Ivo Babuška
Rovinný problém pružnosti

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 3, 227--240

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117045

ROVINNÝ PROBLÉM PRUŽNOSTI

IVO BABUŠKA, Praha.

(Došlo 30. dubna 1952.)

DI
539.31.001.2

V tomto referátě bude pojednáno o rovinném problému klasické theorie pružnosti. Klasická theorie předpokládá malé deformace a materiál homogenní, isotropní a splňující lineární *Hookův* zákon.

Nejprve několik slov o této klasické theorii, resp. o souvislosti této klasické theorie s theorií obecně nelineární.

Zatím co v theorii parciálních rovnic druhého řádu byla již dosti studována závislost řešení na okrajových podmínkách, dále pak různé konvergentní procesy, které vedly k novým pojmům zobecněného řešení (na př. *Sobolev*) jakož i k různým odhadům, není asi nic známo o tom, zda byla prováděna obecná analysa diferenciálních rovnic matematické pružnosti.

Jedná se zejména o vliv nehomogenity a anisotropie materiálu, o vliv konečných deformací, v tom je i zahrnut problém nespojitých okrajových podmínek, *Saint Venantův* princip a pod. O některých problémech se zmíníme ještě dále.

Dotkněme se zde na př. problému konečných deformací v souvislosti s klasickou theorií. Fysikálně se zdá toto tvrzení velmi názorné.

Budiž těleso $\mathfrak{P}$ namáháno vnějším zatížením p. Budiž $T_1(p)$ řešení při uvažování konečných deformací, $T_2(p)$ řešení klasické. Potom

$$\frac{T_2(cp)}{T_1(cp)} \to 1 \text{ pro } c \to 0.$$

Toto tvrzení by přibližně vyjadřovalo, že klasická theorie je lineární aproximací theorie konečných deformací.

Není mi nic známo o tom, zda je dokázáno nějaké tvrzení podobného charakteru.

Tímto příkladem jsem chtěl pouze ilustrovat, co míním obecnou analysou rovnic matematické pružnosti.

Přejděme nyní k rovinnému problému klasické theorie pružnosti. Pro jednoduchost budu se zabývat pouze tělesy jednoduše souvislými ohraničenými hladkou jednoduchou křivkou. O ostatních případech zejména pro křivky nehladké zmíním se později.

Matematická formulace rovinného problému pružnosti zní:

Budiž Ω vnitřek jednoduché hladké křivky K^*. Jest nalézti funkce (složky napětí) X_x, $X_y = Y_x$, Y_y *definované na Ω, se spojitými derivacemi až do řádu druhého včetně, takové*, aby

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= 0 \\ \Delta(X_x + Y_y) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

kde

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

s předepsanými okrajovými podmínkami.

Pojem okrajové podmínky je pojem komplikovanější, než se na první pohled zdá. Ve většině knih je tento pojem definován velmi nepřesně a neurčitě.

Domnívám se, že zde a v oblastech příbuzných jest velké pole působnosti pro další práci.

Zdržme se poněkud u tohoto problému:

Definujme pojem *vektoru napětí.*

Budiž $a \in \Omega$; budiž s orientovaný lineární element procházející bodem a a n jeho pravá normála. Potom složky vektoru napětí působící se strany normály jsou

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) \\ Y_n &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y). \end{aligned} \tag{2}$$

Nutno si ovšem uvědomit, že tento vektor napětí máme definován v Ω a nikoliv na K^*. Jestliže ovšem funkce X_x, X_y, Y_y jsou spojitě prodlužitelné na K^*, potom je zřejmé, že vektor napětí možno definovat i na hranici K^*.

Jestliže však X_x, X_y, Y_y nejsou spojitě prodlužitelné na hranici, nastávají komplikace.

Nelze se tedy vyhnouti těmto komplikacím tím, že budeme předpokládat spojitou prodlužitelnost? A takto se téměř vždy dělá!

