RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

A) ČLÁNKY

Eduard Čech: **Projektivní diferenciální geometrie korespondencí mezi dvěma prostory I-V.** Časopis ruský **77** (1952), str. 91 až 188.

Český výtah článku I byl již uveřejněn v *Časopise pro pěstování matematiky a fysiky*, roč. **74** (1949), str. 46—48, článku II tamtéž, roč. **75** (1950), str. 135—136, článku III tamtéž, roč. **75** (1950), str. 157—158. V následujícím podám stručný obsah článků IV a V.

Článek IV se rozpadá na dvě části. V prvé části běží o problém asymptotické transformace přímkové kongruence L trojrozměrného prostoru S_3 v přímkovou kongruenci L' prostoru S_3'. To znamená takovou bodovou transformaci prostoru S_3 v prostor S_3', při které každá přímka kongruence L přejde v přímku kongruence L' a mimo to platí, že je-li R zcela libovolná zborcená plocha prostoru S_3 složená z přímek kongruence L, a je-li R' obraz plochy R při uvažované transformaci, potom vždy obrazem každé asymptotické křivky plochy R je asymptotická křivka plochy R'. Ukazuje se, že řešením tohoto problému jsou přesně ty korespondence mezi prostory S_3 a S_3', které byly nalezeny při řešení zcela jiného problému v článku III. Ve druhé části článku IV se na základě theorie K-linearisujících transformací, vyložené v článku I, dospívá k novému typu transformace přímkové kongruence L v přímkovou kongruenci L', který se v případě kongruencí se dvěma různými fokálními plochami dá geometricky charakterisovat takto: Každá přímka p kongruence L přejde v příslušnou přímku q kongruence L' projektivitou π, při které obrazem každého ohniska kongruence L na přímce p je ohnisko kongruence L' na přímce q a mimo to platí, že jestliže přímka p opisuje rozvinutelnou plochu obsaženou v L, která má na p bod vratu M, potom přímka q opisuje rozvinutelnou plochu obsaženou v L', která má na q bod vratu πM. Mimo to jsou studovány ještě určité transformace parabolických kongruencí, jejichž geometrická charakterisace je značně složitější a nebudu ji zde uváděti.

V článku V běží o takové korespondence, které jsou obálkami kolineací. Nejprve jsou určeny a geometricky popsány všecky obálky jednoparametrové soustavy kolineací n-rozměrného prostoru, při čemž se ukazuje, že řešením problému jsou pouze takové korespondence, které se vyskytly už v článku II. Mimo to jsou v článku VI určeny všecky obálky dvouparametrové soustavy kolineací trojrozměrného prostoru; podstatným prostředkem k řešení tohoto problému jsou výsledky docílené v druhé části článku V. *E. Čech*, Praha.

B) KNIHY

F. Kadeřávek-K. Havlíček: **Technická geometrie v lékařství a strojní prothetice.** Sbírka Kruh, sv. 36, vydalo Přírodovědecké vydavatelství v Praze 1952, 84 stran, Kčs 72,—.

Tato recense po matematické stránce může být nanejvýše polovičním posudkem knížky, která vyžaduje stejně, ne-li více, posudku lékařsky-fysikálního. Matematický výklad je tu i po stránce náplně i po stránce methody podřízen svému účelu —

aplikacím na lékařství. Domnívám se, že vzhledem k poslání, které knížka má, t. j. seznámiti studující lékařství (pokud nestudovali deskr. geometrii na gymnasiu) s jistými pro ně potřebnými elementárními geometrickými poznatky, zvolili autoři velmi vhodnou formu. Na theoretické poznatky navazují ihned medicinské aplikace; tímto uspořádáním a dále tím, že matematický výklad nezabíhá do zbytečných podrobností, neunavují čtenáře nematematika. Na druhé straně předpokládají u čtenáře jistou zběhlost v matematickém usuzování a do jisté míry vypěstovanou představivost, jaké asi má mít absolvent gymnasia.

Knížka se skládá ze tří částí: první obsahuje vysvětlení principů pravoúhlého promítání na jednu průmětnu a jeho aplikace (užití v roentgenoskopii, grafické isolování orgánů, plastická rekonstrukce) a dále promítání na dvě a více průměten, které však nevyústí v žádné lékařské využití. Druhá část se zabývá promítáním centrálním, bicentrálním (polycentrálním) i s modifikací pohyblivého středu a pohyblivé průmětny. Je zaměřena k aplikacím v roentgenologii (určení polohy cizího tělesa v těle, stereoskopické zobrazování, užití clon, stratigrafické Roentgenovy snímky). Třetí část obsahuje stručný nástin kinematické geometrie a její použití pro studium pohybů lidského těla (strojní prothetika, t. j. konstrukce prothes).

V první a druhé části dovolil elementární charakter věci vyložiti úplně základní poznatky o obou druzích promítání. Tyto dvě části jsou po matematické stránce pěkně a účelně zpracovány. Snad by tu bylo mohlo být i stručné poučení o kosoúhlém promítání, jehož se v aplikacích (str. 21 a d.) užívá. Naproti tomu v geometrii pohybu nutil autory sám předmět, omeziti se jen na uvedení základních faktů. Bylo by bývalo jistě účelné, vysvětliti aspoň stručně některé složitější pojmy, které určitě nejsou čtenáři známy (na př. spojitý pohyb, obálka přímek, evoluta a pod.). Nemám tím na mysli ani exaktní definice opřené o infinitesimální úvahy ani pouze etymologický výklad, ale spíše názorné vysvětlení, kterým se popisuje vytvoření určitého útvaru, ovšem s příslušnými poznámkami, co by bylo třeba matematicky odůvodnit. Je jisté, že by tím byl poněkud vzrostl rozsah knížky, ale jistě jen k jejímu prospěchu. Myslím, že v nynější podobě zanechává výklad o kinematické geometrii u čtenáře mnoho nejasností.

Na druhé straně bylo snad možné, vynechat při pravoúhlém promítání zavedení souřadnicového systému, který vzbuzuje na počátku mylné představy o souvislosti průměten a souřadnicových rovin. Je tu konečně i otázka, zda by nebylo bývalo možné, vyhnouti se vůbec zavedení nevlastních (úběžných) elementů, které nebylo lze provésti při rozsahu a zaměření knížky exaktně a které možná svádí k chybným představám (bod v nekonečnu).

V názvosloví se někde kniha rozchází s terminologií dnes zavedenou na školách (kolmé promítání místo pravoúhlé, symetrála úsečky místo osa, posuv místo posunutí a j.). Bylo by snad bývalo také vhodné, vyhnouti se při označování symbolům těžko stravitelným nedeskriptiváři (${}^{1}V_{1\infty}$, ${}^{1}P_1{}^{k}$, ${}^{n}H_1{}^{\alpha}$)*) a při vyslovování matematických vět obejíti nic neříkající slovo „obecně“.

Velkou předností knížky je její styl, který je velmi živý a — myslím — i nematematikovi dobře přístupný. Další předností je řada pěkných obrázků v textu i příloh na konci knihy.

Celkem lze říci, že z hlediska matematika je tato publikace velmi cenným a originálním příspěvkem pro popularisaci matematiky mezi pracovníky jiného vědního oboru a pro styk matematické theorie s praxí. *Jan Vyšín*, Praha.

