Časopis pro pěstování matematiky

Karel Černý

Poznámka k diofantickým aproximacím

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 3, 241--242

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117046`

POZNÁMKA K DIOFANTICKÝM APROXIMACÍM

KAREL ČERNÝ, Praha.

(Došlo 31. ledna 1952.)

DI 511.72

V práci je jednoduchým způsobem užitím jedné *Chinčinovy* věty o nehomogenních lineárních aproximacích a užitím *Hurwitzova* doplňku o ostrosti této věty dokázána tato věta z theorie diofantických aproximací.

Budiž $\xi > 0$ irracionální, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $s > 0$ libovolná čísla celá, $V > 0$, $\varepsilon > 0$.

Pak existuje dvojice u, v přirozených čísel tak, že $v > V$, $u \equiv a \pmod s$, $v \equiv b \pmod s$

$$\left|\xi - \frac{u}{v}\right| < \frac{(1+\varepsilon)s^2}{\sqrt{5}v^2}.$$

Je ukázáno, že $\sqrt{5}$ ve jmenovateli posledního zlomku nelze nahraditi konstantou větší.

Tento výsledek představuje tedy zostření věty *Hartmannovy* (citované v práci) dokonce je vyslovena ve formě nejostřejší.

S. Hartman v práci: *Sur une condition supplémentaire dans les approximations diophantiques* (Colloquium Math. *2*, 48—51, 1949) dokázal na základě theorie řetězových zlomků větu, která dává odpověď na otázku položenou mu *S. Mazurem*:

Budiž ξ kladné iracionální číslo, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $s > 0$ libovolná celá čísla. Potom existuje nekonečně mnoho párů přirozených čísel u, v, které vyhovují podmínkám

$$\left|\xi - \frac{u}{v}\right| \leqq \frac{2s^2}{v^2} \tag{1}$$

$$u \equiv a \pmod s, \quad v \equiv b \pmod s. \tag{2}$$

Dále v práci poznamenává, že exponent v čitateli nelze zmenšit — to ukazuje případ $a = 0$, $b = 0$.

V recensi této práce v *Mathematical Reviews* (Vol *12*, 1951, p. 807) poznamenává *J. F. Koksma*, že dokáže, že koeficient 2 lze ještě „trochu" zmenšit.

Avšak tento výsledek — dokonce s konečnou odpovědí o míře aproximace — jest bezprostředním důsledkem jedné Chinčinovy věty o nehomogenních lineárních aproximacích. *Chinčin* v *Math. Annalen* (Bd. 111, 1935, S. 631—637) dokázal větu:

Je-li ξ iracionální, α reálné číslo a $\varepsilon > 0$, potom nerovnina

$$|q\xi - p - \alpha| < \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{5}q} \tag{3}$$

má nekonečně mnoho řešení celými $q > 0$, p. (tedy pro $\xi > 0$ také nekonečně mnoho řešení přirozenými p, q).

Dále z věty *Hurwitzovy* vyplývá, že konstanta $\sqrt{5}$ nemůže již být nahražena větší. (Tvrzení by bylo nesprávné pro jistá ξ a $\alpha = 0$, kdyby ve jmenovateli (3) konstanta $\sqrt{5}$ byla nahražena konstantou $c > \sqrt{5}$.)

Budež tedy $\xi > 0$ iracionální, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $s > 0$ libovolná celá čísla. Kladme

$$\alpha = -\frac{b\xi - a}{s},$$

potom podle Chinčinovy věty existuje ke každému $\bar{\varepsilon} > 0$ nekonečně mnoho párů přirozených čísel p, q tak, že

$$s\left|q\xi + \frac{b\xi - a}{s} - p\right| < \frac{s(1+\bar{\varepsilon})}{\sqrt{5}q},$$

a tedy

$$|v\xi - u| < \frac{s(1+\bar{\varepsilon})}{\sqrt{5}q}, \tag{4}$$

kde

$$v = b + qs, \quad u = a + ps, \tag{5}$$

jsou přirozená čísla vyhovující podmínkám (2) Avšak pro dosti velká q jest

$$\frac{1+\bar{\varepsilon}}{q} < \frac{s(1+\varepsilon)}{b+qs}, \quad \text{kde } \varepsilon > \bar{\varepsilon}. \tag{6}$$

Máme tedy podle (4), (5), (6) a podle Hurwitzovy věty tento výsledek:

Budiž $\xi > 0$ iracionální, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $s > 0$ celá čísla $\varepsilon > 0$. Potom existuje nekonečně mnoho párů přirozených čísel u, v, které vyhovují podmínkám

$$\left|\xi - \frac{u}{v}\right| < \frac{(1+\varepsilon)s^2}{\sqrt{5}v^2}, \tag{7}$$

$$u \equiv a\ (\mathrm{mod}\, s), \quad v \equiv b\ (\mathrm{mod}\, s).$$

Konstanta $\sqrt{5}$ jest nejlepší možná konstanta, t. j. tvrzení by bylo nesprávné, kdyby $\sqrt{5}$ ve jmenovateli (7) byla nahrazena konstantou větší.