František Nožička
O nadplochách totálně geodetických v Riemannově prostoru. I.

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 78 (1953), No. 1, 65--72

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117066`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

# O NADPLOCHÁCH TOTÁLNĚ GEODETICKÝCH V RIEMANNOVĚ PROSTORU, I

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

(Došlo dne 18. září 1952.) DT: 513.813

Práce je věnována problému zjištění existence totálně geodetických nadploch dimense $n$—1 v obecném Riemannově prostoru dimense $n(n > 2)$ vnořitelném do euklidovského prostoru o dimensi vyšší. V I. části práce jsou uvedeny nutné podmínky pro tuto existenci a tato část je vlastně úvodem k definitivnímu rozřešení problému (t. j. k najití postačujících podmínek integrability příslušných diferenciálních rovnic a methody odvození rovnic hledaných totálně geodetických nadploch).

## 1. Úvod.

Obyčejným Riemannovým prostorem třídy I nazýváme $n$-rozměrný Riemannův prostor $V_n$ vnořitelný do $(n + 1)$-rozměrného euklidovského prostoru $E_{n+1}$ (s positivně definitním metrickým tensorem), který není však vnořitelný do $n$-rozměrného euklidovského prostoru[1]).

Existují-li v daném Riemannově prostoru $V_n$ $(n - 1)$-rozměrné variety $G_{n-1}$ takové, že platí

$$h_{ab} \equiv 0, \quad a, b = 1, 2, \ldots (n - 1) \tag{1,1}$$

v každém bodě těchto variet, při čemž $h_{ab}$ jest jejich druhým metrickým tensorem, potom tyto variety $G_{n-1}$ nazýváme totálně geodetickými nadplochami prostoru $V_n$.

Nechť je dán obyčejný Riemannův prostor $V_n$[2]) třídy I. Naším úkolem bude zkoumat, kdy existují v tomto prostoru $V_n$ $(n - 1)$-rozměrné variety totálně geodetické. Podaný rozbor nebude úplný. Problém bude řešen za těchto předpokladů:

a) Veličiny definující varietu $V_n$ mají spojité parciální derivace podle souřadnic $\xi^\alpha$ ve $V_n$ potřebného řádu.

b) Hodnost druhého metrického tensoru $h_{\alpha\beta}$ ve $V_n$ jest $n$.

---

[1]) *J. A. Schouten - D. J. Struik*: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, Groningen-Batavia, 1938, str. 141.

[2]) $n \geqq 2$.

## 2. Některé vztahy pro obecnou nadplochu $V_{n-1}$ ve $V_n$.

Uvedeme nejdříve některé vztahy, které budeme v dalším potřebovat. Předpoklad, že $V_n$ je Riemannovým prostorem třídy I vede nutně k existenci symetrického tensoru $h_{\alpha\beta}$ ve $V_n$ takového, že platí

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2h_{\delta[\alpha}h_{\beta]\gamma}, \tag{2,1}$$

$$\nabla_{[\alpha}h_{\beta]\gamma} = 0. \tag{2,2}$$

V rovnicích (2,1), (2,2) značí $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$ tensor křivosti prostoru $V_n$[3]), $\nabla_\alpha$ jest symbolický vektor kovariantní derivace příslušný metrické konexi $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}$ z prvého metrického tensoru $g_{\alpha\beta}$ ve $V_n$. Tensor $h_{\mu\lambda}$ jest tak zvaným druhým metrickým tensorem variety $V_n$. Rovnice (2,1), (2,2) jsou známé rovnice Gaussova a Gauss-Codazziho pro $V_n$ vnořenou do euklidovského prostoru $E_{n+1}$[4]).

