Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Novotný

O representaci uspořádaných množin

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 4, 426--431

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117055`

pracovní hypothesy a upozorňovat techniky na úskalí matematiky, na to, že příliš bezstarostné zacházení s matematikou může vésti k omylům. Je třeba ukázat toto nebezpečí na technických problémech, kdy je možno přijíti k nesprávným závěrům. Při tom ovšem tyto případy nesmí být matematickými kuriositami.

2. Bezpodmínečné vnucování nejvyšší matematické přesnosti technikům může vésti k značným obtížím.

3. Měli by být vychováváni matematici s technickou intuicí, kteří by s pochopením četli technické práce a nebáli se řešit technické problémy ne zcela matematicky korektní cestou ve spolupráci s techniky s matematickým pochopením. Tito technikové by měli být rovněž zvlášť vychováváni a tvořili by aktivní spojku mezi technikou a matematikou a aplikovaná matematika by spojovala techniky s ryze theoretickou matematikou.

O REPRESENTACI USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

(Referát o přednášce Dr *Miroslava Novotného*, proslovené 6. března 1952 v Brně.)

V této přednášce se budeme zabývati uspořádanými množinami. Množina M se nazývá *částečně uspořádaná*, jestliže je v ní definována relace $x \leqq y$, která má tyto vlastnosti: 1. $x \leqq x$, 2. $x \leqq y, y \leqq z \Rightarrow x \leqq z$, 3. $x \leqq y$, $y \leqq x \Rightarrow x = y$. Místo relace $x \leqq y$ píšeme také $y \geqq x$. Je-li $x \leqq y, x \neq y$, píšeme $x < y$. Když pro nějakou dvojici prvků x, y neplatí ani $x \leqq y$ ani $y \leqq x$, pak říkáme, že prvky x, y jsou *nesrovnatelné*, a píšeme $x \parallel y$ nebo $y \parallel x$.

Příklad: Buď P libovolná množina. Označme $\Phi(P)$ libovolný systém jejích podmnožin. Definujeme relaci $\leqq$ v systému $\Phi(P)$ takto: pro X, $Y \in \Phi(P)$ platí $X \leqq Y$, když a jen když $X \subset Y$. Snadno se dokáže, že množina $\Phi(P)$ je tímto způsobem částečně uspořádána. Když na př. $\Phi(P)$ je systém všech jednobodových množin v P, pak libovolné dvě množiny tohoto systému jsou nesrovnatelné.

Množina M se nazývá *úplně uspořádaná*, když je uspořádána částečně a nad to relace uspořádání $\leqq$ splňuje ještě axiom 4: Pro každé dané $x, y \in M$ platí buďto $x \leqq y$ nebo $y \leqq x$. V úplně uspořádané množině tedy není nesrovnatelných prvků.

Příklad: Interval $\langle 0, 1 \rangle$ je množina úplně uspořádaná, jestliže jeho prvky srovnáme podle velikosti. Jiný příklad: Množina všech celých čísel uspořádaných podle velikosti.

Jednu a touž množinu lze uspořádati různými způsoby, jak ukazuje tento příklad: Buď ϑ libovolně dané ordinální číslo a buď M množina všech (ev. transfinitních) posloupností typu ϑ utvořených z čísel 0, 1, ..., n. Prvky množiny M jsou tedy všechny posloupnosti $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots$ ($\lambda < \vartheta$), kde $x_\lambda = 0, 1, 2, \dots, n$. Volíme-li $\vartheta = \omega_0$, kde ω_0 je první nekonečné ordinální číslo, pak množina M je tvořena všemi nekonečnými posloupnostmi utvořenými z čísel $0, 1, \ldots, n$.

Tuto množinu M lze uspořádat na př. takto: Řekneme, že $x_0x_1 \ldots x_\lambda \ldots$ $\ldots (\lambda < \vartheta) \leqq y_0y_1 \ldots y_\lambda \ldots (\lambda < \vartheta)$, když a jen když $x_\lambda \leqq y_\lambda$ pro každé $\lambda < \vartheta$. Snadno se vidí, že množina M je tímto způsobem uspořádána částečně; při tom existují v M nesrovnatelné prvky. Na př. prvky $10\ldots$ a $01\ldots$ jsou nesrovnatelné, ať na ostatních místech označených tečkami stojí cokoliv. Právě popsané pravidlo uspořádání systému posloupností budeme pro stručnost označovat jako pravidlo (a).