V. N. Faddějeva: **Numerické metody lineární algebry.** (*В. Н. Фаддеева:* **Вычислетелние методы линеиной алгебры.**) Gostechizdat, 1950, 250 stran, cena 7,85 r.

Jak známo, ohromný počet problémů aplikované matematiky vede na základní úlohy lineární algebry: řešení systému lineárních algebraických rovnic, inverse matice výpočet charakteristických kořenů a charakteristických vektorů matice. Přesto, že

*) Možná, že by bylo na místě, vysvětliti i index místo exponentu (M^{α}).

řešení těchto problémů se opírá o dostatečně široce a hluboce vypracované matematické theorie — theorii determinantů, theorii lineárních transformací a theorii matic — a je tedy po theoretické stránce značně jednoduché, v praxi je většinou spojeno se značnými potížemi.

Máme na mysli především značný objem numerické práce nutné k vyčíslení řešení každého problému (v nejlepších methodách je úměrný třetí mocnině řádu příslušné kvadratické matice) a také relativně poměrně složitou závislost přesnosti vypočteného výsledku na daných hodnotách, na methodě řešení, a na přesnosti, s kterou jsou prováděny jednotlivé aritmetické operace v průběhu výpočtu.

V poslední době, s jedné strany vlivem vzrůstající potřeby aplikovaných věd a s druhé strany vlivem praktické možnosti (která je způsobena bouřlivým rozvojem numerické techniky) řešiti ty problémy lineární algebry matic vyšších řádů, o kterých jsme se zmínili výše, se stále objevují nové práce věnované numerickým methodám lineární algebry.

Práce sovětských matematiků zaujímají mezi nimi základní místo. Stačí jen vzpomenout na methody vyčíslení determinantu *A. N. Krylova* a *A. M. Danilevského,* na práci *K. A. Semendjaeva „O výpočtu charakteristických kořenů a invariantních variet matic pomocí iterací"*, na methody zlepšující konvergenci iteračního procesu *L. A. Ljusternika, M. K. Gaburina, A. A. Abramova,* na methody řešení systému lineárních rovnic *L. V. Kantoroviče* a *A. M. Lopšice,* které jsou založeny na minimalisaci některých kvadratických funkcionálů svázaných s maticí systému.

Ale všechny tyto práce (jako konečně i většina zahraničních prací věnovaných tomuto thematu) byly publikovány v časopisech a nestaly se majetkem širokých matematických a inženýrských kruhů.

Kniha V. N. Faddějevy je v podstatě v matematické literatuře první knihou, která je věnována systematickému přehledu základních numerických method lineární algebry, v čemž vidíme velikou zásluhu autora. Autor definuje v předmluvě svůj cíl takto: „Tato kniha představuje pokus o systematisování nejdůležitějších numerických method lineární algebry, jak prací klasických, tak prací z posledních let. Autor si nečiní nárok na vyčerpávající úplnost a uvádí jen ty methody, které už byly ověřeny v praxi. Při výkladu se autor nesnažil o naprosto bezvadnou přesnost výkladu a neprobíral ani všechny možné případy, které se mohou vyskytnout v aplikacích té či oné methody, ale omezil se jen na příklady typické a v praxi nejdůležitější."

Svého cíle autor zcela dosáhl.*)

Kniha má tři kapitoly. První kapitola má úvodní charakter a obsahuje ty partie z lineární algebry, které jsou potřebné v dalších kapitolách knihy. V § 1 této kapitoly je definován pojem matice a algebraické operace s maticemi. Zvláště jsou zdůrazněny pro další výklad velmi důležitá pravidla sčítání a násobení matic rozdělených určitým způsobem na pole a speciálně matice vroubené a kvasidiagonální. Dále je definován charakteristický a minimální polynom a jsou odvozeny *Hamilton-Kellyho* vztahy. Definují se elementární transformace matice a ukazuje se, že tato operace v podstatě odpovídá násobení dané matice zleva, resp. zprava, vhodnou trojúhelníkovou maticí. Dokazuje se věta o rozložení libovolné matice na součin dvou trojúhelníkových matic. V § 2 se zkoumají základní vlastnosti n-rozměrného komplexního vektorového prostoru. Zavede se pojem lineární závislosti a pojem base a ukazuje se, že počet vektorů base je nezávislý na způsobu jejich výběru. V dalším je popsán proces orthogonalisace systému lineárně nezávislých vektorů. Pak jsou

*) Doplněním recensované knihy může být cyklus přehledných statí o aplikované lineární algebře, které byly publikovány a reprodukovány v časopise *Uspěchi matem. nauk* (stať *G. Weilenda,* díl II, sv. 4, 1947), *L. Foxe, Ch. D. Chaskiho* a *D. Wilkinsona, M. Š. Birmana, M. K. Gavurina, D. P. Grossmana,* díl V, sv. 3, 1950, *A. Türinga,* díl VI, sv. 1, 1951, *M. R. Šury-Bury,* díl VI, sv. 4, 1951 a některé práce v *Trudech Matem. instituta im. V. A. Steklova,* sv. XXVIII, 1949.

odvozeny transformační vzorce pro souřadnice vektoru při transformaci base. Ukazuje se souvislost mezi rozměrem podprostoru vytvořeného konečným systémem vektorů a hodností matice souřadnic těchto vektorů (věta o hodnosti matice, z které plyne tato souvislost se uvádí bez důkazu). V § 3 se zkoumají lineární zobrazení n-rozměrného vektorového prostoru. Definují se operace s lineárními zobrazeními. Odvozují se vztahy mezi lineárním zobrazením (transformací) a maticemi a mezi maticemi jednoho a téhož zobrazení v různých basích. Zavádí se pojem charakteristického kořenu (čísla) a charakteristického vektoru lineárního zobrazení a jeho matice. Dokazují se některé vlastnosti charakteristických kořenů a charakteristických vektorů reálných matic, mezi jiným — orthogonalita mezi charakteristickými vektory reálné matice a charakteristickými vektory matice s ní transponované. Jako speciální případ jsou pak odvozeny základní vlastnosti charakteristických kořenů symetrických matic. Jsou uvedeny některé vlastnosti positivně definitních kvadratických forem a hermitovsky symetrických matic. Dokazuje se, že je možno matici, která má vesměs různé charakteristické kořeny, převésti na diagonální tvar a ukazuje se možnost takového kanonického tvaru pro matice symetrické. Odvozují se vztahy mezi charakteristickými kořeny a charakteristickými vektory podobných matic a též vztahy mezi charakteristickými kořeny matice a charakteristickými kořeny maticového polynomu této matice (pro zjednodušení je důkaz proveden jen pro případ, kdy má matice charakteristické kořeny vesměs různé). § 4 je věnován podrobnému popisu *Jordanovy* kanonické formy (věta o možnosti uvedení libovolné matice na Jordanův kanonický tvar pomocí podobnostních transformací je pouze formulována, ale není dokazována). Kapitolu ukončuje § 5, v kterém je definována limita vektoru a matice. Tento pojem je pak v dalším používán při vyšetřování iteračních method řešení problémů lineární algebry. Autor uvádí tři normy vektoru v n-rozměrném vektorovém prostoru (vektor prostoru označíme $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

$$\|X\|_{\mathrm{I}} = \max_i |x_i|; \quad \|X\|_{\mathrm{II}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \quad \|X\|_{\mathrm{III}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

a odpovídající normy matice A jsou definovány jako $\max\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$. Ke konci paragrafu jsou uvedeny a dokázány některé věty, které se týkají podmínek existence limity $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = 0$ a konvergence *Neumannovy* řady $E + A + A^2 + \ldots$

