev

Přeloženo z knihy *„Přehled dějin matematiky v Rusku"*, vydal OGIZ r. 1946, § 11., str. 112—125, a dodatek 3., str. 232—239.

Vědecký význam Čebyševův. Pafnutij Lvovič Čebyšev zůstavil po sobě nevyhladitelnou stopu v dějinách světové vědy i v rozvoji ruské kultury.

Velmi četné vědecké práce skoro ve všech oborech matematiky a praktického strojírenství, práce hluboké obsahem a oslnivé samostatnou metodou bádání, získaly P. L. Čebyševovi slávu jednoho z největších představitelů matematického myšlení. Ohromné bohatství idejí je uloženo v jeho pracích. Ačkoliv od smrti jejich tvůrce uplynulo padesát let, neztratily tyto práce ani na své svěžesti ani na své aktualitě a jejich další rozvoj pokračuje v dnešní době ve všech zemích zeměkoule, kde jen bije tep tvůrčích matematických myšlenek.

P. L. Čebyšev vycházel ochotně vstříc všem, kdož chtěli vědecky pracovat a měli pro to předpoklady; dělil se s nimi štědře o své myšlenky. Díky tomu zůstavil po sobě velký počet žáků, kteří se stali později prvotřídními vědci; mezi nimi jsou A. M. Ljapunov a A. A. Markov*). Od něho vycházejí mnohé ruské matematické školy jako škola počtu pravděpodobnosti, škola theorie čísel, škola aproximace funkcí, škola nauky o mechanismech, kteréžto školy pokračují úspěšně v práci až po naše dny.

Životopisný nástin. Život Pafnutije Lvoviče Čebyševa nebyl bohat vnějšími událostmi. Narodil se 26. května 1821 v dědině Okatovo v Borovském újezdě v Kalužské gubernii. První vzdělání a vychování obdržel doma. Číst a psát ho naučila matka Agrafena Ivanovna, aritmetice a francouzskému jazyku však sestřenice Sucharevа, dívka velmi vzdělaná, která patrně sehrála význačnou úlohu ve výchově budoucího matematika. R. 1832 rodina Čebyševých se přestěhovala do Moskvy, aby se Pafnutij Lvovič a jeho starší bratr připravili na vstup na universitu. Jako šestnáctiletý jinoch se stal Čebyšev posluchačem Moskevské university a už za rok byl odměněn stříbrnou medailí za matematickou práci v soutěži vypsané fakultou. R. 1840 se hmotné postavení rodiny Čebyševých zakolísalo a Pafnutij byl nucen žít z vlastního výdělku. Tato

*) Autor o nich mluví v §§ 12. a 13. (Q. V.)

okolnost zanechala stopy na jeho povaze a učinila ho šetrným a hospodárným. Šetrným zůstal i později, když už neměl nedostatek finančních prostředků, ne však tehdy, když šlo o zhotovování modelů rozličných přístrojů a mechanismů, jejichž návrhy se často rodily v jeho hlavě.

Jako dvacetiletý jinoch skončil P. L. Čebyšev universitní studium a za dva roky na to uveřejnil svou první vědeckou práci. Brzo po ní následovaly četné další práce stále pozoruhodnější a pozoruhodnější, které rychle upoutaly pozornost vědeckého světa. Dvacetipětiletý P. L. Čebyšev, ucházeje se o hodnost magistra, zadal Moskevské universitě disertaci věnovanou počtu pravděpodobnosti a již za rok poté byl povolán na katedru Petrohradské university; přestěhoval se do Petrohradu. Zde počala jeho profesorská činnost, které P. L. Čebyšev věnoval mnoho sil a která trvala až do jeho vysokého věku, kdy opustil přednášky a kdy se věnoval zcela vědecké práci. V té pokračoval doslova až do posledního okamžiku svého života. Když ve dvaceti osmi letech dosáhl na Petrohradské universitě hodnosti doktora, sloužila za disertaci jeho kniha „*Theorie kongruencí*“, které potom po více než půl století používali studenti jako jedné z nejhlubších a nejvážnějších příruček theorie čísel. Akademie věd zvolila dvaatřicetiletého P. L. Čebyševa adjunktem katedry užité matematiky a osmatřicetiletého řádným akademikem. Po roce byl zvolen dopisujícím členem Akademie věd v Paříži a r. 1874 poctila ho tato Akademie velmi vzácnou poctou a zvolila ho svým zahraničním členem.

Ráno 8. prosince 1894 Pafnutij Lvovič Čebyšev zemřel, sedě za psacím stolem. Před tím byl jeho přijímací den, kdy sděloval svým žákům plány svých prací a přiváděl je na myšlenky o látce pro samostatnou tvorbu.

