BELTRAMIHO VĚTA PRO PARABOLICKÉ BODY PLOCHY

ALOIS URBAN, Praha.

(Došlo 18. září 1952.) 513.735.4

V článku odvozuje autor vztahy mezi geodetickou křivostí asymptotiky a první a druhou křivostí resp. geodetickou křivostí křivky, jež se dotýká asymptotiky v parabolickém bodě určitého druhu. — Z této obdoby Bonnetova vzorce odvozuje pro parabolické body plochy vzorec Beltramiho.

1. Známá Beltramiho věta[1]), jež se týká geodetické křivosti asymptotické křivky plochy a křivosti rovinného řezu plochy její tečnou rovinou, formuluje se jen pro hyperbolické body plochy.[2]) Je však možno vyslovit větu obdobnou Beltramiho větě i pro některé parabolické body plochy, jak na to upozornil FR. VYČICHLO.[3])

V úzké souvislosti s Beltramiho větou je Bonnetův vzorec[4]), který udává vztah mezi geodetickou křivostí asymptotiky a první a druhou křivostí křivky, jež se v uvažovaném hyperbolickém bodě dotýká asymptotiky a jejíž oskulační rovina v tomto bodě splývá s tečnou rovinou plochy. Beltramiho věta je jen jeho speciálním případem pro rovinnou křivku plochy.

V dalším jsou uvedeny věty, které jsou obdobou Bonnetova vzorce a Beltramiho věty a platí v jistých parabolických bodech plochy.

2. Pro reálnou křivku plochy procházející obyčejným bodem plochy uvažované jednak v (obyčejném) prostoru R_3 (při čemž označíme jednotkové vektory tečny, hlavní normály a binormály postupně $\mathbf{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, prvou křivost k_1 a druhou křivost k_2), jednak na ploše (pro jednotkový tečný vektor pišme nyní $\boldsymbol{i} = \mathbf{t}$, jednotkový normální vektor označme $\boldsymbol{j}$[5]) a geodetickou křivost k) platí rovnice[6])

$$k_1\boldsymbol{n} = k\boldsymbol{j} + b_{\lambda\mu}i^\lambda i^\mu \boldsymbol{N}, \tag{2.1}$$

při čemž $b_{\lambda\mu}$[7]) je druhý základní tensor plochy a $\boldsymbol{N}$ její normála.

[1]) [**1**], str. 258 (číslice v lomených závorkách týkají se seznamu literatury uvedeného na konci práce).

[2]) Viz na př. [**3**], str. 325—326, [**5**], II, str. 51, [**7**], str. 407—409.

[3]) [**6**], str. 8—9.

[4]) [**2**], str. 267.

[5]) $\boldsymbol{j}$ normujeme na př. tak, aby úhel vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ v tomto pořádku byl $+\frac{1}{2}\pi$.

[6]) Viz na př. [**3**], str. 283—284.

[7]) $\lambda, \mu, \nu, \omega = \mathrm{I}, \mathrm{II}$.

Derivujeme-li dvakráte (2.1) podle oblouku s uvažované křivky a užijeme-li Frenetových vzorců pro křivku v R_3 a pro křivku na ploše, dostaneme postupně

$$-k_1^2\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{n}+k_1k_2\boldsymbol{b}=\left(-k^2-(ii)^2\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}-(ii)(ij)\right)\cdot+$$
$$+\left(3k(ij)+(iii)\right)\boldsymbol{N}, \tag{2.2}$$

$$\left(-3k_1\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s}+3k\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}+6k(ii)(ij)+3(ii)(iii)\right)\boldsymbol{i}+$$
$$+\left(-k_1^3-k_1k_2^2+\frac{\mathrm{d}^2k_1}{\mathrm{d}s^2}\right)\boldsymbol{n}+\left(2\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s}k_2+k_1\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}s}\right)\boldsymbol{b}=$$
$$=\left(-k^3+\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}s^2}-k(ii)(jj)-5k(ij)^2-2(ij)(iii)-(ii)(iij)\right)\boldsymbol{j}+$$
$$+\left(-4k^2(ii)+4\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}(ij)+3k^2(jj)-(ii)^3-(ii)(ij)^2+\right.$$
$$\left.+6k(iij)+(iiii)\right)\boldsymbol{N}, \tag{2.3}$$