Množinu M všech posloupností typu ϑ utvořených z čísel $0, 1, 2, \ldots, n$ lze však uspořádat také jinak: Řekneme, že $x_0x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \vartheta) <$ $< y_0y_1 \ldots y_\lambda \ldots (\lambda < \vartheta)$, když existuje $\delta < \vartheta$ tak, že $x_\lambda = y_\lambda$ pro $\lambda < \delta$ avšak $x_\delta < y_\delta$. Snadno se přesvědčíme, že při tomto uspořádání je M uspořádáno úplně, t. j. libovolné dvě posloupnosti jsou srovnatelné. Toto uspořádání se nazývá *lexikografické*. Na př.: Platí $10\ldots > 01\ldots$, ať na místech označených tečkami stojí cokoli.

Buď dána úplně uspořádaná množina M, buďte A, B její dvě podmnožiny takové, že $A < B$, t. j. každý prvek z A je před každým prvkem z B. Řekneme, že tyto dvě podmnožiny jsou v M *sousední*, jestliže neexistuje prvek $x \in M$ tak, že $A < x < B$. Dvojice sousedních podmnožin $A < B$ v M taková, že $A \cup B = M$, se nazývá *řez* v množině M. Když v M neexistuje prvek $x < A$, řekneme, že M je *koiniciální* s A, podobně, když v M neexistuje prvek $y > B$, řekneme, že M je *konfinální* s B.

Dvě částečně uspořádané množiny M, M_1 nazýváme *isomorfními*, jestliže existuje prosté zobrazení f množiny M na množinu M_1 tak, že $x \leqq y$ v M implikuje $f(x) \leqq f(y)$ v M_1 a $f(x) \leqq f(y)$ v M_1 implikuje $x \leqq y$ v M. Je to zobrazení, jež zachovává všecky relace včetně nesrovnatelnosti. Isomorfní úplně uspořádané množiny se nazývají *podobné*.

Hlavní problém, kterým se budeme zabývati, je tento: *Zda ke každé úplně uspořádané množině existuje ordinální číslo ϑ a systém posloupností typu ϑ utvořených z čísel $0, 1, \ldots, n$ uspořádaný lexikograficky tak, aby obě množiny byly podobné.* Stručněji řečeno, zda lze každou uspořádanou[1]) množinu *representovat* posloupnostmi z čísel $0, 1, \ldots, n$ uspořádanými lexikograficky. Ukážeme, že odpověď na tuto otázku je kladná; zároveň si všimneme, jak v literatuře probíhaly pokusy snížit n a ϑ na nejmenší možná ordinální čísla. V závěru rozšíříme své úvahy i na množiny částečně uspořádané.

Kladné řešení problému podal F. Hausdorff v knize *Grundzüge der Mengenlehre* (1914). Značí-li ω_ξ libovolné regulární počáteční ordinální číslo, pak symbol η_ξ značí množinu všech lexikograficky uspořádaných posloupností typu ω_ξ utvořených z čísel $0, 1, 2$ s touto vlastností: v každé posloupnosti $x_0x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \omega_\xi)$ existuje $\delta < \omega_\xi$ tak, že od něho počínaje

[1]) Úplně uspořádané množiny nazývám dále stručně uspořádanými množinami.

jsou všechna $x_\lambda = 1$. Na př. pro $\xi = 0$ jest 010101... příkladem posloupnosti, jež do η_0 nepatří, kdežto 20110 1111... tam patří. Snadno se vidí, že η_ξ je koiniciální s posloupností 1111...; 0111...; 0011...; 0001...; ... typu ω_ξ^*, t. j. typu inversně uspořádaného k typu ω_ξ. Podobně je η_ξ konfinální s množinou typu ω_ξ. Libovolný řez v této množině má buďto dolní skupinu konfinální s množinou typu ω_ξ nebo horní koiniciální s množinou typu ω_ξ^*. Celkem tedy je možno říci, že η_ξ není konfinální ani koiniciální s množinou mohutnosti $< \aleph_\xi$, ani v ní neexistuje dvojice sousedních podmnožin o mohutnosti $< \aleph_\xi$. Hausdorff dokázal tuto větu: *Množina η_ξ obsahuje podobnou množinu ke každé uspořádané množině o mohutnosti $\aleph_\xi$.*