Tedy v tomto případě by problém matematické pružnosti znamenal nalezení funkcí X_x, X_y, Y_y spojitě prodlužitelných na K^*, vyhovujících rovnicím (1), aby na hranici K platilo

$$X_n(s) = F_1(s), \quad Y_n(s) = F_2(s), \quad s \in K^*,$$

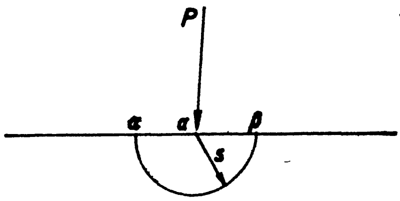
kde F_1, F_2 jsou předem dané funkce.

Takto je v literatuře — hlavně v učebnicích — nejčastěji problém formulován.

Tato formulace však vyjadřuje, že *nemůže existovat* řešení při nespojité funkci F_1 resp. F_2; a víme, že v praxi převážně jsou vnější zatížení nespojitá (osamělá břemena zatím vylučme).

Tedy je zřejmo, že uvedená běžná formulace jest naprosto nedostačující. V knihách většinou na tuto okolnost není vůbec brán zřetel.

Jak tedy máme definovat problém? Jedna cesta je zřejmá. Budeme sledovat fysikálně vznik abstraktního pojmu nespojitého zatížení a analogicky budeme definovat problém. *Jestliže nespojité zatížení* F_i, ($i = 1, 2$) *můžeme považovat za limitu spojitého zatížení* — a většinou F_i jsou prvé třídy, t. j. mají tuto vlastnost — *potom definujeme řešení rovněž jako limitu řešení získaných při spojitých zatíženích.* Jest ovšem otázkou, zda-li tato limita existuje *nezávisle* na způsobu konvergence a zda-li i potom jsou splněny rovnice (1) (konečně tento požadavek není ani nutný). Tato otázka je vlastně problémem principu *Saint Venanta*, tím se však budeme zabývat až dále. Z tohoto principu plyne, že odpověď na ony otázky je kladná, t. j. existuje limita nezávislá na způsobu konvergence a vyhovuje rovnicím (1).


Obr. 1.

Tím je problém formulace řešen. Ovšem tato formulace jest někdy velmi nevhodná, zvláště, když řešení dostáváme často zkusmo. Je obtížné potom soudit, zda uhodnuté řešení vzniklo jako limita.

Velkou roli hrají dále *osamělá břemena*. Ukažme nejprve běžné formulace na příkladu poloroviny zatížené osamělým břemenem, působícím v a.

Hledáme takové řešení, aby výslednice napětí určených řešením na polokružnici $\widehat{\alpha\beta}$ (viz obr. 1), kde úsečka $\overline{\alpha\beta}$ obsahuje bod a uvnitř, a jejíž poloměr je ϱ, t. j. hlavní vektor $[X(\varrho), Y(\varrho)]$, konvergoval k P pro $\varrho \to 0$, t. j. $\lim\limits_{\varrho\to 0} X(\varrho) = 0$, $\lim\limits_{\varrho\to 0} Y(\varrho) = P$.

Je zřejmo, že se ještě musí předpokládat, že moment sil určených řešením, působících na $\widehat{\alpha\beta}$ (hlavní moment) vzhledem k bodu a, je roven 0. Taková formulace je nedostačující. Lze totiž nalézti řešení, které má uvedené vlastnosti, když polokružnice $\widehat{\alpha\beta}$ mají středy v a, ale limita hlavního vektoru neexistuje, když středy kružnice $\widehat{\alpha\beta}$ nebudou v a, ale budou se k němu blížit pro $\varrho \to 0$.

Jest ovšem také otázkou, závisí-li limita na křivce spojující body α, β nebo jen na koncových bodech α, β. Lze však ukázat, že hlavní vektor závisí jedině na koncových bodech α, β, nikoliv na tvaru oblouku.