Čebyšev jako pedagog. K tomuto náčrtku vnějšího života P. L. Čebyševa třeba připojiti jeho chatakteristiku jako pedagoga a vědeckého vychovatele, jak nám ji zachovali jeho současníci a žáci. Už to vše, čím přispěla v dějinách matematiky jím vytvořená škola, ukazuje s největší objektivností, nezávisle na osobních ohlasech, že P. L. Čebyšev uměl rozněcovat ve svých žácích vědecký enthusiasmus. Základním rysem jeho školy, která byla nazvána Petrohradskou matematickou školou, byla snaha těsně spoutat problémy matematiky se zásadními otázkami přírodovědy a techniky. Jednou za týden byl u P. L. Čebyševa přijímací den, kdy dveře jeho bytu byly otevřeny každému, kdo se chtěl poradit o nějaké otázce své odborné práce. Zřídka kdo odcházel neobohacen novými myšlenkami a novými plány. Současníci a zvláště žáci P. L. Čebyševa hovoří o tom, že P. L. Čebyšev ochotně odhaloval bohatství svého myšlenkového světa nejen v besedách vyvolencům, nýbrž i ve svých přednáškách širokému posluchačstvu. Za tím účelem někdy přerušil postup výkladu, aby osvětlil svým posluchačům dějiny a metodologický význam některého fakta nebo vědecké zásady. Těmto odbočkám přikládal stěžejní význam. Bývaly dosti dlouhé. Přistupuje k takové rozmluvě, P. L. Čebyšev opouštěl křídu a tabuli a usazoval se ve zvláštním křesle, postaveném před prvou řadou posluchačů. Žáci ho charakterisovali mimo to jako pedanticky přesného a správného přednášeče, nikdy přednášku nevynechávajícího, nikdy se neopozdivšího a nikdy nepředržujícího posluchačstvo ani o minutu déle přes stanovenou dobu. Je zajímavo zmínit se ještě o jedné charakteristické okolnosti jeho přednášek: každému složitému výkladu předesílal objasnění jeho účelu a postupu v obecných rysech, potom jej však napsal mlčky a velmi rychle na tabuli, avšak tak podrobně, že bylo snadno jej sledovat.

Obecná charakteristika jeho vědecké tvorby. Na pozadí tohoto vyrovnaného a šťastného, nijakými vnějšími otřesy nepoznamenaného života, v tichu spokojeného kabinetu učencova, vznikly velké vědecké objevy, jimž bylo souzeno nejen změnit a přetvořit tvářnost ruské matematiky, nýbrž i ukázat ohromný, po řadu generací nezměněně se pociťující vliv na vědeckou tvorbu mnohých vynikajících učenců a vědeckých škol za hranicemi. P. L. Čebyšev nebyl jedním z těch vědců, kteří věnují celý svůj život úzkému odvětví své vědy, které si oblíbili, vytvořujíce zprvu jeho základy a potom pečlivě jej zpracovávají a dovršují jeho detaily. On přináležel k těm „kočovným" matematikům, jaké zná věda mezi svými největšími tvůrci a kteří vidí své poslání v tom, že přecházejí od jednoho vědeckého oboru k druhému, když v každém z nich zůstavili četné základní myšlenky nebo metody; jejich pozdější zpracování nebo detaily rádi přenechávají svým současníkům a budoucím generacím. To ovšem neznačí, že by takový učenec každoročně měnil obor svých vědeckých zájmů a že by, uveřejniv ve zvoleném oboru jednu nebo dvě stati, navždy jej opustil. Nikoli, víme, že P. L. Čebyšev se zajímal na př. po celý život o zpracování stále nových a nových úloh své proslulé nauky o aproximaci funkcí, že se obíral třikrát základními úlohami počtu pravděpodobnosti — na počátku, uprostřed a na samém konci své tvůrčí činnosti. Je však charakteristické, že takových vybraných oborů bylo u něho mnoho (theorie integrace, aproximace funkcí mnohočleny, theorie čísel, počet pravděpodobnosti, nauka o mechanismech a řada dalších) a že v každém z nich ho upoutalo hlavně vytvoření základních obecných metod, nikoli však logické dovršení pečlivým zpracováním detailů. A je skoro nemožno ukázat na takový obor, kde by jím zaseté semeno nedalo hojné a mohutné úrody. Jeho myšlenek se ujala a zpracovala je skvělá plejada žáků, potom se tyto myšlenky staly majetkem i širších vědeckých kruhů i zahraničních a získávaly si vždy s úspěchem následovníky a pokračovatele. Mezi těmito myšlenkami byly i takové, jejichž metodologický význam nemohl být pochopen současníky v dostatečné míře a objevil se ve vší plnosti teprve ve výzkumech následujících generací učenců. To je taktéž charakteristický rys v tvorbě geniálně obdařeného ducha.

Otázky praxe v Čebyševově tvorbě. Jako další důležitou zvláštnost vědecké tvorby P. L. Čebyševa třeba uvést jeho neustálý zájem o otázky praxe.

Tento zájem byl tak veliký, že jím byla asi určena ve značné míře vědecká osobnost P. L. Čebyševa. Lze říci bez přehánění, že větší část jeho význačnějších matematických objevů byla vyvolána pracemi z aplikované matematiky, zvláště jeho bádáním v nauce o mechanismech. Působení tohoto vlivu zdůrazňoval nezřídka sám Čebyšev v pracích z ryzí i z aplikované matematiky. Nejplněji byla jím však vyslovena idea plodnosti spojení theorie a praxe ve stati „*Kreslení zeměpisných map*". Nebudeme vykládat myšlenky tohoto velikého vědce, nýbrž uvedeme jeho původní slova:

„Sblížení theorie s praxí vede k nejblahodárnějším důsledkům a získává tím nejen praxe. Samy vědy se rozvíjejí pod vlivem praxe: ona jim objevuje nové oblasti bádání nebo nové stránky oblastí dávno známých. Nehledě na vysoký stupeň rozvoje, k němuž byly přivedeny matematické vědy prací velkých geometrů tří posledních století, praxe zjevně odhaluje neúplnost věd v mnohém ohledu; ona předkládá otázky pro vědu podstatně nové a tím vyvolává vyhledávání zcela nových metod. Jestliže theorie mnoho získává novými aplikacemi téže metody nebo jejím novým rozvojem, tedy ještě více získává objevem nových metod. A v tomto případě věda nalézá věrného vůdce v praxi."

Mezi ohromným množstvím, úloh jež člověku ukládá jeho praktická činnost, zvláštní důležitosti nabývá tato úloha: „*Jak použít daných prostředků, aby se dosáhlo pokud možno největších výhod.*" Zvláště pak: „Většina otázek praxe přivádí k úlohám největších a nejmenších veličin, k úlohám zcela novým pro vědu. A jen řešením těchto úloh můžeme uspokojit potřeby praxe, která všude hledá to nejlepší a nejvýhodnější."