Důkaz: Buď $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_\alpha, \ldots\}$ $(\alpha < \omega_\xi)$ množina o mohutnosti $\aleph_\xi$, jejíž prvky jsou srovnány do posloupnosti typu ω_ξ bez ohledu na své uspořádání. Buď $B = \eta_\xi$; zvolme libovolně $b_0 \in B$ a přiřaďme je k a_0. Dejme tomu, že jsme k prvkům $a_0, a_1, \ldots, a_\lambda, \ldots$ $(\lambda < \alpha < \omega_\xi)$ již přiřadili prvky $b_0, b_1, \ldots, b_\lambda, \ldots$ $(\lambda < \alpha < \omega_\xi)$ tak, že $b_\lambda \in B$ a uspořádání obou posledních množin je podobné. Prvek a_α je buď před všemi a_λ nebo za nimi nebo v nich definuje řez. Máme ukázat, že v B existuje v prvém případě prvek b_α před všemi b_λ, v druhém případě za nimi a v třetím případě že existuje prvek b_α, který zapadne mezi prvky b_λ tak, jako prvek a_α mezi prvky a_λ. To však je správné, neboť množina $b_0, b_1, \ldots, b_\lambda, \ldots$ $(\lambda < \alpha)$ má mohutnost $< \aleph_\xi$; není tedy množina B s touto množinou konfinální ani koiniciální, takže jak před ní tak za ní jsou prvky z B. Nechť konečně $B' \cup B''$ je řez v množině $b_0, b_1, \ldots, b_\lambda, \ldots$ $(\lambda < \alpha)$, jenž odpovídá řezu v množině $a_0, a_1, \ldots, a_\lambda, \ldots$ $(\lambda < \alpha)$ vytvořenému prvkem a_α. Pak horní i dolní skupina řezu mají mohutnost $< \aleph_\xi$, takže nejsou sousední. Existuje tedy mezi nimi prvek b_α. Tedy lze prvek b_α sestrojit pro každé $\alpha < < \omega_\xi$.

Dosud jsme předpokládali, že ω_ξ je regulární ordinální číslo. Není-li ω_ξ regulární, je regulární $\omega_{\xi+1}$. Snadno se vidí, že každá množina o mohutnosti $\aleph_\xi$ je podobná jisté podmnožině v $\eta_{\xi+1}$. Odtud tedy plyne řešení našeho problému: *Každá uspořádaná množina o mohutnosti $\aleph_\xi$ ($\aleph_\xi$ libovolná nekonečná mohutnost) je podobna jistému systému transfinitních posloupností typu ϑ utvořených z čísel* 0, 1, 2 *a uspořádaných lexikograficky; přitom ϑ je vhodné regulární počáteční ordinální číslo.*

W. Sierpiński dokázal v roce 1949 (*Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. XXXVI, 1949), že čísla 0, 1, 2 v Hausdorffově větě lze nahraditi čísly 0, 1. Dokázal větu: *Každá uspořádaná množina mohutnosti $\aleph_\nu$ je podobna jistému systému transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných lexikograficky.* Zároveň ukázal, že typ ω_ν se obecně snížit nedá, t. j. existují uspořádané množiny mohutnosti $\aleph_\nu$, jež se nedají representovat posloupnostmi typu $< \omega_\nu$. Taková je na př. množina typu ω_ν.

Tyto dva výsledky dokazují, že problém se dá řešit kladně a při tom lze vystačit při tvoření posloupností s dvěma čísly 0, 1. Dále ovšem tento počet snížit nelze. Pokud se týká typu representujících posloupností, dokázal Sierpiński, že pro množinu o mohutnosti $\aleph_\nu$ je tento typ $\leqq \omega_\nu$. Jsou známy příklady, kdy tento typ posloupností je $< \omega_\nu$.