Je tedy zřejmé další nutné doplnění definice pojmu osamělého břemene, t. j. musíme žádat, aby limita existovala nezávisle na způsobu konvergence bodů α, β k bodu a. Jest nyní definice vyhovující? I nyní lze najíti protipříklad. Uvedeme jeden jednoduchý.

Hledejme opět napětí u pružné poloroviny zatížené osamělým břemenem $P = 1$ působícím v bodě a ve smyslu právě uvedeném.

Běžné řešení užívající polárních souřadnic, jest

$$\widehat{rr} = \frac{1}{r} \cos\delta,$$

$$\widehat{\delta\delta} = 0$$

$$\widehat{r\delta} = 0,$$

kde $\widehat{rr}$ značí napětí normální radiální, $\widehat{\delta\delta}$ značí napětí normální ve směru kolmice na radius, $\widehat{r\delta}$ značí napětí tangenciální.

Avšak také vztahy

$$\widehat{rr} = -\frac{1}{r^4} [3 \cos 4\delta + \cos 2\delta]$$

$$\widehat{\delta\delta} = \frac{1}{r^4} [\cos 4\delta + \cos 2\delta]$$

$$\widehat{r\delta} = -\frac{1}{r^4} [2 \sin 4\delta + \sin 2\delta]$$

určují řešení našeho problému, neboť lze ukázat, že vyhovuje všem výše uvedeným podmínkám.

Jak tedy definovat pojem řešení při osamělém břemeni? Zřejmě můžeme postupovat podobným způsobem jako při nespojitých okrajových podmínkách. Zde ovšem není věc tak zřejmá jako dříve, ale i zde lze ukázat, že limita existuje *nezávisle* na způsobu konvergence a řešení vyhovuje rovnicím (1). Toto tvrzení je opět důsledkem principu Saint Venanta. Tento princip však obecně dokázán dodnes není.

Vraťme se ještě k uvedeným dvěma řešením osamělého břemena a zkoumejme blíže otázku unicity. Je známo, že již v r. 1858 *Kirchhoff* dokázal *unicitu* problému matematické theorie pružnosti. Důkaz provedl pomocí *Greenovy* věty o vztahu křivočarého integrálu s integrálem dvojným. Nutno si uvědomit, že Greenova věta předpokládá spojitou prodlužitelnost funkce, t. j. Kirchhoffův důkaz platí nejvýše pro *spojité zatížení*.

Nyní ukážeme několik způsobů řešení matematického problému pružnosti. Pro jednoduchost, aby vynikla hlavní myšlenka jednotlivých postupů, ukážeme zde konkretní řešení pro kruh, a to t. zv. řešení prvního problému, t. j., když na hranici jsou předepsána vnější napětí, a to tak, že předpokládáme spojitou prodlužitelnost funkcí X_x, X_y, Y_y na hranici.

Dále pak bude naznačeno zobecnění uvedených method pro obecné oblasti. Při všech methodách je použito funkcí komplexní proměnné.

Již v roce 1862 objevil *G. B. Airy*, že nutná a postačující podmínka, aby funkce X_x, X_y, Y_y vyhovovaly rovnicím (1) jest, aby existovala biharmonická funkce $U(x, y)$ se spojitými derivacemi až do řádu 4 včetně, taková, že

$$X_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}.$$

Zřejmě, když X_x, X_y, Y_y jsou spojitě prodlužitelné na hranici, potom i U je spojitě prodlužitelná na hranici.

V roce 1896 upozornil *Goursat*, že každá biharmonická funkce se může psát ve tvaru

$$U(x, y) = R(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)) \tag{3}$$

kde φ, χ jsou holomorfní, případně analytické funkce.

Již dříve několik autorů zavedlo komplexní proměnnou do matematické theorie pružnosti. Uvedeme na př. *Loveho, Galerkina.* Teprve však sovětský matematik *Muschelišvili* a jeho škola zavedla důsledně a účinně theorii analytických funkcí do matematické theorie pružnosti. Velmi důležitou úlohu zde hrají práce *Privalovovy* zejména o integrálu *Cauchyova* typu.