kde jsme pro stručnost položili

$$\begin{aligned}(ii)&=b_{\lambda\mu}i^\lambda i^\mu,\ (ij)=b_{\lambda\mu}i^\lambda j^\mu,\ (jj)=b_{\lambda\mu}j^\lambda j^\mu,\\(iii)&=b_{\lambda\mu\nu}i^\lambda i^\mu i^\nu,\ (iiii)=(D_\omega b_{\lambda\mu\nu})\,i^\lambda i^\mu i^\nu i^\omega;\end{aligned} \tag{2.4}$$

přitom $b_{\omega\lambda\mu}$ je Codazziho tensor plochy[8]) definovaný vztahem

$$b_{\omega\lambda\mu}=D_\omega b_{\lambda\mu}, \tag{2.5}$$

kde D_ω je symbol kovariantní derivace příslušné konexi určené Christoffelovými symboly plochy.

Dosadíme-li

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{j}\cos\varphi+\varepsilon\boldsymbol{N}\sin\varphi,\quad \boldsymbol{b}=\varepsilon^*\varepsilon^{**}(-\boldsymbol{j}\varepsilon\sin\varphi+\boldsymbol{N}\cos\varphi), \tag{2.6}$$

kde $\varepsilon=\pm1$ a kde $\varepsilon^*=\pm1$, $\varepsilon^{**}=\pm1$ jsou určeny relacemi

$$\varepsilon^*=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{N}],\quad \varepsilon^{**}=[\mathbf{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}],^{9)} \tag{2.7}$$

do rovnic (2.1)$\div$(2.3) a užijeme-li toho, že vektory $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{N}$ jsou lineárně nezávislé, nalezneme

(a) $$k_1\cos\varphi=k,$$
(b) $$\varepsilon k_1\sin\varphi=(ii),$$

---

[8]) [5], II, str. 13.

[9]) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ je symbol pro determinant ze souřadnic vektorů $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$.

(c) $$\varepsilon\varepsilon^*\varepsilon^{**}k_1k_2\sin\varphi - \frac{dk_1}{ds}\cos\varphi + \frac{dk}{ds} = (ii)(ij),$$

(d) $$\varepsilon^*\varepsilon^{**}k_1k_2\cos\varphi + \varepsilon\frac{dk_1}{ds}\sin\varphi = 3k(ij) + (iii),$$

(e) $$-k_1\frac{dk_1}{ds} + k\frac{dk}{ds} = -2k(ii)(ij) - (ii)(iii), \tag{2.8}$$

(f) $$\left(-k_1^3 - k_1k_2^2 + \frac{d^2k_1}{ds^2}\right)\cos\varphi - \varepsilon\varepsilon^*\varepsilon^{**}\left(2\frac{dk_1}{ds}k_2 + k_1\frac{dk_2}{ds}\right)\sin\varphi +$$

$$+ k^3 - \frac{d^2k}{ds^2} = k(ii)(jj) + 5k(ij)^2 + 2(ij)(iii) + (ii)(iij),$$

(g) $$\varepsilon\left(-k_1^3 - k_1k_2^2 + \frac{d^2k_1}{ds^2}\right)\sin\varphi + \varepsilon^*\varepsilon^{**}\left(2\frac{dk_1}{ds}k_2 + k_1\frac{dk_2}{ds}\right)\cos\varphi =$$

$$= -4k^2(ii) + 4\frac{dk}{ds}(ij) + 3k^2(jj) - (ii)^3 - (ii)(ij)^2 + 6k(iij) + (iiii).$$ [10])

3. Předpokládejme nyní, že daný bod plochy je obyčejným parabolickým bodem plochy[11]), t. j. že v tomto bodě je normální křivost v jednom z hlavních směrů nulová, ve druhém nenulová. Jsou-li $\underset{1}{i}^\lambda$, $\underset{2}{i}^\lambda$ jednotkové vektory hlavních směrů, pak označení jejich volme tak, aby v uvažovaném bodě bylo

$$\text{a)}\ \frac{1}{R_1} = b_{\lambda\mu}\underset{1}{i}^\lambda\underset{1}{i}^\mu \neq 0,\quad \text{b)}\ \frac{1}{R_2} = b_{\lambda\mu}\underset{2}{i}^\lambda\underset{2}{i}^\mu = 0; \tag{3.1}$$

je tedy v tomto bodě $\underset{2}{i}^\lambda$ současně asymptotickým směrem.