Je-li $V_{n-1}$ jakákoliv $(n - 1)$-rozměrná nadplocha ve $V_n$ daná parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a), \; \alpha = \dot{1}, \dot{2}, \dots \dot{n}; \; a = 1, 2, \dots n - 1^{5)} \tag{2,3}$$

a zavedeme-li označení $B^\alpha_a \equiv \dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^a}$ (při čemž předpokládáme, že funkce $\xi^\alpha(\eta^a)$ mají v uvažovaném definičním oboru nadplochy $V_{n-1}$ spojité parciální derivace potřebného řádu a hodnost matice $(B^{\dot{1}}_a, B^{\dot{2}}_a, \dots B^{\dot{n}}_a)$, $a = 1, \dots, n - 1$, jest v tomto oboru $n - 1$), potom prvý indukovaný metrický tensor varienty $V_{n-1}$ jest

$$g_{ab} \equiv B^\alpha_a B^\beta_b g_{\alpha\beta}. \tag{2,4}$$

Druhý metrický tensor variety $V_{n-1}$ jed dán rovnicemi

$$h_{ab} \equiv B^\alpha_a \nabla_b t_\alpha, \tag{2,5}$$

kde $t_\alpha$ je tečný vektor variety $V_{n-1}$ ve $V_n$ definovaný rovnicemi

$$B^\alpha_a t_\alpha = 0, \; g^{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta = 1 \tag{2,6}$$

s pevně zvolenou orientací; symbol $\nabla_b$ je symbolický vektor Lagrangeovy derivace[6]) příslušný metrické konexi $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$ ve $V_n$. Normálou variety $V_{n-1}$ je vektor

$$n^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha. \tag{2,7}$$

[3]) Jest $K_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv g_{\delta\varepsilon} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\varepsilon}$, kde $R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\varepsilon} \equiv 2(\partial_{[\alpha}\{ {\varepsilon \atop \beta]\gamma} \} + \{ {\varepsilon \atop [\alpha|\rho|} \}\{ {\rho \atop \beta]\gamma} \})$.

[4]) *J. A. Schouten - D. J. Struik*: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, Groningen-Batavia 1938, str. 142.

[5]) Latinské indexy probíhají vždy v dalším symboly 1, 2, ... $n - 1$, řecké indexy pak 1, 2, ..., $n$.

[6]) t. j. $\nabla_b t_\alpha \equiv \dfrac{\partial}{\partial \eta^b} t_\alpha - \{ {\gamma \atop \alpha\beta} \} B^\beta_b t_\gamma$.

Zaveďme ještě veličiny $B^a_\gamma$ jednoznačně těmito rovnicemi

$$B^a_\gamma B^\gamma_b = \delta^a_b,\ B^a_\gamma n^\gamma = 0 \left(\delta^a_b = \begin{cases} 1 \text{ pro } a = b \\ 0 \text{ pro } a \neq b \end{cases}\right). \tag{2,8}$$

Důsledkem těchto rovnic je vztah

$$B^a_\alpha B^\beta_a = \delta^\beta_\alpha - t_\alpha n^\beta \left(\delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 \text{ pro } \alpha = \beta \\ 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta \end{cases}\right). \tag{2,9}$$

Použijeme též v dalším Gaussovu formuli pro metrickou konexi $\left\{ {c \atop ab} \right\}$ z metrického tensoru $g_{ab}$ (viz 2,4) ve $V_{n-1}$

$$\left\{ {c \atop ab} \right\} B^\gamma_c = h_{ab} n^\gamma + \nabla_a B^\gamma_b \tag{2,10}$$

a rovnici Weingartenovu

$$\nabla_a n^\gamma = B^\gamma_e g^{eb} h_{ba}. \tag{2,11}$$

Z podmínek intergrability rovnic (2,11), (2,10) plyne rovnice Gaussova

$$B^\alpha_a B^\beta_b B^\gamma_c B^\delta_d K_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}'K_{abcd} - 2h_{d[a}h_{b]c} \tag{2,12}$$

a rovnice Gauss-Codazziho

$$B^\alpha_a B^\beta_b B^\gamma_c n^\delta K_{\alpha\beta\gamma\delta} = -2'\nabla_{[a} h_{b]c}{}^{8)},$$

kde $'K_{abcd}$ je tensor křivosti variety $V_{n-1}$[9]) a $'\nabla_a$ symbolický vektor kovariantní derivace příslušný konexi $\left\{ {c \atop ab} \right\}$ z tensoru $g_{ab}$ ve $V_{n-1}$.

