

Vasilij Antonovič Golubev

Zobecnění funkcí $\varphi(n)$ a $\pi(x)$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 1, 47--48

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117061>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1953

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ZOBECNĚNÍ FUNKCÍ $\varphi(n)$ a $\pi(x)$

V. A. GOLUBĚV, Kuvšinovo, SSSR.

(Došlo dne 11. listopadu 1952.)

DT: 511.214

1. Při práci nad problémem „dvojčat“ jsem dostal následující zobecnění známé Eulerovy číselně theoretické funkce $\varphi(n)$. Necht funkce $\varphi_s(n)$ vyjadřuje počet párů přirozených čísel a_1, a_2 , která jsou nesoudělná s n a která mají pevný rozdíl $a_2 - a_1 = s$, při čemž menší z čísel každého páru nepřevyšuje n . Lehce se dokáže, že $\varphi_s(n)$ je multiplikativní funkce a že platí

$$\varphi_s(n) = n \prod_{p_1, p_2} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{2}{p_2}\right), \quad (1)$$

kde p_1 jsou společní prvočíselní dělitele čísel n a s , p_2 ostatní dělitele n .

2. Necht $\varphi^{(m)}(n)$ vyjadřuje počet skupin z m přirozených čísel

$$a_1, a_2, \dots, a_m,$$

nesoudělných s n , při čemž jsou pevně dány (sudé kladné) rozdíly

$$a_2 - a_1 = s_1, a_3 - a_2 = s_2, \dots, a_m - a_{m-1} = s_{m-1}$$

a kde kromě toho $a_1 \leq n$.

Funkce $\varphi^{(m)}(n)$ je multiplikativní; její hodnota je dána formulí

$$\varphi^{(m)}(n) = n \prod_{p_1, \dots, p_m} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{m}{p_m}\right), \quad (2)$$

kde p_j jsou všechna prvočísla, která dělí n a která mají tu vlastnost, že skupina

$$0, s_1, s_1 + s_2, \dots, s_1 + s_2 + \dots + s_{m-1}$$

obsahuje nejvýš j čísel, z nichž žádná dvě nejsou spolu kongruentní (mod p_j); p_1 jsou tedy společní prvočíselní dělitele n a všech $s, \dots, p_m$ jsou prvočíselní dělitele pouze n , ale žádného s a žádného ze součtů libovolného počtu za sebou jdoucích rozdílů $s_k + s_{k+1} + \dots + s_{k+l}$.

3. Slovem „dvojče“ rozumějme prvočíslo p takové, že číslo $p + 2$ je opět prvočíslo. Necht funkce $\pi_2(x)$ vyjadřuje počet „dvojčat“ nepřevyšujících x .

Methodou „Eratosthenova síta“ můžeme získat tabulku „dvojčat“ od 1 do x (předpokládáme $x > 2$). Vyškrtneme z řady $1, 2, \dots, [x]$ všechna sudá

čísla; dále vyškrtneme čísla $y \equiv 0 \pmod{p}$ a $y \equiv -2 \pmod{p}$, kde p jsou lichá prvočísla nejvýš rovná $\sqrt{x}$. Snadno zjistíme, že nám zbudou „dvojčata“ od $\sqrt{x}$ do x ; existuje-li pak liché prvočíslo $p \leq x$ takové, že číslo $p + 2$ je úplný čtverec a že je $p + 2$ větší než x , zbude nám i číslo p (a pro $x < 9$ zbude také číslo 1). Škrtneme-li ještě toto p , pokud existuje (a event. číslo 1), a přidáme-li „dvojčata“ od 1 do $\sqrt{x}$, dostaneme hledanou tabulku.

Stejnou methodou najdeme vzorec pro $\pi_2(x)$, analogický Legendreově vzorci pro $\pi(x)$. Jsou-li totiž $A_1, A_2, \dots, A_m$ konečné množiny a je-li $c_{i_1 i_2 \dots i_r}$ počet prvků průniku $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}$, pak je

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq m} c_{i_1} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} c_{i_1 i_2} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} c_{i_1 i_2 i_3} - \dots \pm c_{i_1 i_2 \dots m}$$

počet prvků sjednocení $A_1 + A_2 + \dots + A_m$. Odtud plyne pro $x \geq 9$ vzorec

$$\begin{aligned} \pi_2(x) = [x] - \left[\frac{x}{2} \right] + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \sum_{2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r} \left[\frac{x + a_{i_1 i_2 \dots i_r}^{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)}}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_r}} \right] + \\ + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r+1} \sum_{2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r} \left[\frac{x + a_{i_1 i_2 \dots i_r}^{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)}}{2 p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_r}} \right] + \\ + \pi_2(\sqrt{x}) - \eta(x), \end{aligned} \quad (3)$$

kde $p_1, \dots, p_n$ je prvních n prvočísel v přirozeném pořadí, p_n je největší prvočíslo, nepřevyšující $\sqrt{x}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$ je libovolná r -členná skupina, sestavená z nul a dvojek, a kde číslo $a_{i_1 i_2 \dots i_r}^{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)}$ je nejmenší nezáporné řešení r kongruencí

$$y \equiv \varepsilon_j \pmod{p_j} \quad (j = 1, 2, \dots, r);$$

číslo $\eta(x)$ je rovno nule, jestliže neexistuje prvočíslo p tak, aby platilo $p \leq x < p + 2$ a aby $p + 2$ bylo úplným čtvercem; jinak je $\eta(x)$ rovno jedné.

Analogické výrazy dostaneme i pro funkce $\pi_s(x)$, vyjadřující počet párů prvočísel s daným sudým rozdílem s , z nichž první není větší než x .