Kapitola II je věnována třem příbuzným úlohám: problému řešení systému lineárních algebraických rovnic, problému inverse matice a problému eliminace. V § 6 jsou uvedeny některé varianty Gaussovy methody řešení soustavy lineárních rovnic postupnou eliminací; řešení pomocí této methody spočívá ve dvou krocích: odvození „trojúhelníkového" systému ekvivalentního danému systému (podle terminologie autora „přímý pochod") a řešení tohoto systému (podle terminologie autora „inversní pochod"). V § 7 je uvedena methoda vyčíslení determinantů pomocí operací téhož typu jako „přímý pochod" Gaussovy methody. § 8 je věnován popisu kompaktního schematu řešení systému lineárních rovnic. Tento systém představuje zkrácení numerického schematu Gaussovy methody a je založen na tom, že je možno na počítacích strojích vypočítati výrazy typu $\frac{1}{c}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ bez pomocných mezivýpočtů. V § 9 je vyložena souvislost mezi methodou Gaussovou a rozkladem matice systému na součin dvou trojúhelníkových matic. § 10 je věnován methodě druhých odmocnin obzvláště výhodné pro řešení systému se symetrickou maticí. V § 11 jsou popsány methody inverse dané matice založené na methodách řešení systému lineárních rovnic vyložených v předešlých paragrafech. V § 12 je formulována úloha „eliminace" (tak nazývá autor vyčíslení lineární formy tvaru $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i + d$, kde c_i, d jsou daná čísla a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je řešení daného systému lineárních rovnic). Autoru vádí methodu jejího řešení, ke které není třeba znát čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ukazuje se, že řešení systému lineárních rovnic a inverse matic vede ke speciálním problémům theorie eliminace, a proto mohou být tyto případy řešeny použitím uvedené methody eliminace. V § 13 je popsána methoda zlepšení nalezeného hrubého přiblížení k hodnotě inversní matice. V § 14 je ukázáno, jak je možno tím, že rozbijeme danou matici na pole, převésti úlohu vyčíslení matice inversní k dané matici na úlohu vyčíslení inversních matic nižšího řádu. V § 15 je uveden analogický způsob pro vyčíslení matice inversní k matici n-tého řádu, která vznikla ovroubením matice řádu $(n - 1)$-ho, jejíž inversní matice má známou hodnotu, a ukazuje se, jak tento způsob může se použít pro vyčíslení inversní matice a řešení lineárního systému methodou „ovroubení". V § 16 je uveden „schodovitý" způsob řešení systému lineárních rovnic (publikovaný *Morissem* v r. 1946) a je uveden jeho vztah k methodě vroubení a methodě Gaussově.

§§ 17—19 jsou věnovány základním iteračním methodám: různým variantám obyčejné methody a methodě Seidlově. Jsou zde uvedeny některé podmínky konvergence iterační methody, které plynou z vět § 5, prozkoumána souvislost mezi obyčejnou iterační methodou a methodou Seidlovou a uvedeny některé podmínky konvergence methody Seidlovy (zvláště čistě algebraický důkaz, který byl publikován *Reichem* r. 1950, že ke konvergenci Seidlovy methody řešení soustavy rovnic o matici A stačí, aby matice A byla positivně definitní; tato podmínka je v případě positivních diagonálních elementů matice A i nutná).

V § 20 jsou navzájem porovnány jednotlivé methody uvedené v kapitole II.

V kapitole III jsou zkoumány methody vyčíslení charakteristických kořenů a charakteristických vektorů matice. V § 21 je objasněna algebraická podstata methody *A. N. Krylova* o převedení charakteristického determinantu na tvar polynomu. Nalezené charakteristické hodnoty mohou být použity pro výpočet charakteristických vektorů (pouze v případě jednoduchých kořenů). V § 23 je popsána methoda *Samuelsonova*. V § 24 je popsána *Danilevského* methoda o rozvedení charakteristického determinantu v polynom a ukázáno, jak lze této methody použít při výpočtu charakteristických vektorů. V § 25 je vyložena *Leverrierova* methoda vyčíslení koeficientů charakteristické rovnice a D. K. Fadějevova modifikace této methody, umožňující provedení výpočtu charakteristických vektorů a hodnoty inversní matice. V § 26 je popsána „schodovitá" methoda stanovení všech charakteristických kořenů a charakteristických vektorů matice a matice k ní transponované pro případ, že kořeny tak zvaných schodovitých rovnic jsou reálné a různé. V § 27 je uvedena interpolační methoda přibližného rozvedení determinantu, jehož prvky jsou polynomy v λ v polynom v λ a uvedena tabulka interpolačních koeficientů, která je velmi výhodná při praktických výpočtech. V § 28 jsou uvedené methody stručně mezi sebou porovnány.

§§ 29—35 třetí kapitoly jsou věnovány iteračním methodám. V § 29 je podána methoda vyčíslení prvních (s největším modulem) charakteristických kořenů a charakteristických vektorů v případě, že jsou reálné, a elementární dělitelé matice lineární. V § 30 je popsáno několik způsobů zrychlení konvergence iteračního procesu, v §§ 31 a 32 methody vyčíslení ostatních charakteristických kořenů a jim odpovídajících charakteristických vektorů (za těchže předpokladů jako v § 29). V § 33 je zcela krátce zkoumán případ, kdy matice má dvojici komplexně sdružených charakteristických kořenů s maximálním modulem, a jako dříve všechny elementární dělitele lineární, v § 34 pak případ nelineárních elementárních dělitelů. Konečně § 35 je věnován zrychlení konvergence iterační methody při řešení systému lineárních rovnic, která pochází od L. A. Ljusternika.

V celé II. a III. kapitole se předpokládá, že elementy uvažovaných matic jsou reálné.

Jak je vidět z výše uvedeného obsahu knihy, obsahuje tato kniha při poměrně nevelkém objemu mnoho materiálu. Autor krátce a jasně, aniž by zatěžoval výklad zbytečnými detaily, ukazuje podstatu uvedených method a jejich vzájemné souvislosti. Dokonce i v prvé kapitole, která má čistě úvodní charakter, můžeme najít několik pěkných důkazů (ku příkladu důkaz věty o rozkladu matice na součin dvou trojúhelníkových matic, důkaz věty § 1 a 2). Velmi šťastné je též zavedení několika norem v n-rozměrném vektorovém prostoru v § 5 kap. I, které umožňuje vyslovení několika konkretních vět o konvergenci iteračních procesů z obecných theoreticko-funkcionálních úvah. Zkoumání jednotlivých method autor rozvádí do pečlivě vypracovaných početních schemat (bere v nich zřetel na dostatečně spolehlivé methody kontroly) a doprovází ilustrujícími číselnými příklady.