Uvedený citát je u P. L. Čebyševa programem veškeré jeho činnosti a byl vůdčím principem jeho tvořivosti.

Četné práce P. L. Čebyševa z použité matematiky, které nesou zcela nematematické názvy: „*O jednom mechanismu*", „*O ozubených kolech*", „*O odstředivém regulátoru*", „*O kreslení zeměpisných map*", „*O střihu šatů*" a mnohé jiné, byly spojeny jednou základní myšlenkou: jak použít pohotových prostředků, aby se dosáhlo největší výhody.

Tak v práci „*O kreslení zeměpisných map*" kladl si za cíl určit takovou projekci mapy dané země, pro niž skreslení měřítka by bylo nejmenším. V Čebyševových rukou došla tato úloha vyčerpávajícího řešení. Pro evropské Rusko dovedl toto řešení až do číselných výpočtů a objasnil, že nejvýhodnější projekce dá skreslení měřítka nejvýše 2%, kdežto v té době užívané projekce dávaly skreslení měřítka nejméně 4 až 5%.

Práce v oboru nauky o mechanismech. Významný díl svého úsilí vynaložil Čebyšev na sestrojování kloubových mechanismů a na vytvoření jejich nauky. Zvláštní pozornost věnoval zdokonalení Wattova rovnoběžníka, mechanismu sloužícího k přeměně kruhového pohybu na přímočarý. Důležitost tohoto problému spočívala v tom, že tento mechanismus, pro parní motory a jiné stroje základní, byl velmi nedokonalý a že dával místo přímočarého pohybu pohyb křivočarý. Taková záměna jednoho pohybu druhým vyvolávala škodlivé odpory, kazící a opotřebující stroje. Sedmdesát pět let minulo od objevu Wattova. Sám Watt, jeho současníci a následující generace inženýrů pokoušeli se překonati tento nedostatek, ale tápajíce a provádějíce jen pokusy, nemohli se dodělat podstatných výsledků. P. L. Čebyšev se díval na věc z nového hlediska a postavil otázku takto: Mají se vytvořit mechanismy, ve kterých by se křivočarý pohyb pokud možno nejméně odchýlil od pohybu přímočarého, a je stanovit při tom nejvýhodnější rozměry částí stroje.*)

*S pomocí zvláštních jím vypracovaných úvah z theorie funkcí nejméně se odchylujících od nuly ukázal Čebyšev možnost řešení úlohy přiblížit se přímočarému pohybu s libovolným stupněm aproximace k tomuto pohybu.

Na základě jím vypracované metody podal řadu nových konstrukcí mechanismů, dávajících přibližně přímý směr. Některé z nich nacházejí podnes praktické upotřebení v užívaných zařízeních.

Ale zájmy P. L. Čebyševa se neomezovaly jen na prozkoumání theorie mechanismů dávajících přibližně přímý směr. Zabýval se též jinými úlohami, které jsou aktuální i v současném strojnictví.

Při studiu trajektorií, opisovaných jednotlivými body článků kloubově klikových mechanismů, P. L. Čebyšev se zastavil u trajektorií, jejichž tvar je souměrný. Vyšetřuje vlastnosti těchto souměrných trajektorií (kotálnic), ukázal, že tyto trajektorie mohou být použity k sestrojení mnohých forem pohybu důležitých pro techniku. Zvláště ukázal, že lze kloubovými mechanismy provádět otáčivé pohyby s rozličným směrem otáčení kol dvou os. Jeden z takových mechanismů, který obdržel později pojmenování paradoxního mechanismu, je podnes předmětem obdivu všech techniků a odborníků. Poměr mezi hnacím a hnaným článkem sloužící k převodu v tomto mechanismu může se měnit závisle od směru otáčení hnaného článku.

P. L. Čebyšev vytvořil četné t. zv. mechanismy se zarážkami. V těchto mechanismech, hojně používaných v současné stavbě automatů, vykonává hnaný článek přerušovaný pohyb, při čemž poměr doby klidu hnaného článku k době jeho pohybu se musí měnit závisle na technologických úlohách mechanismu uložených. P. L. Čebyšev po prvé podal řešení úlohy o návrzích takových mechanismů. Jemu přísluší priorita v otázce vytvoření mechanismů „vyrovnávajících pohybů“, které došly v nejposlednější době upotřebení v četných konstrukcích současných zařízení a takových převodů jako jsou progresivní převody typu Vazantova, Constantinescuova a jiných.

Využívaje svých mechanismů, sestrojil P. L. Čebyšev znamenitý kráčející

*) Část přehledu, týkající se prací P. L. Čebyševa z nauky o mechanismech a poznamenaná na počátku a na konci hvězdičkou, pochází od dopisujícího člena Akademie věd SSSR *J. J. Artobolevského.*

stroj, napodobující svým pohybem pohyb živého tvora. Sestrojil t. zv. veslový mechanismus, který napodobuje pohyb vesel loďky, sestrojil pojízdné křeslo, originální model třídícího stroje a jiných mechanismů. Podnes s úžasem pozorujeme pohyb takových strojů a jsme překvapeni bohatou technickou intuicí P. L. Čebyševa*).

Od P. L. Čebyševa pochází přes 40 různých mechanismů a okolo 80 jejich modifikací. V dějinách rozvoje strojnictví nelze ukázat ani na jednoho vědce, který by vytvořil tak pozoruhodné množství originálních mechanismů.