Analogickými problémy týkajícími se uspořádaných kontinuí se zabýval J. NOVÁK. *Uspořádaným kontinuem* rozumíme uspořádanou množinu s prvním a posledním prvkem, jež nemá mezer ani skoků, t. j. v níž každý řez má tuto vlastnost: buďto horní skupina má nejmenší prvek a dolní nemá největší, nebo dolní skupina má největší prvek a horní nemá nejmenší. Dokázal, že typ representujících posloupností souvisí s tak zvanou separabilitou uspořádaného kontinua. Tento pojem je zaveden takto: Buď M uspořádaná množina, $H \subset M$ její podmnožina. Řekneme podle Hausdorffa, že H je *hustá v* M, když ke každé dvojici prvků a, $b \in M$, $a < b$, existuje dvojice prvků $a', b' \in H$ tak, že $a \leqq a' < b' \leqq b$. Minimum mohutností hustých podmnožin v M nazval Novák *separabilitou* množiny M. Novák pak dokázal tuto větu: *Buď C uspořádané kontinuum o separabilitě $\mathfrak{m}$. Pak C je podobno jistému systému transfinitních posloupností nul a jedniček typu ϑ uspořádaných lexikograficky, kde ϑ je nějaké vhodné ordinální číslo o mohutnosti* $\leqq \mathfrak{m}$. Důkaz této věty podal Novák v práci *On partition of an ordered continuum*, jež vyjde v časopise *Fundamenta Mathematicae*. Dospívá k tomuto výsledku takto: Volí v uspořádaném kontinuu C hustou podmnožinu H o mohutnosti $\mathfrak{m}$ a provádí t. zv. *postupné dělení* kontinua C: Vybere libovolný bod z H uvnitř C. Tím se C rozpadne ve dva sousední uzavřené intervaly I_0, I_1. Volme v každém z nich další bod z H a dostaneme další intervaly $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$; ke všem těmto intervalům počítáme jejich krajní body. Dále postupujeme transfinitně. Když jsme již sestrojili všechny intervaly $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ $(\xi < \lambda)$ pro všechna $\lambda < \alpha$, kde $i_\xi = 0$ nebo $= 1$, definujme intervaly $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ $(\xi < \alpha)$ takto: je-li α isolované, vybereme uvnitř každého intervalu $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ $(\xi < \alpha - 1)$ dělicí bod z množiny H; ten rozdělí interval $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ $(\xi < \alpha - 1)$ ve dva intervaly $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots 0}$ a $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots 1}$ $(\xi < \alpha)$. Jestliže α je limitní ordinální číslo, utvoříme všechny průniky $\bigcap_{\lambda < \alpha} I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ $(\xi < \lambda)$. Každý z těchto průniků je uzavřený interval nebo bod; v prvním případě jej označme $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ $(\xi < \alpha)$. Číslo α nazveme *řádem intervalu* $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ $(\xi < \alpha)$. Pokračujeme v této konstrukci až do jistého minimálního ordinálního čísla ϑ, pro něž neexistuje žádný interval řádu ϑ. Toto číslo ϑ nazveme *řádem dělení*. Snadno se vidí, že jest $\bar{\vartheta} \leqq \mathfrak{m}$. V každém intervalu je totiž vybrán právě jeden dělicí bod z množiny H, takže systém všech intervalů má mohutnost $\leqq \mathfrak{m}$. Kdyby bylo $\bar{\vartheta} > \mathfrak{m}$, byla by mohutnost systému všech intervalů daného dělení $> \mathfrak{m}$ a to je spor. Každý bod v C je nyní průnikem jistého monotonního systému intervalů $\bigcap_{\lambda < \alpha} I_{x_0 x_1 \dots x_\xi \dots}$ $(\xi < \lambda)$. Snadno se vidí, že

$$I_{x_0 x_1 \ldots x_\xi \ldots} \; (\xi < \lambda) \supset I_{x_0' x_1' \ldots x_\xi' \ldots} \; (\xi < \lambda'),$$

když a jen když

$$\lambda' \geqq \lambda \text{ a } x_\xi = x_\xi' \text{ pro } \xi < \lambda.$$

Tedy všechny tyto intervaly definují svými indexy posloupnost $x_0 x_1 \ldots x_\xi \ldots$ ($\xi < \alpha$) typu $\leqq \vartheta$. Lexikografické uspořádání těchto posloupností je podobno uspořádání kontinua C.

Prof. Novák mi pak položil problémy, zda lze typ těchto posloupností snížit na počáteční ordinální číslo mohutnosti separability a zda lze řád dělení snížit na toto číslo. Odpověď na obě otázky je kladná; to jsem dokázal v práci *Sur la représentation des ensembles ordonnés*, jež vyjde v časopise *Fundamenta Mathematicae*. Platí dokonce tato věta: *Každá uspořádaná množina o separabilitě $\aleph_\nu$ je podobna jistému systému transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν při lexikografickém uspořádání.* Důkaz tohoto tvrzení spočívá na tomto principu: Označme podle Sierpińského U_{ω_ν} množinu všech posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádanou lexikograficky: Vyberme v množině M o separabilitě $\aleph_\nu$ hustou podmnožinu o mohutnosti $\aleph_\nu$. K ní existuje podle Sierpińského věty podobná podmnožina H_1 v množině U_{ω_ν}. Ostatní prvky v M, jsou-li jaké, definují mezery v H, t. j. řezy, v nichž horní skupina nemá nejmenší a dolní skupina nemá největší prvek. Každé mezeře v H odpovídá mezera v H_1. Tyto mezery lze vyplnit prvky z U_{ω_ν}, jež pak odpovídají prvkům z $M - H$.