## 3. Nutné podmínky pro existenci totálně geodetických nadploch ve $V_n$.

Budeme nyní předpokládat, že existují ve $V_n$ variety $G_{n-1}$ takové, že pro jejich druhý metrický tensor $h_{ab}$ platí vztah

$$h_{ab} \equiv 0 \tag{3,1}$$

v každém bodě z definičního oboru těchto variet.

**Věta 1.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby varieta $V_{n-1}$ byla varietou totálně geodetickou ve $V_n$ (tedy $V_{n-1}$ jest $G_{n-1}$), jest*

$$\nabla_a n^\gamma = 0 \tag{3,2}$$

*v každém bodě této variety.*

Důkaz: Je-li $V_{n-1}$ varietou $G_{n-1}$, potom platí definiční vztah (3,1), což implikuje, podle relace (2,11), ihned vztah (3,2). Platí-li v každém bodě variety $V_{n-1}$ vztah (3,2), potom, vzhledem k tomu, že platí $\nabla_a g^{\gamma\alpha} = 0$, plyne ihned

[7]) $g_{ab}$ je rovněž positivně definitní (viz na př. *F. Nožička*: La connexion et la normale de l'hypersurface dans l'espace Riemannien du point de vue de la géométrïe affine, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. *1.* (76) 1951, str. 18. věta I.

[8]) Viz *J. A. Schouten-D. J. Struik:* Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, Groningen-Batavia 1938, stř. 76, rovnice (9,8).

[9]) Jest $'K_{abcd} = g_{de} R_{abc}^{\cdots e}$, kde $'R_{abc}^{\cdots e} \equiv 2(\partial_{[a} \{ {e \atop b]c} \} + \{ {e \atop [a|r|} \} \{ {r \atop b]c} \})$.

z (2,7): $\nabla_a t_\alpha = 0$, což po vynásobení elementem $B^\alpha_b$ (a sečtením přes $\alpha$) vede právě k (3,1), t. j. k varietě totálně geodetické $G_{n-1}$.

**Věta 2.** *Existuje-li ve $V_n$ totálně geodetická varieta $G_{n-1}$, potom tečný vektor v každém bodě této variety splňuje rovnice*

$$t_\varepsilon t_\vartheta t_\tau T^{\varepsilon\vartheta\tau}_{\gamma\delta\nu} = 0, \tag{3,3}$$

kde

$$T^{\varepsilon\vartheta\tau}_{\gamma\delta\nu} \equiv \delta^\tau_{[\alpha} K_{\gamma\delta]\nu\mu} g^{\varepsilon\alpha} g^{\vartheta\mu} \left(\delta^\tau_\alpha = \begin{cases} 1 \text{ pro } \tau = \alpha \\ 0 \text{ pro } \tau \neq \alpha \end{cases}\right).$$

Důkaz: Existuje-li $G_{n-1}$ ve $V_n$, potom, podle věty 1, platí (3,2) a odtud (podmínka integrability rovnic (3,2))

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]} n^\nu = 0,$$

což vede po provedení naznačených operací ke vztahu

$$B^\alpha_a B^\beta_b n^\mu R_{\alpha\beta\mu}{}^{\gamma} = 0. \tag{3,4}$$

Násobme předchozí vztah veličinou $B^b_\gamma B^a_\delta$ (a sečteme přes $a$, $b$). Dostaneme tak s použitím relace (2,9)

$$B^b_\gamma B^a_\delta B^\alpha_a B^\beta_b n^\mu R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} = (\delta^\beta_\gamma - t_\gamma n^\beta)(\delta^\alpha_\delta - t_\delta n^\alpha) n^\mu R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} =$$
$$= n^\mu R_{\delta\gamma\mu}{}^{\nu} - t_\gamma n^\beta n^\mu R_{\delta\beta\mu}{}^{\nu} - t_\delta n^\alpha n^\mu R_{\alpha\gamma\mu}{}^{\nu} = 0, \tag{3,5}$$