Avšak P. L. Čebyšev neřešil jen úlohy sestrojování mechanismů. O mnoho let dříve než jiní vědci odvodil proslulý strukturální vzorec rovinných mechanismů, který jen z nedorozumění nese jméno vzorec Gruberův, jméno německého učence, který jej objevil o 14 let později než Čebyšev.

P. L. Čebyšev nezávisle na Robertsovi dokázal proslulý theorem o existenci tříkloubových čtyřčlánkových ústrojí, opisujících jednu a tutéž kotálnici, a hojně upotřebil tohoto theoremu k četným praktickým úlohám.

Vědecké dědictví P. L. Čebyševa v oboru theorie mechanismů obsahuje takové bohatství myšlenek, že kreslí obraz velikého matematika jako pravého novátora techniky.*

Theorie nejlepší aproximace funkce. Pro dějiny matematiky je zvláště důležito, že sestrojování mechanismů a zpracování jejich theorie posloužily P. L. Čebyševovi jako východisko pro vytvoření nového odvětví matematiky — theorie nejlepší aproximace funkcí pomocí mnohočlenů. Zde se objevil P. L. Čebyšev pionýrem v plném toho slova smyslu, nemaje nijakých předchůdců. Je to obor, kde pracoval více než v kterémkoli jiném oboru, nalézaje a řeše zcela nové úlohy, a kde vytvořil sloučením svých bádání nové obšírné odvětví matematické analysy, které se i po jeho smrti dále úspěšně rozvíjelo. Prvopočáteční a nejjednodušší postavení úlohy počalo vyšetřováním rovnoběžníku Wattova a záleželo v tom, aby se našel mnohočlen daného stupně, který by se méně než ostatní mnohočleny téhož stupně odchýlil od nuly v některém daném intervalu proměnného argumentu. Takové mnohočleny byly Čebyševem nalezeny; později byly nazvány „*Čebyševovými polynomy*".*) Tyto polynomy mají mnohé pozoruhodné vlastnosti a slouží v přítomné době jako jeden z nejupotřebitelnějších nástrojů při vyšetřování mnohých otázek matematiky, fysiky a techniky.

Obecná formulace úlohy P. L. Čebyševa souvisí se základními problémy použití matematických metod v přírodovědě a v technice. Je známo, že pojem funkcionální závislosti mezi proměnnými veličinami je základním pojmem nejen v matematice, nýbrž i ve všech přírodovědných a technických naukách. Otázka vyčíslení hodnot funkcí pro každou danou hodnotu argumentu vy-

*) Popis Čebyševových klikových mechanismů, pojízdného křesla, třídícího stroje a loďky byl uveřejněn v časopise „*Z říše vědy a práce*", V, 1897, str. 81—84. (Q. V.)

*) Viz doplněk.

vstává před každým, kdo zkoumá souvislosti mezi rozličnými veličinami, charakterisujícími ten či onen proces, ten či onen zjev. Avšak bezprostřední vypočítání hodnot funkcí může být provedeno jen pro velmi úzkou třídu funkcí: pro mnohočleny a podíly dvou mnohočlenů. Proto vznikla již dávno úloha, zaměnit vypočítávanou funkci mnohočlenem jí blízkým. Zvláštní zájem vzbudila vždy úloha interpolace, t. j. úloha nalézti mnohočlen n-tého stupně, nabývající přesně těchže hodnot jako daná funkce při $n + 1$ daných hodnotách argumentu. Vzorce, dané slavnými matematiky Newtonem, Lagrangem, Gaussem, Besselem a jinými, řešily tuto úlohu, ale měly četné nedostatky. Zvláště se ukázalo že přidání jedné či několika nových hodnot funkce vyžaduje nové přepočítání všech vypočítaných hodnot a že, což je ještě důležitější, zvětšení čísla n, t. j. počtu shodných hodnot funkce a mnohočlenu, nezaručuje neomezené sblížení jejich hodnot při všech hodnotách argumentů. Nadto se ukázalo, že existují takové funkce, pro které může dokonce nastati oddálení mnohočlenu od přibližované funkce při špatném výběru hodnot argumentu, pro něž se shodují hodnoty funkce a mnohočlenu.

P. L. Čebyšev se nemohl smířit s tak vážnými nedostatky v otázce, hrající vynikající úlohu jak v theorii tak v praxi, i přistoupil k ní ze svého hlediska. V jeho úpravě byla úloha interpolace přetvořena takto: Mezi všemi mnohočleny daného stupně je najít ten, který dává nejmenší absolutní hodnoty rozdílů hodnot funkce a mnohočlenu při všech hodnotách argumentu v daném intervalu jeho proměnné. Tato nadmíru plodná úprava projevila mimořádný vliv na práce pozdějších matematiků. V přítomné době existuje ohromná literatura, věnovaná rozvinutí myšlenky P. L. Čebyševa; v téže době rozšířil se okruh úloh, v nichž metody vypracované P. L. Čebyševem přinášejí neocenitelný užitek.

Zdržíme se ještě jen u krátké charakteristiky výsledků dosažených P. L. Čebyševem ve dvou oborech — v theorii čísel a v počtu pravděpodobnosti.