Pokud se týče druhého problému, dokázal jsem, že odpověď je kladná. Dokázal jsem však více: *Je-li uspořádané kontinuum podobno nějakému systému posloupností nul a jedniček typu ϑ při lexikografickém uspořádání, existuje dělení řádu $\leqq \vartheta$.* Z důkazu Novákovy věty, jak jsem jej zde uvedl, plyne rovněž silnější tvrzení: *Je-li ϑ řád dělení kontinua C, pak se dá C representovat posloupnostmi nul a jedniček typu $\leqq \vartheta$.* Odtud snadno vychází: *Minimum řádu dělení kontinua C a minimum typu representujících posloupností jsou tatáž ordinální čísla.*

Položil jsem si problém, do jaké míry lze tyto úvahy převést na množiny částečně uspořádané. Výsledek je obsažen v práci *O representaci částečně uspořádaných množin posloupnostmi nul a jedniček*, jež vyjde v tomto časopise. Východiskem mých úvah byla tato Birkhoffova věta z knihy *Lattice theory* (1940, 1948): *Každá částečně uspořádaná množina P je isomorfní s jistým systémem $\Phi(P)$ podmnožin v P uspořádaných podle inkluse.* Důkaz je velmi prostý: Ke každému prvku $x \in P$ přiřadíme jeho *normální uzávěr*, t. j. podmnožinu $f(x)$ skládající se ze všech prvků $t \in P$ pro něž $t \leqq x$. Systém $\Phi(P)$ všech $f(x)$ je zřejmě isomorfní s množinou P. Na základě této věty jsem dokázal tuto větu: *Každá částečně uspořádaná množina o mohutnosti $\aleph_\nu$ je podobna jistému systému transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných podle pravidla* (a). Důkaz: Buď

$u_0 u_1 \ldots u_\lambda \ldots$ ($\lambda < \omega_\nu$) posloupnost všech prvků množiny P bez ohledu na uspořádání. Nechť k prvku $x \in P$ patří normální uzávěr $M \in \Phi(P)$. Přiřaďme k prvku x posloupnost $x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots$ ($\lambda < \omega_\nu$), kde $x_\lambda = 1$, když $u_\lambda \in M$, a $x_\lambda = 0$, když $u_\lambda \in P - M$. Snadno se dokáže, že toto přiřazení posloupností k prvkům množiny P je isomorfismus, jsou-li posloupnosti uspořádány podle pravidla (a).

Jestliže množina P je uspořádána úplně, pak také systém přiřazených posloupností typu ω_ν je uspořádán úplně podle pravidla (a). Zřejmě se však v tomto případě uspořádání podle pravidla (a) kryje s uspořádáním lexikografickým. Vyplývá odtud tedy jako důsledek věta Sierpińského.

Řekneme, že prvek x částečně uspořádané množiny P je *maximální*, když neplatí $t > x$ pro žádné $t \in P$; podobně se definuje prvek *minimální*. Řekneme dále, že prvek x, jenž není ani maximální ani minimální, má *vlastnost* (α), když k němu existuje $y \in P$, $y \lesseqgtr x$ tak, že $y \leqq t$ pro každé t, pro něž $x \leqq t$. Podobně definujeme *vlastnost* (β). Řekneme nyní, že podmnožina $H \subset P$ je hustá v P, jestliže obsahuje všechny prvky maximální, minimální, všechny prvky s vlastností (α) nebo (β) a jestliže ke každému $a < b$, $a, b \in P$ existují prvky a', $b' \in H$ tak, že $a \leqq a' < b' \leqq b$. Minimum mohutností hustých podmnožin v P nazýváme *separabilitou* P. Analogicky jako u množin úplně uspořádaných jsem dokázal větu: *Každá částečně uspořádaná množina o separabilitě* $\aleph_\nu$ *je podobna jistému systému transfinitních posloupností nul a jedniček typu* ω_ν *uspořádaných podle pravidla* (a). Tato věta je ze všech dosud uvedených nejobecnější, neboť z ní plynou všechny dosud uvedené věty kromě Birkhoffovy a věty o rovnosti minima řádu dělení a minima typu representujících posloupností uspořádaného kontinua.

Uvedené výsledky vedou na další problémy. V semináři prof. Nováka o uspořádaných prostorech se podrobně zkoumají uspořádaná kontinua a mezi jiným také vztah minima mohutnosti řádu dělení k jiným charakteristikám uspořádaného kontinua. Dále se zdá, že bude potřeba podrobit analyse pojem husté podmnožiny v částečně uspořádané množině a zkoumat otázku, zda lze typ representujících posloupností snížit.

Závěrem lze říci, že problém, jehož první řešení podal Hausdorff téměř před čtyřiceti lety, je stále ještě podnětný. Již to svědčí o jeho závažnosti a ceně.