neboť jest

$$t_\delta t_\gamma n^\alpha n^\beta n^\mu R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} = 0$$

podle první identity pro tensor křivosti, t. j. vzhledem k platnosti vztahu $R_{(\alpha\beta)\mu}{}^{\nu} = 0$. S použitím (2,7) se snadno přesvědčíme, že vztahu (3,5) lze dát tento tvar

$$t_\varepsilon t_\vartheta t_\tau \delta^\tau_{[\alpha} R_{\delta\gamma]\mu}{}^{\nu} g^{\varepsilon\alpha} g^{\vartheta\mu} = 0. \tag{3,6}$$

Odtud vynásobením $g_{\nu\sigma}$ a sečtením přes $\nu$ dostaneme právě vztah (3,3).

**Věta 3.** *Nechť $V_n$ je obyčejný Riemannův prostor třídy $I$, $n > 2$. Nechť hodnost druhého metrického tensoru $h_{\mu\lambda}$ prostoru $V_n$ je $n$*[10]*). Potom systém rovnic (3,3) je ekvivalentní se systémem rovnic*

$$h^\lambda_\mu t_\lambda = s t_\mu \quad (h^\lambda_\mu \equiv h_{\mu\alpha} h^{\alpha\lambda}) \tag{3,7}$$

*a to ekvivalentní v tom smyslu, že každé řešení (pro vektor $t_\lambda$) rovnic (3,3) je zároveň řešením rovnic (3,7) a naopak.*

Důkaz: Pro obyčejný Riemannův prostor třídy I platí (2,1) odkud, mechanickým dosazením do (3,3) a úpravou dostaneme

$$n^\mu(h_{\mu\gamma}h_{\delta\nu} - h_{\mu\delta}h_{\gamma\nu}) + t_\gamma n^\alpha n^\mu(h_{\mu\delta}h_{\alpha\nu} - h_{\mu\alpha}h_{\delta\nu}) + t_\delta n^\beta n^\mu(h_{\mu\beta}h_{\gamma\nu} - h_{\mu\gamma}h_{\beta\nu}) = 0 \quad (*)$$

Poněvadž podle předpokladu věty je hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ rovna $n$, můžeme sestrojit jednoznačně kontragradientní tensor $h^{\alpha\gamma}$ k tensoru $h_{\alpha\beta}$ definicí

$$h^{\alpha\gamma} h_{\alpha\beta} = \delta^\gamma_\beta \left(\delta^\gamma_\beta = \begin{cases} 1 \text{ pro } \gamma = \beta \\ 0 \text{ pro } \gamma \neq \beta \end{cases}\right)$$

[10]) T. j. předpoklad b) na str. 1.

a předchozí rovnice (*) násobit tensorem $h^{\delta\nu}$. Dostaneme tak po snadné úpravě

$$(n - 2)n^\mu h_{\gamma\mu} = (n - 2)n^\mu n^\alpha h_{\mu\alpha} t_\gamma$$

a tedy, ježto předpokládáme $n > 2$,

$$n^\mu h_{\gamma\mu} = s t_\gamma, \quad s = n^\mu n^\alpha h_{\mu\alpha} \tag{3,8}$$

Použijeme-li (2,7) a zavedeme-li označení $h^\alpha_\gamma = g^{\alpha\mu} h_{\gamma\mu}$ dostaneme vztah (3,7).

Máme tedy zatím tento výsledek: má-li systém rovnic (3,3) netriviální řešení pro vektor $t_\nu$, potom za předpokladu, že hodnost tensoru $h_{\lambda\nu}$ je $n$, vyhovuje toto řešení rovnicím (3,7). Nemůže mít tedy systém (3,3) více řešení než systém (3,7).