Práce z theorie čísel. Těžko lze ukázat jiný pojem tak úzce spjatý se vznikem a rozvojem lidské kultury jako je pojem čísla. Odejmětež lidstvu tento pojem a uvidíte, oč tím zchudne náš duševní život a praktická činnost: ztratíme tím možnost provádět výpočty, měřit čas, srovnávat vzdálenosti, určovat mzdy podle výsledků práce. Ne nadarmo staří Řekové připisovali legendárnímu Prometheovi vynález čísla mezi ostatními jeho nesmrtelnými činy. Důležitost pojmu čísla povzbudila vynikající matematiky a filosofy všech dob a národů, aby se pokusili proniknout v taje uspořádání celých čísel. Zvláštního významu nabylo již ve starém Řecku vyšetřování prvočísel, t. j. čísel, dělitelných beze zbytku pouze sebou samým a jednotkou. Všechna ostatní čísla jeví se tudíž jako výtvory prvočísel a prvočísla se jeví tedy jako prvky, z nichž je utvořeno každé číslo. Avšak výsledky v tomto oboru se získávaly s velkou námahou. Starou řeckou matematikou byl objeven snad jen jediný obecný výsledek o prvočíslech, známý nyní pod jménem theoremu Eukleidova. Podle tohoto theoremu je v řadě celých čísel nekonečné množství prvočísel. Na otázky pak o tom, jak jsou tato čísla rozložena, jak pravidelně a jak hustě, řecká matematika neměla odpovědi. Skoro dvě tisíciletí, která uplynula od časů Eukleidových, nepřinesla pokrok v těchto problémech, ačkoli se o ně zajímali mnozí matematikové a mezi nimi tací titáni matematické myšlenky jako Euler a Gauss. Empirické výpočty, provedené Legendrem a Gaussem, přivedly je k závěru, že v mezích známých jim tabulek je počet prvočísel mezi všemi prvními n čísly přibližně $\lg n$-krát*) menší než číslo n. Přesně stanovil Legendre, že v mezích prvního milionu se rovná počet prvočísel menších než n přibližně

$$\frac{n}{\lg n - 1{,}08366};$$

dále pak předpokládal, že tento poměr platí i pro hodnotu n větší než milion. Toto tvrzení zůstalo čistě empirickým faktem, stanoveným jen pro čísla v mezích prvních desítek tisíců. Nebylo nijakých předpokladů pro to, aby se toto tvrzení rozšířilo na vyšší hodnoty n, a nebyl ani znám postup pro přesný důkaz. Ve čtyřicátých letech minulého století francouzský matematik Bertrand vyslovil o rozložení prvočísel ještě jednu hypothesu: aspoň jedno prvočíslo se musí nalézti mezi čísly n a $2n$, kde n je libovolné celé číslo větší než jednotka. Dlouhou dobu zůstávala tato hypothesa jen empirickým faktem, pro jehož důkaz nebylo nijakých cest.

Rozbor vědeckého dědictví Eulerova vzbudil zájem Čebyševův o theorii čísel a poskytl síle jeho matematického nadání možnost, aby se zde projevila. Obíraje se theorií čísel P. L. Čebyšev zcela elementárními metodami určil chyby v hypothese Legendreově a opravil je. P. L. Čebyšev dokázal hned větu, ze které postulát Bertrandův neprodleně vyplývá jako prostý důsledek; upotřebil při tom zcela elementárního a ve své ostrovtipnosti výminečného obratu. To byl největší triumf matematické myšlenky. Jeden anglický matematik té doby řekl, že pro získání dalších pokroků v otázce rozložení prvočísel bude potřebí důvtipu o to převyšujícího důvtip Čebyševův, oč Čebyševův důvtip převyšuje důvtip obyčejného člověka. Nebudeme se zdržovat u dalších výsledků P. L. Čebyševa v theorii čísel; již to, co bylo řečeno, ukazuje v dostatečné míře, jak mohutný byl jeho genius.

Práce z počtu pravděpodobnosti. Přejdeme nyní k tomu oddílu matematické vědy, v němž myšlenky a výsledky P. L. Čebyševa nabyly rozhodujícího významu pro její veškerý další rozvoj, určivše na mnoho desítiletí až do našich dnů směr nejaktuálnějších matematických bádání. Tento oddíl matematiky slove počet pravděpodobnosti. K počtu pravděpodobnosti vztahují se doslova vlákna ze všech oborů poznání. Tato nauka se obírá studiem nahodilých

*) $\lg n$ značí logaritmus čísla n při základu $e = 2{,}71828\ldots$

zjevů, jejichž průběh nelze předem předvídat a jejichž uskutečnění při zdánlivě stejných podmínkách může probíhat zcela různě, závisle od náhody. Dva základní zákony této nauky — zákon velkých čísel a hlavní limitní theorem — jsou ty dva zákony, kol nichž se seskupovala až do nejposlednější doby veškerá bádání a které až po naše dny nepřestávají tvořit předmět úsilí velkého počtu odborníků. Oba tyto zákony mají ve svém dnešním podání svůj počátek u P. L. Čebyševa. Nebudeme se zabývat věcným obsahem těchto zákonů. Znamenitá elementární metoda vytvořená Čebyševem dovolila mu dokázat s podivuhodnou lehkostí zákon velkých čísel za tak širokých předpokladů, jaké nemohly odůvodnit ani nesrovnatelně složitější analytické metody jeho předchůdců. Pro důkaz hlavního limitního theoremu vytvořil P. L. Čebyšev svou metodu momentů, která stále hraje významnou úlohu i v současné matematické analyse. Nepodařilo se mu však dovésti důkaz do konce. To dokončil později akademik A. A. Markov*). Snad ještě větší význam pro počet pravděpodobnosti než skutečné výsledky Čebyševovy má ta okolnost, že Čebyšev vzbudil o tento počet zájem u svých žáků, že vytvořil školu svých následovníků a také to, že zejména on po prvé vtiskl jí ráz dnešní matematické vědy. Neboť v období, kdy P. L. Čebyšev počínal tvořit, počet pravděpodobnosti jako matematická disciplina se nacházel v dětském stavu, nemaje vlastních dostatečně obecných úloh a metod bádání. P. L. Čebyšev vytvořil zejména po prvé její ideovou a metodologickou základnu, které tehdy nebylo, a naučil své současníky a následovníky, aby k tomuto počtu přistupovali se stejně přísnou náročností (obzvláště vzhledem k logické přesnosti svých vývodů) a s touže pečlivou a vážnou pozorností a starostlivostí jako ke každé jiné matematické disciplině. Takový názor, sdílený v přítomné době celým vědeckým světem, ba i jedině myslitelný, byl v minulém století něčím novým a neobyčejným; a zahraniční svět se mu naučil od ruské vědecké školy, v níž se to stalo od dob Čebyševových nezvratnou tradicí.