Dovolím si nyní uvésti některé nedostatky knihy. Vzhledem na cíl, který si autor stanovil v předmluvě, nelze mu dělati výčitek, že ponechal bez povšimnutí řadu method řešících zkoumaný problém. Nicméně některé obecné problémy a konkretní výsledky by se měly v knize odrážet větší měrou. Mám na mysli především otázky přesnosti (které byly v poslední době předmětem mnoha prací). Stručné poznámky, na které se omezil autor, zůstávají ve většině případů neodůvodněné. V knize není též zmínka o možnosti využití prostředků současné numerické techniky, především automatických číslicových strojů, při řešení podobných problémů, třebaže je tomuto thematu věnováno mnoho prací.

Při výkladu způsobu výpočtu charakteristických vektorů založeném na methodě A. N. Krylova autora nepřipomíná práci *A. M. Lopšice* (*Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analyzu* sv. VII, 1949), jehož obsah se částečně kříží s obsahem uvedeného paragrafu.

Když mluví o iteračních methodách řešení systému lineárních rovnic, autor neuvádí efektní a v praxi prověřenou methodu *A. A. Abramova* zlepšení konvergence (*DAN, SSSR*, **74**, **6** (1950), 1051) a modifikaci Seidelovy methody pro systémy s positivně definitní maticí, kterou nedávno uveřejnil *Aitken*.

Autor neuvádí vždy objem numerické práce nutné pro řešení úlohy tou či onou methodou (což může čtenáři znesnadniti výběr nejvhodnější methody). Takové pokyny chybí ku příkladu v § 8, §§ 10—16 kap. II, § 22, 26 kap. III. Objasnění uvedených numerických příkladů jsou někdy velmi stručná, což ztěžuje využití knihy čtenáři, který se dobře nevyzná v detailech theorie uvedené methody. Zatím by bylo ovšem výhodné, kdyby mohl knihy používat pro informaci i kvalifikovaný počtář, který není obeznámen s theorií používané methody. Methody, kterých se používá pro nesymetrické matice, bylo by lépe ilustrovat na řešeních příkladů s nesymetrickými maticemi.

Někdy jsou tvrzení autora nedostatečně odůvodněna. Tak na příklad na str. 65 se říká, že věta 1 se v obecném případě dokazuje „buď pomocí úvah o spojitosti neb pomocí přechodu ke kanonickému Jordanově tvaru". Nám se zdá nepravděpodobné, že by bylo možno tuto větu dokázat v obecném případě jen pomocí úvah o spojitosti, bez použití Jordanova kanonického tvaru nebo jiných algebraických vztahů. Z popisu schodovité methody řešení systému lineárních rovnic není vidět jak jsou definovány hodnoty neznámých $x_i = z_{i,n+1}$ po definování všech z_{ik} pro $i < k \leq n$. Není jasná poznámka o relativní rychlosti konvergence obyčejné iterační methody a Seidelovy methody na str. 134 a poznámka na str. 145 o podmínkách, kdy je třeba dáti přednost iterační methodě před jinými methodami řešení systému lineárních rovnic.

Některé termíny a výrazy nejsou dost vhodné (jindy nepřesně definované). Tak na př. (str. 55) místo „největší společný dělitel" autor píše „obecný největší dělitel", nebo místo „iterační" píše „iterativní", místo „hlavní minor" „minor ležící na hlavní diagonále" (str. 19, 147); na str. 177 je uveden výraz „trhliny v pomocných determinantech", jehož smysl není přesně definován; Morrisova methoda by se měla podle našeho mínění jmenovati spíše stupňovitá nebo žebříkovitá než schodovitá. Když zavádí pojem minimálního polynomu (str. 20) autor neuvádí, že by jeho existence a jednoznačnost měly být dokázány a že se též obyčejně klade koeficient u nejvyšší mocniny polynomu rovný jedné.

Nakonec padne do očí značný počet tiskových chyb, které jsou v knize (námi bylo napočteno 56 tiskových chyb, ale ve skutečnosti je jich jistě ještě více). Tak na př. na str. 110 v levé části vzorce (13) je A_{n-1}^{-1} místo A_n^{-1}; na str. 114 řádek sedmý shora je $A^{-1}u_n$ místo $A_{n-1}^{-1}u_n$; ve druhé z obou matic na str. 132 jsou vytištěny písmena a místo b, v desáté řádce shora na téže straně je A místo B; na pravé straně posledního ze vzorců (14) na str. 189 je vytištěno a_{44} místo $Sp\, A_4$. V soupisu citované literatury je v [2] u práce *N. N. Luzina* špatně uveden rok, u práce *K. A. Semendjajeva* je špatně uveden svazek časopisu atd.

Nehledě na uvedené nedostatky, ukazuje se kniha bezpodmínečně potřebnou širokému kruhu inženýrů i matematiků zabývajících se aplikovanými vědeckovýzkumnými pracemi a její vydání je nutno vřele přivítat.

D. G. Grossman.
Přeložil *O. Koníček*, Praha.

I. G. Petrovskij: **Přednášky o parciálních diferenciálních rovnicích.** (*И. Г. Петровский:* **Лекции об уравнениях с частными производными.**) Gostechizdat, Moskva-Leningrad, 1950, 340 str. Náklad 15 000. Cena 3,80 r.

Vyjití přednášek *I. G. Petrovského* bylo očekáváno s velkým zájmem; a tento zájem byl plně ospravedlněn. V porovnání s jinými pracemi o témže thematu — sovětskými i zahraničními — je zmíněná kniha v mnohém nová a originální i co do obsažené látky i co do method výkladu. Jeví se v tom jasně autorova záliba i zaměření jeho vědeckých bádání. Největší pozornost je soustředěna na obecné otázky theorie parciálních diferenciálních rovnic. Výklad je stručný, bez zbytečných řečí. Na konci každé partie je přehled (bez důkazů) nových výsledků v příslušné oblasti. Po dokázání základních vět, a také na jiných místech knihy, autor často připojuje řadu zajímavých poznámek k hlavnímu textu.

Prvá kapitola obsahuje úvod do klasifikace rovnic. Druhá, věnovaná rovnicím hyperbolického typu, je rozdělená na dvě části: *Cauchyho* úloha v oblasti neanalytických funkcí a kmity omezených těles. V třetí a čtvrté kapitole je vyložena theorie eliptických a parabolických rovnic.

Přejděme k podrobnějšímu zkoumání jednotlivých kapitol.

Prvá kapitola začíná definicí pojmů, majících vztah k rovnicím matematické fysiky a k formulaci problémů pro tyto rovnice. Ve druhém paragrafu je proveden důkaz věty *Kovalevské* pro Cauchyho problém v analytickém případě; v třetím je vyšetřována obecná Cauchyho úloha pro soustavu rovnic, napsaných v implicitním tvaru, a zavádí se pojem charakteristik. Podrobně a zajímavě je sestaven čtvrtý paragraf, věnovaný otázce jednoznačnosti řešení Cauchyho problému v oblasti neanalytických funkcí. Je podán důkaz *Holmgrenovy* věty o jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy pro soustavu lineárních rovnic s analytickými koeficienty ve třídě neanalytických funkcí a jsou uvedeny další výsledky *Hadamardovy* a *Carlemanovy*. Na konci paragrafu jsou uvedeny některé dosud nerozřešené otázky.