Uvažujme nyní všechna možná netriviální řešení systému (3,7). Budiž $t_\alpha$ libovolné netriviální jeho řešení. Dosaďme nyní vektor $t_\alpha$ vyhovující rovnicím (3,7) do systému (3,3) resp. do jemu ekvivalentnímu systému (*). Vzhledem ke vztahům

$$n^\mu h_{\mu\gamma} = g^{\mu\alpha} h_{\mu\gamma} t_\alpha = h^\alpha_\gamma t_\alpha = s t_\gamma; \quad s = h_{\mu\gamma} n^\mu n^\gamma$$

dostaneme po dosazení do (*)

$$s t_\gamma h_{\delta\nu} - s t_\delta h_{\gamma\nu} + s^2 t_\gamma t_\delta t_\nu - s t_\gamma h_{\delta\nu} + s t_\delta h_{\gamma\nu} - s^2 t_\delta t_\gamma t_\nu = 0,$$

t. j. identitu.

Tedy každé řešení rovnic (3,7) vyhovuje rovnicím (3,3). Nemůže tedy systém (3,3) mít méně řešení než systém (3,7). Shora jsme ukázali, však že systém (3,3) nemůže mít — za předpokladů věty — také více řešení než systém (3,7). Je tedy každé řešení systému (3,7) řešením systému (3.3) a naopak.

Poznámka 1. Otázka po existenci jednorozměrných totálně geodetických variet ve $V_2$ (tedy při $n = 2$) je triviální. V tomto případě jde totiž o geodetické křivky ve $V_2$, při čemž víme, že pro spojitě diferencovatelnou varietu bodem a směrem v tomto bodě je geodetická čára lokálně stanovena. Avšak i zde můžeme si ověřit předchozí vztahy. Snadno si ověříme, že definiční vztah pro tot. geodetické variety (1,1) je v případě křivky $\xi^\nu = \xi^\nu(t)$, $\nu = 1,2$ ve $V_2$ ekvivalentní se vztahem $k = 0$, kde $k$ je křivost křivky ve $V_2$. Tím je však právě charakterisována křivka geodetická ve $V_2$. Podmínka integrability (3,4) pro rovnici (3,2) přejde pak samozřejmě v identitu, čímž je charakterisována úplná integrabilita a tedy existence geodet. čar v každém bodě a směru.

My z dalších našich úvah případ $n = 2$ připomenutý v této poznámce vyloučíme.

**Věta 4.** *Systém rovnic* (3,3) *má za předpokladů vyslovených ve větě 3 vždy reálná netriviální* (*nenulová*) *řešení pro vektor* $t_\alpha$ *a to nejméně v počtu* $n$. *Je-li tento počet právě* $n$, *jsou tyto vektory navzájem kolmé; je-li jich více než* $n$, *pak jich je nekonečně mnoho. V tomto druhém případě je však vždy možno vybrat* $n$ *ortogonálních vektorů, jež řeší uvažovaný systém, a všechna ostatní řešení jsou jejich lineárními kombinacemi.*

Důkaz: Podle věty 3 je systém (3,3) ekvivalentní se systémem (3,7). Systém (3,7) jest však definičním vztahem pro hlavní směry tensoru $h_{\lambda\mu}$ v prostoru $V_n$. Existence nenulového řešení rovnic (3,7) vyžaduje splnění vztahu

$$\text{Determinant} \qquad (h^\lambda_\mu - s\delta^\lambda_\mu) = 0, \qquad (3,8)$$

což je charakteristická rovnice příslušná reálnému symetrickému tensoru $h_{\lambda\mu}$ ve $V_n$. Je nyní známo, že tato rovnice $n$-tého stupně v $s$ má vždy $n$ reálných kořenů $\underset{1}{s}, \underset{2}{s}, \dots \underset{n}{s}$[11]), z nichž není žádný roven nule[12]). Z theorie hlavních směrů je známo[11]), že lze vždy najít $n$ lineárně nezávislých vektorů $\underset{a}{t}_\alpha (a = 1, 2, \dots n)$, vyhovujících rovnicím (3,7) (vzájemně ortogonálních). Jednoduchému kořenu $\underset{a}{s}$ charakteristické rovnice přísluší jednoznačně řešení $\underset{a}{t}_\alpha$, vyhovující rovnici $h^\gamma_\mu \underset{a}{t}_\gamma = \underset{a}{s}\, \underset{a}{t}_\mu$, vícenásobnému kořenu $\underset{a}{s}$ pak nekonečně mnoho vektorů $\underset{a}{t}_\alpha$[11]).