Důsledky myšlenek Čebyševových. Světová věda nezná mnoho jmen vědců, jejichž tvorba by měla tak pozoruhodný vliv na další rozvoj jejich vědy, jako tomu bylo u objevů P. L. Čebyševa. Zvláště značná většina sovětských matematiků podnes blahodárně cítí na sobě vliv P. L. Čebyševa, který na ně působí prostřednictvím vědeckých tradic a směrů bádání vytvořených P. L. Čebyševem.

Dodatek**)

MNOHOČLENY NEJMÉNĚ SE ODCHYLUJÍCÍ OD NULY

V tomto dodatku se čtenář seznámí s t. zv. mnohočleny nejméně se odchylujícími od nuly a s jejich nejjednoduššími vlastnostmi. P. L. Čebyševův objev

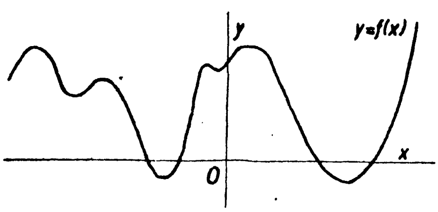
*) O tom pojednává autor v § 12 své knihy. (Q. V.)
**) Autor označuje tento dodatek ve své knize jako 3. (Q. V.)

tohoto zajímavého matematického předmětu, jak jsme již řekli, je spojen s formulací a řešením některých úloh praktické mechaniky. Avšak i nezávisle od svého původního východiska hrají Čebyševovy polynomy vážnou úlohu v současné matematice.

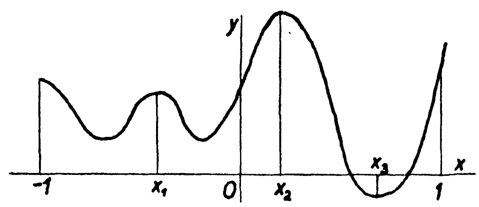
Je známo, že mnohočlenem n-tého stupně vzhledem k x se nazývá funkce následujícího tvaru:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

kde součinitelé $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou veličiny nezávislé na x. V soustavě souřadnic (x, y) funkce $y = f(x)$ zobrazuje nějakou čáru (obr. 1). Je pochopitelno, že změna třeba jen jednoho součinitele a (t. j. a_0 nebo $a_1, \ldots, a_n$) změní tvar grafu funkce $y = f(x)$. Čebyšev si položil a řešil tuto úlohu: Máme vyhledat



Obr. 1.



Obr. 2.

ze všech mnohočlenů n-tého stupně se součinitelem u nejvyšší mocniny rovným jednotce, t. j. ze všech mnohočlenů tvaru

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

ten, který se nejméně odchyluje od nuly, když se argument x mění od -1 do $+1$.

Podrobněji může být tato úloha vyložena těmito slovy: Prozkoumáme libovolný mnohočlen uvedeného tvaru a najdeme ty veličiny x, při nichž veličiny $f(x)$ nabudou absolutních hodnot větších než sousední veličiny $f(x)$. Takové hodnoty označíme na obr. 2 body -1, x_1, x_2, x_3, $+1$. Nechť m značí největší z těchto veličin, t. j. $m = \max\limits_{-1\leq x\leq +1} f(x)|$. Máme najít takové $f_0(x)$, pro něž existující číslo

$$m = m_0$$

by bylo menší než všechny mnohočleny n-tého stupně se součinitelem $a_0 = 1$.

Připomínáme, že kořenem $f(x)$ se nazývá takové číslo x, pro něž $f(x)$ se stává nulou, t. j.

$$f(x_0) = x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Podle theoremu Bézoutova lze, je-li x_0 kořenem mnohočlenu $f(x)$, napsat $f(x)$ ve tvaru součinu rozdílu $x - x_0$ a mnohočlenu $(n - 1)$-ho stupně.

Číslo x_0 jmenuje se k-násobným kořenem $f(x)$, jestliže

$$f(x) = (x - x_0)^k \,.\, \varphi(x),$$

kde $\varphi(x)$ je mnohočlen $(n - k)$-tého stupně, při čemž $\varphi(x_0) \neq 0$.

Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_p$ všechny $k_1, k_2, \ldots, k_p$-násobné kořeny $f(x)$, kdež $k + k_2 + \ldots + k_p = n$, tu platí, jak plyne z Bézoutova theoremu, že $f(x) = (x - x_1)^{k_1} \,.\, (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_p)^{k_p}$.

Po této poznámce přejdeme k vlastnostem Čebyševových polynomů (t. j. mnohočlenů nejméně se odchylujících od nuly pro $-1 \leqq x \leqq +1$) a k jejich důkazu.