Rozepsáním (3) snadno zjistíme

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \tag{4}$$

kde

$$\psi(z) = \chi'(z).$$

Dále

$$X_x + Y_y = 4\mathrm{R}[\varphi'(z)] = 4\mathrm{R}[\Phi(z)] = 2[\overline{\Phi(z)} + \Phi(z)], \tag{5}$$

kde

$$\varphi'(z) = \Phi(z),$$

$$Y_y - X_x + 2\mathrm{i}X_y = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \tag{6}$$

když

$$\Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z),$$

$$Y_y - \mathrm{i}X_y = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \overline{z\Phi'(z) + \Psi(z)}. \tag{7}$$

Snadno se dále vypočte vektor napětí

$$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cos(n, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} \cos(n, y)$$

$$Y_n = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos(n, y) - \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} \cos(n, x)$$

a hlavní vektor pro oblouk $\widehat{ab}$ jest

$$X + \mathrm{i}Y = \int_{\widehat{ab}} (X_n + \mathrm{i}Y_n)\, \mathrm{d}s = -\,\mathrm{i}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial U}{\partial y}\right]_a^b =$$

$$= -\,\mathrm{i}[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_a^b \tag{8}$$

když $[f(z)]_a^b$ značí přírůstek funkce, t. j. $f(b) - f(a)$.

Podobným způsobem možno vyjádřit hlavní moment působící na oblouk $\widehat{ab}$, a určiti vzorec pro deformace, resp. posunutí.

Vidíme tedy, že mezi funkcemi φ, χ resp. φ, ψ — které dále nazývejme funkcemi napjatosti — a mezi stavem napjatosti, — t. j. funkcemi X_x, X_y, Y_y jest určitá korespondence.

Zkoumejme nyní jak dalece je tato korespondence určena, jinými slovy, jak dalece se mohou od sebe lišit funkce napjatosti vyjadřující jeden stav napjatosti.

Podle (5) jest

$$X_x + Y_y = 4\mathrm{R}[\Phi(z)].$$

Tedy $\Phi(z)$ je určena až na ryze imaginární konstantu Ci, z čehož plyne, že φ je určena až na výraz $C\mathrm{i}z + \gamma$, kde γ jest komplexní konstanta.

Z rovnice (6) pak plyne, že Ψ je určena jednoznačně a tedy ψ je určena až na konstantu.

Dále předpokládejme, že funkce φ, φ', ψ jsou spojitě prodlužitelné na hranici.

Jsou-li dána vnější napětí na hranici, je známa i funkce

$$f(s) = \mathrm{i}\int_{s_0}^{s} (X_n + iY_n)\, \mathrm{d}s, \quad s \in K^*. \tag{9}$$

Je zřejmo, že f je určeno až na konstantu, a poněvadž jsou splněny součtové podmínky rovnováhy, jest $f(s)$ spojitá.

Uvažujme nyní o rovnici (8) a hledejme funkce φ, φ', ψ spojitě prodlužitelné na hranici tak, aby zde platilo

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + k = f(s) \quad \text{pro } z = s \tag{10}$$

Vzhledem k určitosti funkcí napjatosti je možno vynechat konstantu k na levé straně (10), a žádat, aby

$$\varphi(0) = 0, \quad I[\varphi'(0)] = 0.$$

O ψ ovšem nemůžeme již říci ničeho dalšího. Tedy

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f(s) \qquad \text{pro } z = s \tag{10'}$$

Připomeňme, že vzhledem k spojité prodlužitelnosti funkcí φ, ψ, φ' řešení apriori může existovat jen tehdy, je-li f spojitá. Pro určitost ještě opakujme, že budeme provádět výpočet *jednotkového otevřeného kruhu K o hranici γ.*

Poněvadž ψ je prodlužitelná na γ, tedy podle Cauchyho věty je

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma \qquad \begin{matrix} z \in K \\ \sigma \in \gamma \end{matrix}$$

Připomeňme si nyní ještě některé věty z theorie komplexní proměnné, které budeme potřebovat.