**Věta 5.** *Existuje-li v obyčejném Riemannově prostoru $V_n$ $(n > 2)$ třídy I varieta totálně geodetická $G_{n-1}$, potom normála variety $G_{n-1}$ v každém jejím bodě leží v hlavním směru tensoru $h_{\mu\lambda}$, t. j. normální vektor variety $G_{n-1}$ ve $V_n$ má směr hlavní.*[13])

Důkaz: plyne bezprostředně z vět 2, 3, 4.

Poznámka 2. Položíme-li si otázku po úplné integrovatelnosti rovnic (3,2) při $n > 2$, t. j. otázku, pro jaké variety $V_n$ v $E_{n+1}$ existují v každém jejich bodě a daném $(n-1)$-směru ve $V_n$ totálně geodetické variety $G_{n-1}$, pak tuto otázku lze snadno na základě předchozích úvah zodpovědět. K tomu stačí uvážit toto: Podmínka úplné integrovatelnosti rovnic (3,2) vyžaduje identické splnění rovnic (3,4), (a tedy též (3,3) — kterážto ekvivalence se snadno ověří —) při každé volbě vektoru $t_\alpha$ ve $V_n$. Avšak identické splnění rovnic (3,3) vede podle dřívějších úvah k identickému splnění vztahů (3,7), což vede potom k podmínce $h^\lambda_\mu = s\delta^\lambda_\mu$, nebo, což je totéž, ke vztahům

$$h_{\mu\lambda} = s g_{\mu\lambda} \quad (s \dots \text{skalár ve } V_n). \qquad (3,9)$$

Snadno si též ověříme, že za platnosti vztahů (3,9) přejde podmínka integrability (3,3) v identitu. Z těchto úvah ihned vyplývá, že existují-li variety $V_n$

---

11) *J. A. Shouten - D. J. Struik*: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, Groningen-Batavia, 1938, str. 36.

12) Kdyby totiž nějaký kořen $\underset{a}{s}$ rovnice (3,8) byl roven nule, potom rovnice (3,7) pro tuto nulovou hodnotu $\underset{a}{s}$ by se redukovala na tvar

$$h_{\mu\lambda} \underset{a}{n}^\lambda = h^\alpha_\mu \underset{a}{t}_\alpha = 0.$$

Poněvadž podmínka (3.8) je postačující podmínkou pro existenci nenulového řešení $\underset{a}{t}_\lambda$, plynulo by odtud nutně, že $h_{\mu\lambda}$ má hodnost menší než $n$, což je ve sporu s předpokladem věty.

13) Podle předpokladu je hodnost tensoru $h_{\mu\lambda}$ rovna $n$.

v $E_{n+1}$, v nichž v každém jejich bodě při libovolně daném $(n - 1)$-směru v nich ležícím existují totálně geodet. variety $G_{n-1}$, potom pro tyto variety musí platit vztah (3,9). Z podmínek integrability rovnic (3,9) a rovnic (2,2) plyne pak

$$\nabla_{[\alpha}(g_{\mu]\lambda}s) = 0,$$

t. j. po rozepsání

$$g_{\lambda[\mu}\partial_{\alpha]}s = 0, \tag{3,10}$$

neboť

$$\nabla_\alpha s \equiv \partial_\alpha s, \; \nabla_\alpha g_{\lambda\mu} \equiv 0.$$

Násobením vztahu (3,10) tensorem $g^{\alpha\lambda}$ dojdeme k podmínce

$$\delta^\alpha_{[\mu} \, \partial_{\alpha]}s = 0,$$

t. j.