Na konci prvé kapitoly je vyšetřováno převedení na kanonický tvar v bodě obecných lineárních rovnic a jejich klasifikace, a také převedení na kanonický tvar v oblasti pro rovnice 2. řádu s dvěma nezávisle proměnnými.

Zvláštní zájem budí poslední paragraf prvé kapitoly, v němž je vyšetřována redukce soustavy lineárních rovnic prvého řádu s dvěma nezávisle proměnnými na kanonický tvar pomocí lineární transformace funkcí s podrobným objasněním hladkosti koeficientů této transformace. V souvislosti s uvedenou transformací je zavedena definice eliptické soustavy, hyperbolické soustavy a soustavy hyperbolické v užším smyslu.

Originální a obsahově bohatá je prvá část druhé kapitoly. Je věnována, jak už jsme uvedli, Cauchyho úloze v oblasti neanalytických funkcí. Po objasnění korektnosti Cauchyho úlohy a po krátkém výkladu hlavních myšlenek zobecněného řešení parciálních diferenciálních rovnic řeší autor Cauchyho úlohu pro hyperbolickou soustavu 1. řádu s dvěma nezávisle proměnnými. Řešení je určeno soustavou lineárních integrálních rovnic *Volterrova* typu s integrační cestou podél charakteristik soustavy. Autor dokazuje existenci a jednoznačnost řešení ve třídě funkcí se spojitými derivacemi prvého řádu, a také korektnost uvedené Cauchyho úlohy.

Dále se vyšetřuje Cauchyho problém pro vlnovou rovnici s počátečními hodnotami pro $t = t_0$ v jedno-, dvou- a třídimensionálním případě a je proveden důkaz věty o jednoznačnosti pro dvakrát spojitě diferencovatelná řešení. Důkaz existence řešení je proveden verifikací známého vzorce pro třídimensionální případ. Dvou- a jednodimensionální případ se dostanou postupným anulováním proměnných. Celá partie o Cauchyho úloze pro vlnovou rovnici obsahuje řadu cenných poznámek o podstatě otázky. Speciálně, při vyšetřování vzorců, dávajících řešení Cauchyho úlohy, je objasněna otázka difuse vln.

Potom následuje několik paragrafů, neobvyklých v matematické knize o parciálních diferenciálních rovnicích, o *Lorentzově* transformaci a matematických základech speciálního principu relativity.

V souvislosti s Lorentzovou transformací je objasněna otázka Cauchyho problému pro vlnovou rovnici s počátečními podmínkami danými na nadrovině v závislosti na úhlu, který svírá nadrovina s časovou osou. Velmi bohatý na materiál je poslední paragraf prvé části druhé kapitoly, v němž je podán přehled základních faktů v theorii Cauchyho úlohy pro obecné hyperbolické rovnice. Jsou zde uvedeny výsledky dosažené samým autorem a *S. L. Sobelevem* a také výsledky methody konečných diferencí (práce *Courantova, Friedrichsova, Lewyho*).

Přejděme ke druhé části druhé kapitoly (kmity omezených těles).

V této části po důkaze jednoznačnosti řešení smíšené úlohy pro vlnovou rovnici je podrobně objasněna spojitá závislost řešení na počátečních podmínkách v jednorozměrném případě. Methodou *Fourierovou* je řešena úloha o kmitech struny. Dále je v řadě paragrafů vyložena Fourierova methoda pro hyperbolickou rovnici tvaru:

$$A(t) \frac{\partial u}{\partial t^2} + C(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D(t) \frac{\partial u}{\partial t} + E(x) \frac{\partial u}{\partial x} + [F_1(t) + F_2(x)]\, u = 0.$$

Předpokládá se, že koeficienty jsou dostatečně hladké, při čemž

$$A(t) > a_0 > 0 \text{ a } C(x) < c_0 < 0,$$

kde a_0 a c_0 jsou konstanty. Po vyložení obecných výsledků, týkajících se charakteristických čísel a charakteristických funkcí jsou uvedeny bez důkazu výsledky ohledně jejich variačních vlastností a dále se dokazuje věta Courantova. To umožňuje autoru získat asymptotické výrazy pro charakteristická čísla a funkce. Zdůvodnění Fourierovy methody pro výše uvedenou rovnici se děje na základě variačního počtu a asymptotických výrazů.

Potom je krátce uvedeno zdůvodnění Fourierovy methody na základě užití *Greenovy* funkce a aplikace theorie integrálních rovnic. Ve dvoudimensionálním případě je až do konce vyšetřováno pouze kmitání obdélníkové membrány.

V závěrečném paragrafu této části jsou uvedeny některé poučky o charakteristických funkcích v mnohodimensionálním případě, o *Sturmově* větě, o singulárních úlohách v jednodimensionálním případě a o přibližném výpočtu charakteristických čísel a funkcí.

V hlavním textu třetí kapitoly se vyšetřuje *Laplaceova* rovnice, dokazují se základní vlastnosti harmonických funkcí a řeší se *Dirichletova* úloha pro kruh.

Jedním z ústředních paragrafů je v této kapitole ten, v němž je prostě a elegantně vyložena methoda *Poincaré-Perronova* k sestrojení zobecněného řešení Dirichletova problému a je provedeno vyšetření regularity hraničních bodů. Uveďme ještě jeden zajímavý paragraf, v němž je užito methody sítí k řešení Dirichletovy úlohy.

Obsahově velmi bohatý je poslední paragraf kapitoly, v němž je přehled nejdůležitějších výsledků pro obecné eliptické rovnice (práce *S. N. Bernštejna, I. G. Petrovského, S. L. Soboleva, Lewyho, Fellera* a jiných). Theorie potenciálu je vyložena pouze pro rovinný případ, a na ní založená věta o existenci řešení vnitřní Dirichletovy úlohy je uvedena pouze pro křivky s kladnou křivostí.

Poslední kapitola věnovaná parabolickým rovnicím je neveliká. V ní je Fourierovou methodou řešena rovnice pro vedení tepla v jednodimensionálním případě a dokazuje se věta o existenci a jednoznačnosti pro problém šíření tepla v neomezené tyči. Ve stručném přehledu bádání o rovnicích parabolického typu jsou uvedeny základní výsledky práce *Gevreyovy*.

Učiňme nyní několik poznámek ohledně jednotlivých míst knihy, při čemž uvedeme tyto poznámky nikoliv v pořadí jejich významu, nýbrž podle postupu výkladu v knize.

Autor odvozuje rovnice matematické fysiky, při čemž uvažuje kubický element objemu (str. 9—12). Účelnější je vyšetřování libovolné oblasti s použitím Ostrogradského vzorce. Úvaha o napětí membrány na str. 14—15 se jaksi vymyká z celkového stylu knihy.

Při důkaze věty Kovalevské autor užívá (viz str. 31) v českém překladu str. 30 elementární majoranty

$$|c_{k_0k_1\ldots k_n}a_0^{k_0}a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}| \leqq M,$$

což mu neumožňuje, přesně řečeno, učinit důležitou poznámku na str. 37 (překlad str. 35) o závislosti ϱ a α pouze na R a supremu abs. hodnot koeficientů soustavy. Obvyklé užití druhé majoranty by okamžitě ospravedlnilo tuto poznámku.

Bylo by žádoucí, aby na str. 64 (překlad str. 60) bylo uvedeno, že redukce na kanonický tvar v oblasti má přece jen lokální charakter.