Nechť i^λ je tečný jednotkový vektor křivky, jež se v daném obyčejném parabolickém bodě dotýká asymptotické křivky, t. j. nechť v daném bodě je

$$i^\lambda = \underset{2}{i}^\lambda; \tag{3.2}$$

pak pro tento bod zřejmě platí

$$b_{\lambda\mu}i^\lambda i^\mu = b_{\lambda\mu}\underset{2}{i}^\lambda\underset{2}{i}^\mu = 0 \tag{3.3}$$

a dále — vzhledem k tomu, že v uvažovaném bodě je $j^\lambda = \varepsilon'\underset{1}{i}^\lambda$ ($\varepsilon' = \pm 1$) —

$$b_{\lambda\mu}i^\lambda j^\mu = \varepsilon' b_{\lambda\mu}\underset{1}{i}^\lambda\underset{2}{i}^\mu = 0,\quad b_{\lambda\mu}j^\lambda j^\mu = b_{\lambda\mu}\underset{1}{i}^\lambda\underset{1}{i}^\mu = \frac{1}{R_1}; \tag{3.4}$$

---

[10]) Rovnice $k_1^2 - k^2 = (ii)^2$ byla vypuštěna, neboť je přímým algebraickým důsledkem rovnic (2.8a, b).

[11]) Rozumíme jím bod, pro který tensor $b_{\lambda\mu}$ má hodnost právě 1; body, v nichž $b_{\lambda\mu}$ má hodnost 0, nazývají se rovinné body (viz [5], I, str. 201).

konečně

$$b_{\omega\lambda\mu}\underset{2}{i}^{\omega}\underset{2}{i}^{\lambda}\underset{2}{i}^{\mu} = 0, \tag{3.5}$$

jak najdeme derivováním (podle oblouku asymptotiky) rovnice

$$b_{\lambda\mu}i^{\lambda}i^{\mu} = 0, \tag{3.6}$$

jíž vyhovují asymptotické směry, a dosazením vztahů $i^{\lambda} = \underset{2}{i}^{\lambda}$, $j^{\lambda} = \varepsilon'\underset{1}{i}^{\lambda}$, které platí v daném bodě.

Nyní již snadno dokážeme

Lemma I. *První a druhá křivost a geodetická křivost křivky, která se v obyčejném parabolickém bodě plochy dotýká asymptotických křivek a má s nimi společnou oskulační rovinu, jsou v tomto bodě vázány rovnicemi*

$$\text{a) } k_1 = k, \text{ b) } k_1k_2 = 0, \text{ c) } \frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}, \text{ d) } \frac{\mathrm{d}^2k_1}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}s^2},$$

$$\text{e) } \varepsilon^*\varepsilon^{**}\left(2\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}k_2 + k\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{3}{R_1}k^2 + 6kb_{\omega\lambda\mu}\underset{2}{i}^{\omega}\underset{2}{i}^{\lambda}\underset{2}{j}^{\mu} + (D_{\omega}b_{\lambda\mu\nu})\,\underset{2}{i}^{\omega}\underset{2}{i}^{\lambda}\underset{2}{i}^{\mu}\underset{2}{i}^{\nu}. \tag{3.7}$$

Důkaz. Jelikož oskulační rovina asymptotiky je tečnou rovinou plochy, předpokládáme vlastně $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$; dosazením těchto hodnot a vztahů (3.1)$\div$(3.5) do (2.8) dostáváme (3.7).

Jako důsledek plyne okamžitě:

Pro křivku plochy, jež se v obyčejném parabolickém bodě plochy, který pro ni není stacionární, dotýká asymptotických křivek a má s nimi společnou oskulační rovinu, jest v tomto bodě

$$\text{a) } k_1 = k, \text{ b) } k_2 = 0, \text{ c) } \frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}, \text{ d) } \frac{\mathrm{d}^2k_1}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}s^2},$$

$$\text{e) } \frac{3}{R_1}k^2 + k\left(6b_{\omega\lambda\mu}\underset{2}{i}^{\omega}\underset{2}{i}^{\lambda}\underset{2}{j}^{\mu} - \varepsilon^*\varepsilon^{**}\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}s}\right) + (D_{\omega}b_{\lambda\mu\nu})\,\underset{2}{i}^{\omega}\underset{2}{i}^{\lambda}\underset{2}{i}^{\mu}\underset{2}{i}^{\nu} = 0. \tag{3.8}$$

Poznámka 1. Rovnice (3.8b) je vlastně speciálním případem Bonnetova vzorce (pro obyčejné parabolické body).