$$\partial_\mu s - n \, \partial_\mu s = 0,$$

z čehož vyplývá $s =$ konst. Obráceně, je-li $s$ konstantní, pak podmínky integrability rovnic (3,9) přejdou v identitu. Máme tedy tento všeobecně známý výsledek: *V $E_{n+1}$ existují variety $V_n$*[13]*, jejichž každým bodem při libovolně daném $(n - 1)$-směru v tomto bodě* (směru ležícím ve $V_n$) *procházejí totálně geodetické variety $G_{n-1}$ ležící ve $V_n$ a obsahující daný $(n - 1)$-směr. Variety $V_n$ mají pak tu vlastnost, že pro ně platí vztah*

$$h_{\alpha\beta} = c g_{\alpha\beta} \quad (c = \text{konst.} \neq 0).$$

Jsou to, jak je známo, *hypersféry* dimense $n - 1$ v $E_{n+1}$.

Poznámka 3. Z věty 5 je zřejmé, že otázka existence totálně geodetických nadploch $G_{n-1}$ ve $V_n$ souvisí úzce s otázkou kongruencí hlavních čar ve $V_n$ a s existencí nadploch dimense $n - 1$ kolmých ke kogruenci čar hlavních. Proto bude kongruencím hlavních čar věnována pozornost v dalších částech práce. Případy popsané v poznámce 1 a 2 vyloučíme jako známé z dalších našich úvah.

Poznámka 4. Dodatkem k této první části práce podejme ještě geometrický význam definičních rovnic (1,1) pro nadplochy totálně geodetické dimense $n - 1$ ve $V_n$.

Existuje-li totiž ve $V_n$ nadplocha $G_{n-1}$ s parametrickými rovnicemi $\xi^\nu = \xi^\nu(\eta^a)$, $\nu = 1, \dots n$; $a = 1, \dots n - 1$, pro niž platí (1,1), potom pro tuto nadplochu se vztah (2,10) redukuje na tvar

$$\nabla_a B^\nu_b = \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} B^\nu_c. \tag{3,11}$$

Budiž nyní $\eta^a = \eta^a(t)$ rovnice nějaké geodetické křivky v $G_{n-1}$ s tečným vektorem $v^a \equiv \dfrac{d\eta^a}{dt}$ v $G_{n-1}$. Složky tohoto tečného vektoru ve $V_n$ jsou $v^\alpha = B^\alpha_a v^a$. Tuto geodetickou čáru můžeme popsat jakožto útvar ve $V_n$ rovnicemi $\xi^\nu = \xi^\nu(\eta^a(t))$. Platí nyní vzhledem k (3,11)

$$\nabla_t v^\alpha = \nabla_t (B^\alpha_a v^a) = v^b v^a \nabla_b B^\alpha_a + B^\alpha_c \frac{d}{dt} v^c =$$

$$= v^b v^a \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} B^\alpha_c + B^\alpha_c \frac{d}{dt} v^c = B^\alpha_b \nabla_t v^c. \qquad (3,12)$$

Poněvadž podle předpokladu je křivka geodetickou v $G_{n-1}$, platí pro ni

$$'\nabla_t v^c = f(t) v^c, \qquad (3,13)$$

kde $f(t)$ je nějaký skalár. Z (3,12), (3,13) plyne však

$$\nabla_t v^\alpha = B^\alpha_c f(t) v^c = f(t) v^\alpha$$

což značí, že křivka je geodetickou též ve $V_n$.

Tedy pro plochu tot. geodetickou $G_{n-1}$ ve $V_n$ je každá geodetická křivka v $G_{n-1}$ též geodetickou ve $V_n$. Zvolíme-li v $G_{n-1}$ bod a v něm uvažujeme $(n - 1)$-dimensionální nadrovinu v $E_{n+1}$ odpovídající tečnému vektoru variety $G_{n-1}$ ve $V_n$, potom všechny geodetické křivky ve $V_n$, jichž tečné vektory v uvažovaném bodě leží v této nadrovině, leží v $G_{n-1}$. Naše analytická definice tot. geodetické variety $G_{n-1}$ ve $V_n$ odpovídá tedy synthetické definici, jak ji zavádí na př. É. Cartan[14]).

(Pokračování.)

[14]) *É. Cartan*: *Leçons sur le géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris 1928, str. 119—123, Cap. 5, odst. 2.