Je nutné podrobněji objasnit pojem zobecněného řešení (viz str. 84—86, překlad str. 78—80). Zdá se nám racionálnější integrální definice zobecněných řešení. Toto neužívá hladkých řešení a je mnohem vhodnější při řešení úloh v zobecněném smyslu.

Naprosto jednoduše lze dokázat, že zobecněné řešení v integrálním smyslu a spojité řešení Laplaceovy rovnice je obvyklé řešení.

Požadavek čtyř derivací u φ_0 a φ_1 (viz str. 148, překlad str. 137), aby bylo možno derivovat člen po členu Fourierovu řadu, je příliš silný. Jest žádoucí, aby bylo uvedeno *d'Alembertovo* řešení pro omezenou strunu a aby bylo ospravedlněno na základě Fourierovy methody za obecných předpokladů, bez derivování člen po členu.

Ve všem následujícím jsou kladeny na φ_0 (počáteční hodnota u) a na φ_1 (počáteční hodnota u_t) stejné požadavky. Podle podstaty věci mají být požadavky na φ_1 méně ostré než na φ_0.

Na str. 150 (překlad str. 138) se mluví o zobecněném řešení limitní úlohy, avšak nikde není jasně řečeno, co je to zobecněné řešení problému. Dříve bylo definováno pouze zobecněné řešení rovnice.

Nejsem přívržencem toho, aby byly dokazovány obecné věty o rozložení podle charakteristických funkcí a aby byla ospravedlňována Fourierova methoda v jednorozměrném případě na základě variačního počtu a asymptotických vyjádření. Tato cesta je příliš složitá.

Základní a obtížnou věcí v důkaze je v podstatě pouze dokázat uzavřenost soustavy charakteristických funkcí. Tu by bylo možno dokázat pomocí *Greenovy* funkce a theorie integrálních rovnic. Na základě uzavřenosti lze podle *V. A. Stěklova* lehce dokázat větu o rozložení funkce $f(x)$, vyhovující limitním podmínkám a mající spojitou derivaci, v stejnoměrně konvergentní řadu. Stejně elementárně se dokazuje možnost dvojnásobného derivování člen po členu pro případ operátoru

$$L(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\,y] - q(x)\,y$$

při následujících podmínkách: $f(x)$ má spojité derivace do třetího řádu, $\varrho(x)$ do druhého řádu, $q(x)$ má spojitou derivaci a konečně platí:

$$f(x) = 0 \text{ a } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y\,[p(x)\,f(x)] = 0 \text{ pro } x = 0 \text{ a } x = l.$$

Tyto požadavky jsou slabší než ty, které jsou uvedeny autorem na str. 177 (překlad str. 163).

Poznamenejme ještě, že užití věty *Hilbert-Schmidtovy*, kromě uzavřenosti soustavy charakteristických funkcí, dává velmi prostě i variační vlastnosti charakteristických hodnot a funkcí ve třídě dvakrát spojitě diferencovatelných funkcí. To otevírá cestu také k získání asymptotických výrazů.

Výpočty, provedené na str. 189, (překlad str. 173—174) jsou zbytečné. Stačí ukázat, že vzorec (5.24) určuje funkci $\chi(s)$, která vyhovuje rovnici (1.24) i limitním podmínkám a připomenout jednoznačnost takového řešení. Bezprostřední ověření vzorce (5.24) je velmi jednoduché.

Na str. 190 (překlad str. 174) by bylo žádoucí trochu podrobnější objasnění ekvivalentnosti rovnice (14.24) a diferenciální rovnice (13.24) s limitními podmínkami.

Bylo by užitečné ukázat principiální obtížnost obecného ospravedlnění Fourierovy methody, dokonce i pro vlnovou rovnici, v trojdimensionálním případě (viz str. 200, překlad str. 183—184).

Na str. 202 (překlad str. 185) je uvedeno, že při dvou a třech nezávisle proměnných stačí požadovat, aby funkce f měla omezené a spojité derivace až do třetího řádu včetně. To je správné, avšak vezmeme-li v úvahu to, že řešení Poissonovy rovnice se spojitými derivacemi až do druhého řádu, rovné nule na hranici, je vyjádřeno Greenovou funkcí pak plyne odtud, že stačí spojitost derivací prvého a druhého řádu v uzavřené oblasti.

Není jasno, o jaké úplnosti $\varphi_n(x)$ ve třídě přípustných funkcí se mluví na str. 208 (překlad str. 190). Při obvyklé úplnosti v L_2 jsou další tvrzení nesprávná. Je nutna konvergence v průměru i funkcí i jejich derivací. Mimoto, při limitním přechodu $\chi_i^{(N)}(x) \to \chi_i(x)$ je třeba předem požadovat normovanost charakteristických funkcí a zmínit se výslovně o nutnosti přejít k podposloupnosti vzhledem k neurčenosti znaménka u normované charakteristické funkce.

Proč je na str. 235 (překlad str. 216) uvedena podmínka (1.32) jednoznačnosti řešení vnější Dirichletovy úlohy v trojdimensionálním případě?

Jednoznačnost řešení, rovného nule v nekonečnu, bezprostředně vyplývá z věty o maximu a minimu pro harmonické funkce. Lze lehce dokázat, užijeme-li řešení Dirichletovy úlohy pro kouli a inverse, že, když $\mu(M)$ je funkce harmonická v okolí bodu v nekonečnu a rovná nule v nekonečnu, podmínka (1.32) je splněna.

Druhá krajová úloha na str. 238 (překlad str. 219) je formulována tak, že je dána jednostranná normální derivace na hranici. Obvykle je dána limita normální derivace při přibližování bodu po normále k bodu plochy. Z existence této limity plyne (viz str. 259, překlad str. 237) i existence jednostranné normální derivace na hranici, rovné této limitě. Opak neplatí. Pro *Ljapunovovy* plochy při spojitosti hraniční funkce se řeší druhá krajová úloha ve smyslu limity normální derivace. Existuje věta o jednoznačnosti při formulaci limitní podmínky s jednostrannou derivací. Výsledek je v tomto případě, jak je patrno z řečeného, obsažnější.

Je užitečné poznamenat, že nutnost podmínky (1.33) může být dokázána při pouhé podmínce spojitosti $\mu(M)$ v oblasti i s hranicí, jestliže užijeme existence řešení při splnění podmínky (1.33).

Je žádoucí uvést výsledky práce *M. V. Keldyše* a *M. A. Lavrentjeva* o jednoznačnosti řešení druhé krajové úlohy.

Důkaz o jednoznačnosti, užívající pouze spojitosti $\mu(M)$ v oblasti bez hranice, se provede velmi jednoduše, jestli předpokládáme, že v každém bodě hranice je možno sestrojit dotykovou kouli, jejíž všechny body až na bod dotyku leží uvnitř oblasti.*)

Při převedení křivočarého integrálu na integrál vzhledem k s (str. 264, překlad str. 242) je užitečné připomenout periodičnost jádra a nutnost periodičnosti všech funkcí.

Úvahy, které vedou k identitě na str. 266 (překlad 244), nejsou úplně opodstatněné, neboť v 33. paragrafu byla jednoznačnost druhé krajové úlohy dokázána za předpokladu, že prvé derivace jsou spojité v oblasti i s hranicí.