Poznámka 2. Z předpokladu, že daný obyčejný parabolický bod není pro uvažované křivky stacionární, plyne ihned ze (3.8e), že v tomto bodě je nutně $(D_{\omega}b_{\lambda\mu\nu})\,\underset{2}{i}^{\omega}\underset{2}{i}^{\lambda}\underset{2}{i}^{\mu}\underset{2}{i}^{\nu} \neq 0$.

4. Abychom mohli odvodit další důsledky z lemma I, všimneme si ještě asymptotických křivek procházejících uvažovaným obyčejným parabolickým bodem. Geodetickou křivost asymptotiky označme $\underset{a}{k}$. Platí:

Lemma II. *V obyčejném parabolickém bodě jsou geodetické křivosti asymptotik vázány kvadratickou rovnicí*

$$2\underset{a}{k}^2 \frac{1}{R_1} + 5\underset{a}{k}\, b_{\omega\lambda\mu} \underset{2}{i}^\omega \underset{2}{i}^\lambda \underset{2}{j}^\mu + (D_\omega b_{\lambda\mu\nu})\, \underset{2}{i}^\omega \underset{2}{i}^\lambda \underset{2}{i}^\mu \underset{2}{i}^\nu = 0.\text{[12]} \tag{4.1}$$

Důkaz. Derivujeme-li rovnici (3.6) asymptotik dvakráte podle oblouku asymptotiky, najdeme rovnici

$$(D_\omega b_{\lambda\mu\nu})\, i^\omega i^\lambda i^\mu i^\nu + 5\underset{a}{k}\, b_{\omega\lambda\mu} i^\omega i^\lambda j^\mu + 2\underset{a}{k}^2 b_{\lambda\mu} j^\lambda j^\mu - 2\underset{a}{k}^2 b_{\lambda\mu} i^\lambda i^\lambda + \\ + 2 \frac{\mathrm{d}\underset{a}{k}}{\mathrm{d}s} b_{\lambda\mu} i^\lambda j^\mu = 0, \tag{4.2}$$

která se pro daný bod vzhledem k (3.2)÷(3.4) redukuje právě na (4.1).

Z lemma I. a II. plyne bezprostředně:

Nechť na ploše existuje křivka, která v obyčejném parabolickém bodě nemá stacionární bod a má v tomto bodě s asymptotikami společnou tečnu a oskulační rovinu. Pak uvažovaný bod není stacionární ani pro asymptotické křivky.

V dalším budeme předpokládat, že v uvažovaném obyčejném parabolickém bodě nemají asymptotické křivky stacionární bod, t. j. předpokládáme, že v tomto bodě je

$$(D_\omega b_{\lambda\mu\nu})\, \underset{2}{i}^\omega \underset{2}{i}^\lambda \underset{2}{i}^\mu \underset{2}{i}^\nu \neq 0. \tag{4.3}$$

Nalezené rovnice (3.8e) a (4.1) můžeme ještě upravit tím, že najdeme jiné vyjádření pro $b_{\omega\mu\lambda} i^\omega i^\mu j^\lambda$ a $(D_\omega b_{\lambda\mu\nu})\, i^\omega i^\lambda i^\mu i^\nu$ (kde i^λ, j^λ jsou jednotkové tečné a normální vektory asymptotické křivky) pro daný obyčejný parabolický bod.

Derivujeme-li totiž rovnici $b_{\lambda\mu} \underset{1}{i}^\lambda \underset{2}{i}^\mu = 0$ (platící pro hlavní směry) jedenkráte podle oblouku $\underset{2}{s}$ druhé hlavní křivky a vztah $b_{\lambda\mu} \underset{2}{i}^\lambda \underset{2}{i}^\mu = \frac{1}{R_2}$ dvakráte podle téhož oblouku a užijeme-li relací (3.2)÷(3.4), jež platí pro hlavní směry a asymptotický směr v uvažovaném obyčejném parabolickém bodě, najdeme

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad b_{\omega\lambda\mu} \underset{2}{i}^\omega \underset{2}{i}^\lambda \underset{2}{j}^\mu = -\underset{2}{k} \frac{1}{R_1}, \\ &\text{b)}\quad (D_\omega b_{\lambda\mu\nu})\, \underset{2}{i}^\omega \underset{2}{i}^\lambda \underset{2}{i}^\mu \underset{2}{i}^\nu = 3\underset{2}{k}^2 \frac{1}{R_1} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\underset{2}{s}^2} \frac{1}{R_2}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

---

[12]) [**6**], str. 8.