Vlastnost 1. *Polynom Čebyševův n-tého řádu v intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$ má n rozličných reálných kořenů.*

Důkaz. Předpokládáme opak, t. j. že mnohočlen nejméně se odchylující od nuly $f_0(x)$ má jen p rozličných reálných kořenů $(p < n)$ v intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_p$ jsou tyto kořeny. Vybéřeme z nich kořeny liché násobnosti — nechť to jsou podle očíslování v našem uspořádání kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_q$ $(q \leqq p)$ — a sestrojíme mnohočlen

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_q).$$

Podotýkáme, že mnohočleny $f_0(x)$ a $\varphi(x)$ nabývají při všech hodnotách $x(-1 \leqq x \leqq 1)$ hodnoty stejného znamení nebo při všech uvedených hodnotách hodnoty opačného znamení. Skutečně lze $f_0(x)$ napsati ve tvaru

$$f_0(x) = \varphi(x) \,.\, (x - x_1)^{2s_1} \,.\, (x - x_2)^{2s_2} \ldots (x - x_n)^{2s_p} \,.\, \psi(x),$$

kde $\psi(x)$ je mnohočlenem stupně $n - 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_p) - q$, nemající reálných kořenů v intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$, a kde $s_1, s_2, \ldots, s_p$ jsou celá nezáporná čísla. Protože činitel

$$(x - x_1)^{2s_1} \,.\, (x - x_2)^{2s_2} \ldots (x - x_p)^{2s_p}$$

je očividně nezáporný a činitel $\psi(x)$ nemůže měnit v intervalu $1 \leqq x \leqq 1$ znamení*), je naše tvrzení o znameních mnohočlenů $f_0(x)$ a $\varphi(x)$ dokázáno. Položíme nyní

$$M = \max_{-1 \leqq x \leqq 1} |\varphi(x)|$$

a vyšetříme mnohočlen

$$f_1(x) = f_0(x) \pm \lambda \,.\, \varphi(x),$$

kde λ je jakékoli číslo mezi 0 a $\frac{m_0}{M}$ a znaménko před druhým sčítancem je opačné ku znaménku $f_0(x)$. Je jasno, že $f_1(x)$ je mnohočlen n-tého stupně se součinitelem 1 při nejvyšším členu. Protože v důsledku utvoření mnohočlenu $f_1(x)$ a výše učiněné poznámky o znaméncích mnohočlenů $f_0(x)$ a $\varphi(x)$ je

$$|f_1(x)| < |f_0(x)|,$$

*) Jinak by měl mnohočlen $\psi(x)$ v tomto intervalu reálný kořen.

došli jsme k rozporu: našel se mnočlen, odchylující se od nuly méně než $f_0(x)$. Proto předpoklad, že $p < n$ je nemožný.

Vlastnost 2. *V intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$ se všechny maximální odchylky mnohočlenu $f_0(x)$ od nuly sobě rovnají.*

Důkaz. Předpokládáme, že tomu tak není a že při nějakém x' ($-1 \leqq x' \leqq \leqq 1$) funkce $|f_0(x))|$ dosáhne maxima, že však je

$$m' = |f_0(x')| < m_0.$$

Nechť $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ jsou kořeny mnohočlenu $f_0(x)$, uspořádané podle velikosti. Jestliže $x_k < x' < x_{h+1}$, tu přihlédneme k mnohočlenu

$$\psi(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+2}) \ldots (x - x_n).$$

Snadno se vidí, že hodnoty funkcí $f_0(x)$ a $\psi(x)$ mají vždy stejná znaménka s vyloučením intervalu $x_k < x < x_{k+1}$*), avšak v tomto vyloučeném intervalu jsou jejich znaménka opačná.

Nechť

$$M = \max_{-1 \leqq x \leqq 1} |\psi(x).$$

Utvoříme mnohočlen

$$f_2(x) = f_0(x) - \lambda \,.\, \psi(x),$$

kde λ je libovolné číslo uzavřené mezi 0 a $\dfrac{m_0 - m'}{M}$. Je jasno, že vždy s vyloučením intervalu $x_k \leqq x \leqq x_{k+1}$ platí, že

$$|f_2(x)| < m_0,$$

ve vyloučeném pak intervalu, že

$$|f_2(x)| \leqq |f_0(x)| + \lambda|\psi(x)| < m' + \frac{m_0 - m'}{M} M = m_0.$$

Proto se mnohočlen $f_2(x)$ odchyluje od nuly méně než $f(x)$. To odporuje našemu předpokladu. Tím je 2. vlastnost dokázána.

Poznámka. Kdyby maximum různé od m_0 se vyskytlo na jednom z konců intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$, t. j. při $x = -1$ nebo $x = 1$, tu by bylo třeba místo mnohočlenu $\psi(x)$, námi použitého v důkazu, uvažovat buď mnohočlen $(x - - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$ nebo obdobně mnohočlen $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - - x_{n-1})$.

Vlastnost 3. *Existuje jediný Čebyševův polynom n-tého řádu.*

*) Je-li $x < x_k$, tu jak $x - x_k$ tak $x - x_{k+1}$ jsou záporné; je-li $x > x_{k+1}$, tu jsou oba rozdíly kladné; v obou případech je součin $(x - x_k)(x - x_{k+1})$ kladný.

Důkaz. Předpokládáme, že tomu tak není. Nechť jsou $f_0(x)$ a $f_1(x)$ dva rozličné mnohočleny nejméně se odchylující od nuly. Mnohočlen

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[f_0(x) + f_1(x)]$$

neodchyluje se od nuly více než každý z mnohočlenů $f_0(x)$ a $f_1(x)$ a tudíž je mnohočlenem nejméně se odchylujícím od nuly. Protože však v důsledku předešlé vlastnosti všechny maximální odchylky tohoto mnohočlenu musí být mezi sebou rovny, musí se všechny maximální odchylky mnohočlenů $f_0(x)$ a $f_1(x)$ sobě rovnat při společných hodnotách argumentu*). Existuje však $n + 1$ takových hodnot: $n - 1$ maximálních odchylek mezi kořeny mnohočlenu a dvě na koncích intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$. Proto dva polynomy n-tého stupně se ztotožňují při všech hodnotách x**).