Naše poznámky se týkají pouze jednotlivých detailů výkladu.

Na závěr zdůrazněme ještě jednou charakteristické zvláštnosti recensované knihy. Tato obsahuje mnoho cenného, řídce se vyskytujícího materiálu, zvláště pokud se týče vět o existenci a jednoznačnosti o otázkách korektnosti řešení úloh pro jednu parciální diferenciální rovnici a pro soustavu takových rovnic. Plán knihy je sestaven velmi zajímavě. Všechny výsledky, v to počítaje i dávno známé, jsou vyloženy originálně v duchu současných názorů. Autor uvedl mnoho zajímavého materiálu z prací, objasňujících cesty dalšího rozvoje theorie. Vše to činí knihu velmi cennou nejen pro studenty, nýbrž i pro vědecké pracovníky.

V. I. Smirnov.
Přeložil *O. Vejvoda*, Praha.

B. V. Gněděnko: **Nástin historie matematiky v Rusku.** (*Б. В. Гнеденко:* **Очерки по истории математики в России.**) OGIZ, Gosudarstvennoje izdatělstvo techniko-teoretičeskoji literatury, Moskva-Leningrad, 1946, 247 str., cena rublů 6,—, váz. 7,50.

Dnes, kdy kvapem doháníme své mezerovité vědomosti o mocném Sovětském svazu a o minulosti největšího slovanského národa, přišla nám Gněděnkova knížka jako na zavolanou.

První písemné památky ruské matematiky sahají až do r. 1134. Nikolajem Ivanovičem Lobačevským se ruská matematika vysunula na přelomu XVIII. a XIX. století na světovou úroveň, a udržela svou světovou pověst Pafnutijem Lvovičem Čebyševem, Andrejem Andrejevičem Markovem, Alexandrem Michajlovičem Ljapunovem, Soňou Kovalevskou a jejich odchovanci. Ve XX. století, zvláště po Velké říjnové revoluci, postavila se ruská matematika právě v nejmodernějších oborech, v theorii čísel a v počtu pravděpodobnosti na prvé místo světové matematické tvorby. Proto zasluhovala ruská matematika již dávno zvláštní monografie, která by soustavně podala její vývoj a zasadila jej do rámce kulturního i politického růstu velkého ruského národa a státu. Bylo toho tím více zapotřebí, protože západoevropská literatura matematická a matematicko-historická, stojící hlavně pod německým vlivem, nezná mnohé objevy ruské a vůbec slovanské, přičítá je pozdějším západoevropským znovuobjevitelům a přikládá jim jména těchto pozdějších neruských autorů. Opakuje se tu kolikrát známá historie Bolzanova objevu spojité funkce bez derivace.

Gněděnkovy „Očerki" jsou prvou splátkou tohoto velkého dluhu. Jejich velká zásluha spočívá v tom, že je tu po prvé podán soustavný a přehledný popis vývoje ruské matematiky od nejstarších dob až po naše dny. Existují sice krásné monografie o jednotlivých obdobích ruské matematiky, zvláště práce V. V. Bobynina, T. J. Raj-

*) Viz článek *S. Zaremba*: *O jednom smíšeném problému, vztahujícím se k Laplaceově rovnici.* (Ob odnoj smešannoj zadače, otnosjaščejsja k uravneniju Laplasa.) „Uspechi matematičeskich nauk", 1946, t. I, vyp. 3—4.

nova a jiných, nebo dějiny ruské Akademie věd nebo monografie věnované jednotlivým ruským matematikům, avšak obraz celého vývoje od nejstarších dob až do poloviny XX. stol. scházel.

Autor „Očerků“ zanášel se již 10 let myšlenkou napsat podobnou knížku. Světová válka se svým hrůzným spustošením evropské Rusi znemožnila provedení tohoto úmyslu dříve. Avšak již rok po vztyčení vítězného rudého praporu na berlínském parlamentu vychází v Moskvě Gněděnkův pomník ruské matematické tvorbě. Malý rozměr knihy (247 stránek velikosti $12\frac{1}{2}$ cm $\times$ 20 cm), snaha, učinit knihu přístupnou čtenářům s gymnasijním vzděláním, přiblížit látku lidsky širokým vrstvám vědychtivých ruských lidí a konečně i osobní záliba autora, vědecky činného v počtu pravděpodobnosti a v matematické statistice, vedly k nutnému omezení látky, jejímu tu obšírnějšímu, jinde stručnějšímu zpracování, ba spokojujícímu se někdy jen kratičkou zmínkou. Malý rozsah knihy také nedovoloval zpracovat všechny obory a doby stejně důkladně. Škoda, že kniha není provázena jmenným rejstříkem, který by teprve nejen ukázal, jak četní ruští matematikové vynikli nad průměr a jak bohatý materiál autor snesl, nýbrž i udělal z knihy nepostradatelnou příručku pro každého, kdo se jednak chce poučit o minulosti ruské matematiky, jednak chce na základě jejích skvělých výkonů pracovat dále.

Nutná stručnost je vyvážena jak životopisnými náčrty velkých matematiků, tak nástiny historického prostředí a vysvětlivkami matematické látky, přesahující odborné znalosti předpokládaného matematického vzdělání čtenářstva.

Uvedeme ještě přehled kapitol a paragrafů knihy: Úvod. Obsah. Kap. I. Matematické vědomosti v Rusku do počátku XVIII. stol. § 1. Matematické vědomosti do XVII. stol. § 2. Matematické vědomosti v XVII. stol. § 3. Organisace škol. § 4. Aritmetika Magnického. Kapitola II. Vědecká práce v Rusku v XVIII. a XIX. stol. § 5. Založení Akademie věd. § 6. Euler. § 7. Organisace universit. § 8. Nikolaj Ivanovič Lobačevskij. § 9. Petrohradská matematická škola. § 10. Michajl Vasiljevič Ostrogradskij. § 11. Pafnutij Lvovič Čebyšev. § 12. Andrej Andrejevič Markov. § 13. Alexandr Michajlovič Ljapunov. § 14. Sofia Vasiljevna Kovalevskaja. § 15. Moskevská matematická společnost. Kapitola III. Rozvoj matematiky ve XX. stol. § 16. Zvláštnosti rozvoje matematiky ve XX. stol. § 17. Matematická střediska v Sovětském svazu. § 18. Moskevská matematická škola. § 19. Sovětská škola theorie čísel. § 20. Sovětská škola theorie pravděpodobnosti. Doplňky. Doplněk 1. Slovanská numerace. Doplněk 2. Čára, omezující rovinný obrazec o největším obsahu. Doplněk 3. Mnohočleny nejméně se odchylující od nuly. Doplněk 4. Pojem množiny. Použitá literatura.

Nejlepším doporučením knihy je jistě okolnost, že náklad 50 000 výtisků je v nakladatelství rozebrán. *Q. Vetter*, Praha.

O. F. G. Schilling: **The theory of Valuations.** (Theorie ohodnocení). Mathematical Surveys IV, American Mathematical Society, New York, 1950, str. VIII + 253, $ 6,—.

Dle autorových slov uvedených v předmluvě lze pokládat theorii ohodnocení za zvláštní případ topologické algebry.