Po dosazení (4.4) do (3.8e) a (4.1) dostáváme rovnice

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}\ 3\underset{2}{k}^2 - 6\underset{2}{k}k + 3k^2 - \varepsilon^*\varepsilon^{**}R_1 k \underset{2}{\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}s}} + R_1 \underset{2}{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}} \frac{1}{R_2} = 0,\\
&\text{b)}\ 3\underset{2}{k}^2 - 5\underset{2}{k}\underset{a}{k} + 2\underset{a}{k}^2 + R_1 \underset{2}{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}} \frac{1}{R_2} = 0,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

kterých v dalším budeme užívat.

5. Nejprve doplníme Bonnetův vzorec (3.8b); platí totiž:

Nechť obyčejný parabolický bod plochy není stacionární pro asymptotické křivky ani pro křivku K, jež má s asymptotikami v tomto bodě společnou tečnu a oskulační rovinu. Pak geodetické křivosti asymptotických křivek, geodetická a druhá křivost křivky K jsou v tomto bodě vázány rovnicí

$$3(k - \underset{a}{k})^2(3k - 2\underset{a}{k})^2 = R_1\left(\varepsilon^*\varepsilon^{**}k\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}s} - \underset{2}{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}}\frac{1}{R_2}\right)(6k - 5\underset{a}{k})^2. \tag{5.1}$$

D ů k a z. Rovnici (5.1) dostaneme vyloučením $\underset{2}{k}$ z (4.5).

P o z n á m k a. Pro K v tomto bodě platí ovšem také

$$\text{a)}\ \underset{1}{k} = k,\ \text{b)}\ \frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s},\ \text{c)}\ \frac{\mathrm{d}^2k_1}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}s^2},\ \text{d)}\ k_2 = 0. \tag{5.2}$$

V dalším budeme uvažovat průsečnou křivku plochy s tečnou rovinou v jejím obyčejném parabolickém bodě. Geodetické křivosti větví průsečné křivky označme $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, geodetické křivosti asymptotik označme $\underset{a}{k}^{(1)}$, $\underset{a}{k}^{(2)}$. Dokážeme, že platí:

Věta I. *Nechť obyčejný parabolický bod plochy není stacionární pro asymptotické křivky; pak*

1. *není stacionární pro průsečnou křivku K plochy tečnou rovinou v tomto bodě,*

2. *pro geodetické křivosti obou větví rovinného řezu K a geodetické křivosti obou asymptotik platí*

$$\text{a)}\ \underset{a}{k}^{(1)}\underset{a}{k}^{(2)} = \tfrac{3}{2}k^{(1)}k^{(2)},\quad \text{b)}\ \underset{a}{k}^{(1)} + \underset{a}{k}^{(2)} = \tfrac{5}{4}(k^{(1)} + k^{(2)}). \tag{5.3}$$

D ů k a z. Obě větve průsečné křivky plochy s tečnou rovinou v obyčejném parabolickém bodě plochy mají v tomto bodě společnou tečnu a tedy pro průsečnou křivku platí lemma I. Tvrzení 1 plyne z (3.7e), neboť jednak podle předpokladu o asymptotikách je $(D_w b_{\lambda\mu\nu})\,\underset{2}{i}^{\omega}\underset{2}{i}^{\lambda}\underset{2}{i}^{\mu}\underset{2}{i}^{\nu} \neq$

$\neq 0$, jednak pro průsečnou křivku je $k_2 = 0$. Tvrzení 2 plyne z rovnic (4.5), kam je třeba ještě položit $\frac{dk_2}{ds} = 0$, t. j. z rovnic

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}\ 3k^2 - 6kk_2 + 3k_2^2 + R_1 \frac{d^2}{ds_2^2}\frac{1}{R_2} = 0,\\
&\text{b)}\ 2k_a^2 - 5k_a k_2 + 3k_2^2 + R_1 \frac{d^2}{ds_2^2}\frac{1}{R_2} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Věta II. *Nutná a dostačující podmínka pro to, aby v obyčejném parabolickém bodě plochy, který není stacionární pro asymptotické křivky, platila pro jednu větev průsečné křivky tečné roviny s plochou a jednu asymptotiku Beltramiho podmínka*

$$k_a = \tfrac{3}{2}k, \tag{5.5}$$

jest: obě větve průsečné křivky v tomto bodě mají touž geodetickou křivost.