Vlastnost 4. *Jestli mnohočlen má vlastnosti 1 a 2, tu je mnohočlenem nejméně se odchylujícím od nuly.*

Důkaz. Předpokládáme, že se některý mnohočlen $f(x)$ ještě méně od nuly odchyluje než $f_0(x)$. Protože je možno napsat $f(x)$ ve tvaru

$$f(x) = f_0(x) + \varphi(x),$$

kde $\varphi(x)$ je mnohočlen ne více než $(n - 1)$-ího stupně, tu je jasno, že $f(x)$ může se odchylovat od nuly méně než $f_0(x)$ pouze v tom případě, jestliže hodnota $\varphi(x)$ při všech x, kde $f_0(x)$ dosahuje maxima, má znaménko opačné znaménku $f_0(x)$. Ale $f_0(x)$ mění znaménko při přechodu přes každý kořen, t. j. n-krát. Funkce pak $\varphi(x)$ nemůže měnit své znaménko vícekrát než n—1-krát. V důsledku toho $f(x)$ může být mnohočlenem nejméně se odchylujícím od nuly jen tehdy, jestliže $\varphi(x) \equiv 0$.

Zbývá nalézti mnohočlen, mající uvedené dvě vlastnosti. Ukážeme, že funkce

$$f_0(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$$

je hledaným mnohočlenem.

Mění-li se x od -1 do $+1$, mění se $\arccos x$ od $-\pi$ do 0 a v důsledku toho se mění argument kosinu od $-n\pi$ do 0. V tomto intervalu kosinus se stává nulou n-krát (při $\arccos x = \dfrac{-k\pi + \frac{1}{2}\pi}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$). Tato funkce má maximální úchylku od nuly při těch hodnotách x, při nichž se kosinus stává $+1$ nebo -1. V intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$ dosáhne se maximální hodnoty $(n + 1)$-krát (při

*) Jinak by byla jedna z maximálních odchylek $f(x)$ menší než m_0, bylo by tudíž možno v důsledku 2. vlastnosti utvořit mnohočlen odchylující se od nuly o méně než $f_0(x)$.

**) Pro určení součinitelů $a_1, a_2, \ldots a_n$ mnohočlenu $f_0(x)$ a součinitelů $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ mnohočlenu $f_1(x)$ obdrží se rovnice tohoto druhu $f_0(x_k) = f_1(x_n)$, kde x_k jsou hodnoty x, při nichž $f_0(x)$ má maximální velikost.

$\arccos x = -\dfrac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$); absolutní hodnoty všech těchto veličin jsou si rovny: $m_0 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Zbývá ukázat, že mnohočlen $f_0(x)$ je mnohočlen n-tého stupně se součinitelem 1 při x^n.

V důsledku známého vzorce Eulerova

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

tudíž platí

$$f_0(x) = \frac{1}{2n}\,(e^{in\arccos x} + e^{-in\arccos x}).$$

Ale podle Eulerova vzorce

$$e^{i\psi} = \cos\psi + i\sin\psi,$$
$$e^{-i\psi} = \cos\psi - i\sin\psi,$$

pročež

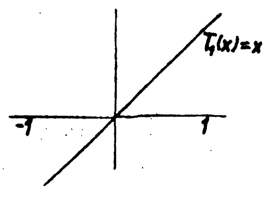
$$e^{i\arccos x} = \cos(\arccos x) + i\sin(\arccos x) = x + i\sqrt{1 - x^2},$$
$$e^{-i\arccos x} = \cos(\arccos x) - i\sin(\arccos x) = x - i\sqrt{1 - x^2}.$$

Protož

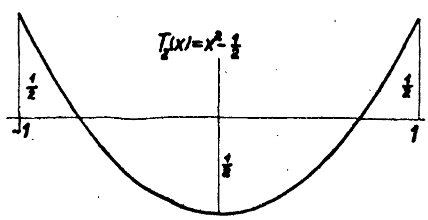
$$f_0(x) = \frac{1}{2^n}\,[(x + i\sqrt{1 - x^2})^n + (x - i\sqrt{1 - x^2})^n] =$$
$$= \frac{2}{2^n}\,[x^n + C_n^2\, x^{n-2}\,(x^2 - 1) + C_n^4 x^{n-4}(x^2 - 1)^2 + \ldots].$$

Odtud vidíme, že $f_0(x)$ je skutečně mnohočlenem n-tého stupně. Zbývá vypočítat součinitel při x^n. Tento se rovná, jak se lehce pochopí,

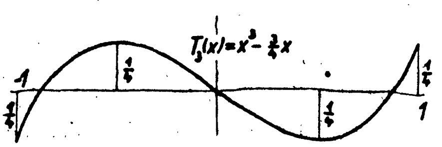
$$\frac{2}{2^n}\,(1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots).$$



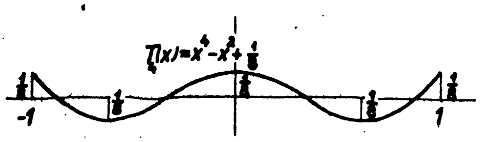
Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.



Obr. 6.

Avšak snadno se vidí, že

$$2(1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots) = (1 + 1)^n + (1 - 1)^n = 2^n$$

a že se tudíž hledaný součinitel rovná jednotce.

Jako příklad uvedeme grafy několika Čebyševových polynomů při malých hodnotách n; omezíme se na případy $n = 1, 2, 3, 4$ (obr. 3—6).

Podotýkáme, že na počest Čebyševovu (ve francouzské transskripci Tschebicheff) jeho polynomy se označují symbolem $T_n(x)$, kde n je řád polynomu.

Přeložil *Q. Vetter,* Praha.