V pojednání *J. Kürschbáka* (1913) poprvé definováno ohodnocení pro libovolné komutativní těleso jako rozšíření pojmu absolutní hodnoty, čímž ovšem i zavedena metrika. Další rozšíření pojmu ohodnocení pro komutativní tělesa pochází hlavně od *Ostrowského* a *Krulla*. Myšlenka ohodnocení ukázala se však tak plodnou, že byl pojem ten rozšířen i na okruhy (komutativní i nekomutativní a dokonce i neasociativní).

Definice Kürschákova zahrnuje také klasické užití absolutní hodnoty v theorii těles reálných a komplexních čísel a metrickou topologii tak vzniklou. Této topologie užívá se na příklad při důkazech základní věty algebry. Není však již tak nasnadě novější užití číselně theoretického pojmu dělitelnosti při topologisaci. Metrika na dělitelnosti založená se po prvé vyskytuje při *Henselově* konstrukci p-adických čísel. (Henselovy práce spadají do prvních let tohoto století.) Uskutečňuje se tak úzké spojení mezi theorií algebraických funkcí jedné proměnné a theorii algebraických čísel. Od Hensela pochází (1908) také základní pomocná věta o reducibilnosti, na jejímž zevšeobecnění je založena velká část theorie ohodnocení. Mocný nástroj, užívaný při diskusi algebraických křivek, stal se tak dostupným i pro algebraická číselná tělesa, později i pro jiné otázky algebry.

V novější době měla theorie ohodnocení důležitou úlohu v theorii algebraických čísel, na př. při nové formulaci a doplnění theorie těles tříd (*Artin, Chevaley, Hasse*) a při klasifikaci jednoduchých algeber nad číselnými algebraickými tělesy (*Hasse, Albert*). V úzké souvislosti s jinými topologickými methodami má veliký význam v Krullových pracích o struktuře komutativních okruhů a při výstavbě přesných základů algebraické geometrie.

Je patrné, že theorii tak rozvětvenou bylo by nesnadné směstnat do jedné knihy. Kniha Schillingova se soustřeďuje na obecný význam theorie ohodnocení pro algebraickou a číselně theoretickou strukturu těles, komutativních i nekomutativních, jednoduchých algeber, a zabývá se také na př. lokální theorií těles tříd a nekomutativní theorií ideálů. Nepřihlíží však na př. k souvislostem mezi absolutní hodnotou v klasickém smyslu a p-adickým ohodnocením a vůbec se nezabývá užitím theorie ohodnocení v algebraické geometrii.

Podáme stručný obsah díla, takže uvedeme přehled jednotlivých kapitol.

Kap. 1. Obecné vlastnosti ohodnocení, podává základní definice a věty theorie ohodnocení pro tělesa (i nekomutativní) při libovolné jednoduše uspořádané grupě ohodnocení, elementární výsledky o okruzích ohodnocení, vztahy mezi ohodnocením a homomorfismem a konečně rozšíření ohodnocení na algebraická rozšíření těles.

Kap. 2. Úplná tělesa, pojednává o tom, jak lze těleso s ohodnocením rozšířit na širší těleso, tak aby byly zachovány číselně-theoretické vlastnosti původního tělesa vzhledem k danému ohodnocení, zjednodušila se však po adjunkci nových prvků algebraická struktura rozšířeného tělesa. V případě ohodnocení hodnosti 1 (t. j., lze-li považovat grupu ohodnocení za aditivní grupu reálných čísel) je rozšířené těleso doplněním původního tělesa vzhledem k vhodně zvolené metrice. Přitom se užívá jen zcela elementárních vět z theorie doplňování metrických prostorů. Případ ohodnocení obecného typu uvedených v kap. 1 vyžaduje transfinitních úvah. Ve všech případech je vrcholem důkaz jednoduchého číselně theoretického kriteria, Henselovy pomocné věty, která má základní důležitost při uvažování o algebraických vlastnostech doplněných těles.

Kap. 3. Rozvětvovací theorie ohodnocení. Je to zevšeobecnění *Hilbertovy* theorie rozvětvení, odvozené jím pro algebraická číselná tělesa. Theorie je podána ve velmi obecném tvaru, takže výsledků lze užít i na nekonečná rozšíření obecných relativně kompaktních těles. To pak užito na Krullem podanou Galoisovu theorii pro nekonečná rozšíření. Tato kapitola obsahuje také odvození existenčních theorémů pro rozšíření těles při předepsané Galoisově grupě.

Kap. 4. Speciální theorie ideálů, jedná o klasické theorii ideálů, která platí v algebraických číselných tělesech a v tělesech algebraických funkcí jedné proměnné. Systém axiomů pro theorii ideálů udaný *E. Noetherovou* je nahrazen systémem, který požaduje existenci diskretních ohodnocení hodnosti 1 a některé vlastnosti konečnosti a nezávislosti. Systém je tak uspořádán, že po vypuštění jednoho z axiomů dostaneme Artinovu theorii kvasidělitelnosti. Tato theorie má důležitost v úvahách o algebraických varietách a tím i v algebraické geometrii. Dále ukázáno, že zcela jednoduché předpoklady o struktuře ideálů tělesa mají za následek omezení pro algebraickou strukturu tělesa. Konečně jsou některé z výsledků komutativní theorie rozšířeny i na jednoduché algebry.

Kap. 5. Číselná theorie jednoduchých algeber, obsahuje zevšeobecnění theorie ideálů z kapitoly 4 na jednoduché algebry. Hlavním cílem je podat číselnou theorii jednoduchých algeber, pro jichž centra platí klasická theorie ideálů.

Kap. 6. Místní theorie tělesa tříd. V této kapitole pojednáno o tom, jak lze popsat množinu všech Abelových rozšíření nad speciálním úplným tělesem pomocí podgrup multiplikativní grupy příslušného základního tělesa. Výsledná theorie je v jistém smyslu zevšeobecněním theorie rozšíření pomocí odmocnin.

Kap. 7. Struktura úplných těles. Je to pokračování v úvahách kap. 2. Pojednáno zde hlavně o algebraické a topologické struktuře úplných a maximálně úplných těles. Základní těleso F se omezuje různými předpoklady a popisují se strukturové vlastnosti těles (nekomutativních nad F).

Dílo je zakončeno dvěma dodatky a „slovníkem" (Glossary).

Dodatek I. Obecná Galoisova theorie, podává po shrnutí základních vět klasické Galoisovy theorie konečných normálních separabilních rozšíření Galoisovu theorii nekonečných normálních separabilních rozšíření.

Dodatek II. Obecná theorie lineálních (asociativních) algeber (konečné hodnosti nad základním tělesem).

Slovník uvádí některé názvy a věty, jichž se v knize často užívá.

Každá kapitola je zakončena pečlivě sestavenou bibliografií látky v ní projednávané, což usnadňuje hledání ve velmi obsáhlé literatuře o různých směrech theorie ohodnocení.

Kniha obsahuje četné příspěvky autorovy. Snaží se podat theorii ohodnocení vždy co nejobecněji sledujíc stav theorie až do poslední doby. Je to kniha velmi obsažná s rozsahem ne příliš velikým. Aby autor tohoto cíle dosáhl, jsou důkazy podány co nejstručněji, ovšem někdy až na úkor snadné srozumitelnosti.

K. Rychlík, Praha.