Důkaz. Podle (5.3a) je zřejmé, že nutná a dostačující podmínka pro to, aby pro jednu větev průsečné křivky a jednu asymptotiku v obyčejném parabolickém bodě plochy platila podmínka (5.5), jest, aby pro druhou větev průsečné křivky a druhou asymptotiku platila podmínka

$$k_a = k. \tag{5.6}$$

K tomu je však nutné a stačí — jak plyne z rovnic (5.4) — aby

$$\left(3k_2^2 + R_1 \frac{d^2}{ds_2^2}\frac{1}{R_2}\right) R_1 \frac{d^2}{ds_2^2}\frac{1}{R_2} = 0, \tag{5.7}$$

což vzhledem k nerovnostem (3.1a) a (4.3) dává nutnou a dostačující podmínku ve tvaru

$$\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{R_2} = 0. \tag{5.8}$$

To znamená, že nutná a dostačující podmínka, aby platila Beltramiho podmínka, je, aby rovnice (5.4) se redukovaly na

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}\ k^2 - 2kk_2 + k_2^2 = 0,\\
&\text{b)}\ 2k_a^2 - 5k_a k_2 + 3k_2^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Odtud již bezprostředně plyne dokazované tvrzení.

Poznámka. Uveďme, že lze snadno zkonstruovat plochy s takovými obyčejnými parabolickými body, že v nich jsou splněny předpoklady věty II a a) neplatí, b) platí Beltramiho podmínka.

Tak pro plochu $z = \frac{1}{2}(x + y)^2 + (x + y)(2x^2 + y^2) + 4x^2y^2$ je bod (0; 0; 0) obyčejným parabolickým bodem, ve kterém jsou splněny předpoklady věty II, ale neplatí Beltramiho podmínka; pro tento bod najdeme $\dfrac{1}{R_1} = 2, \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2_2} \dfrac{1}{R_2} = -3$, $\underset{2}{k} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ a tedy $k^{(1)} = \sqrt{2}$, $k^{(2)} = 2\sqrt{2}$, t. j. $k^{(1)} \neq k^{(2)}$.

Pro plochu $z = \frac{1}{2}(x + y)^2 - (x + y)(x^2 + y^2) + 2x^2y^2$ je rovněž bod (0; 0; 0) obyčejným parabolickým bodem, v němž jsou splněny předpoklady věty II; tentokráte však je splněna Beltramiho podmínka; v tomto bodě je totiž $\dfrac{1}{R_1} = 2, \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2_2} \dfrac{1}{R_2} = 0$, $\underset{2}{k} = \sqrt{2}$ a tedy $k^{(1)} = k^{(2)} = \underset{a}{k^{(1)}} = \underset{2}{k}$, $\underset{a}{k^{(2)}} = \frac{3}{2}k^{(2)}$.

Jako snadný důsledek předchozích úvah ještě dokážeme:

Nechť na (nerozvinutelné) ploše existuje křivka obyčejných parabolických bodů, jež je současně asymptotickou křivkou. Pak v každém jejím bodě, jenž není stacionární, platí pro geodetickou křivost jedné z asymptotik a geodetickou křivost větve řezu plochy její tečnou rovinou Beltramiho podmínka (5.5).

Důkaz. Předpokládejme, že na dané nerozvinutelné ploše existuje křivka K obyčejných parabolických bodů o jednotkovém tečném vektoru i^λ. Nechť K je současně asymptotickou křivkou. Označíme-li $\underset{2}{i^\lambda}$ jednotkový tečný vektor hlavní křivky, jež prochází bodem křivky K a jež se jí v tomto bodě dotýká, pak podél křivky K je stále $i^\lambda = \underset{2}{i^\lambda}$ a tedy $\dfrac{1}{R_2} = 0$. Odtud plyne $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \dfrac{1}{R_2} = 0$ podél K (kde s je oblouk křivky K). Jestliže se nyní omezíme na body, jež nejsou pro K stacionární, pak pro k a $\underset{a}{k}$ dostáváme rovnice (5.8), z nichž již plyne (5.5).

Poznámka. Existuje-li na ploše rovinná křivka K, jež je dotykovou křivkou tečné roviny plochy, pak je K křivkou parabolických bodů plochy a současně její asymptotickou křivkou.[13])

---

[13]) Normály $\boldsymbol{N}$ plochy $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\xi^\lambda)$ podél rovinné křivky K o rovnicích $\xi^\lambda =$

(Pokračování pozn. na protější straně)

Na př. na anuloidu existují dvě kružnice parabolických bodů uvedené vlastnosti; v každém z těchto bodů platí tedy Beltramiho podmínka, protože každý z nich je obyčejný parabolický (a ovšem není na uvedené kružnici stacionární). Je-li $a > 0$ poloměr těchto kružnic, pak pro křivost asymptotiky (různé od zmíněné kružnice) jest $\underset{a}{k} = \frac{3}{2a}$. [14])

LITERATURA.

[**1**] *Beltrami E.*: Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface. Nouv. Annal. (**2**), 4, 1865.

[**2**] *Bonnet O.*: Note sur l'article précédant. Nouv. Annal. (**2**), 4, 1865.

[**3**] *Hlavatý V.*: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, Praha 1937.

[**4**] *Julia G.*: Exercices d'Analyse, I, Paris, 1928.

[**5**] *Kagan V. F.*: Osnovy teorii poverchnostej v tenzornom izloženii; Moskva, Leningrad, I, 1947, II, 1948.

[**6**] *Vyčichlo Fr.*: Příspěvek k zobecněné větě Beltramiho, Rozpravy II. tř. České akademie, L, 2.

[**7**] *Vygodskij M. J.*: Differencial'naja geometrija. Moskva, Leningrad, 1949.

$= \xi^\lambda(s)$, kde s je její oblouk, jež je dotykovou křivkou tečné roviny plochy, jsou rovnoběžné, t. j.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{N}_\lambda i^\lambda = 0 \qquad (*)$$

$\left(i^\lambda = \frac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}s},\ \boldsymbol{N}_\lambda = \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \xi^\lambda}\right)$ a tedy vzhledem k tomu, že $b_{\lambda\mu}\,\mathrm{d}\xi^\lambda\,\mathrm{d}\xi^\mu = -\boldsymbol{r}_\lambda \boldsymbol{N}_\mu\,\mathrm{d}\xi^\lambda\,\mathrm{d}\xi^\mu$ $\left(\boldsymbol{r}_\lambda = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^\lambda}\right)$, je směr i^λ asymptotický. Dále je Det. $|b_{\lambda\mu}|$ = Det. $|-\boldsymbol{r}_\lambda \boldsymbol{N}_\mu| = [\boldsymbol{r}_{\mathrm{I}}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{II}}]$. . $[\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}, \boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}]$ (kde $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ značí vnější součin vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$); protože podél K je $[\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}, \boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}] = 0$ — jak plyne z (*) —, jsou body křivky K parabolické.

[14]) Viz na př. [**4**], str. 278; ostatně pro případ anuloidu $x = (a + r\cos u)\cos v$, $y = (a + r\cos u)\sin v$, $z = r\sin u$ ($a > 0$, $r > 0$, $0 \leqq u \leqq 2\pi$, $0 \leqq v \leqq 2\pi$) snadno přímo najdeme: $R_1 = r$; orientujeme-li $\underset{2}{\boldsymbol{j}}$ tak, aby podél kružnice $u = \frac{1}{2}\pi$ resp. $u = \frac{3}{2}\pi$ svíraly $\underset{2}{\boldsymbol{l}}$ a $\underset{2}{\boldsymbol{j}}$ v tomto pořádku úhel $-\frac{1}{2}\pi$ resp. $-\frac{3}{2}\pi$, pak vzhledem k volbě $[\underset{2}{\boldsymbol{l}}, \underset{2}{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{N}] = \varepsilon^*$ dostáváme pro tyto kružnice $\underset{2}{k} = \frac{1}{a}$ a dále $b_{\omega\lambda\mu}\underset{2}{i^\omega}\underset{2}{i^\lambda}\underset{2}{i^\mu} = -\frac{1}{ar}$, $(D_\omega b_{\lambda\mu\nu})\underset{2}{i^\omega}\underset{2}{i^\lambda}\underset{2}{i^\mu}\underset{2}{i^\nu} = \frac{3}{a^2 r}$, tedy $k^{(1)} = k^{(2)} = \underset{a}{k^{(1)}} = \underset{2}{k} = \frac{1}{a}$, $\underset{a}{k^{(2)}} = \frac{3}{2}k^{(2)} = \frac{3}{2a}$.