Věta 1. *Nutná a postačující podmínka, aby spojitá $g(\sigma)$, $\sigma \in \gamma$ byla hraniční hodnotou funkce holomorfní vně K, spojitě prodlužitelné na γ jest, aby*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma = a \qquad \textit{pro každé} \ \begin{matrix} z \in K \\ \sigma \in \gamma \end{matrix}$$

při čemž $a = g(\infty)$.

Věta 2. *Budiž g holomorfní vně K, spojitě prodlužitelná na γ, nechť dále g v okolí (∞) je tvaru*

$$g = a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \dots$$

potom

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - z} = a_0 + z a_1 \qquad \begin{matrix} z \in K \\ \gamma \in \sigma \end{matrix}$$

když obíháme γ v kladném směru.

Věta 3. *Budiž f holomorfní v K, potom*

$$f^*(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},$$

je holomorfní ve vnějšku γ.

Nyní snadno vyjádříme funkce napjatosti pomocí f explicite.

V rovnici (10') přejděme ke konjugovanému tvaru

$$\overline{\varphi(\sigma)} + \bar{\sigma}\varphi(\sigma) + \psi(\sigma) = \overline{f(\sigma)} \qquad \sigma \in \gamma$$

a tedy

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{z}\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\varphi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma - z} \quad \text{pro } z \in K.$$

Avšak podle věty 1. a 3. jest

$$\int_\gamma \frac{\overline{\varphi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma - z} = \overline{\varphi(0)} = 0,$$

neboť funkce $\varphi^*(z)$ podle věty 3. nabývá v bodě $\sigma \in \gamma$ hodnoty $\overline{\varphi(\sigma)}$, t. j. $\varphi^*(\sigma) = \overline{\varphi(\sigma)}$. Dále pak ve větě 1 jest místo funkce $g(\sigma)$ funkce $\varphi^*(\sigma) = \overline{\varphi(\sigma)}$ a $\varphi(0) = 0$ podle dřívější úmluvy.

Tedy

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{z}\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma. \tag{11}$$

Zbývá určiti φ; opět z věty 1. a 3. plyne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\psi(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma = \overline{\psi(0)} = \bar{a},$$

tedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\sigma)d\sigma}{\sigma - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma = \bar{a}$$

a poněvadž

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - z} = \varphi(z),$$

jest

$$\varphi(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma + \bar{a} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - z}.$$

Poněvadž

$$\varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

jest

$$\varphi'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots$$

a tedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\sigma\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma = \bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2$$

podle věty 2.

Funkce $\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ v okolí bodu (∞) má totiž tvar

$$\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2\frac{1}{z} + \dots$$

a tedy

$$z\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \dots$$

Tedy jest

$$\varphi(z) + \bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \bar{a} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - z} \tag{12}$$

Máme tedy $\varphi(z)$ určeno až na výraz

$$\bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \bar{a}$$

Musíme vyjádřit, že $a_1 = \varphi'(0)$, $2a_2 = \varphi''(0)$; snadno zjistíme

$$a_1 + \bar{a}_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f\,d\sigma}{\sigma^2}, \tag{13}$$

$$2\bar{a}_2 + \bar{a} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f\,d\sigma}{\sigma}, \tag{14}$$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f\,d\sigma}{\sigma^3}. \tag{15}$$

Vidíme tedy, že řešení existuje jen tehdy, když

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f\,d\sigma}{\sigma^2}$$

je reálné. Lze ukázat, že tato podmínka je splněna, když je splněna momentová výminka vnějšího zatížení, dokonce, že tato podmínka je ekvivalentní momentové rovnováze.

Nyní je ovšem třeba provésti analysu řešení. Lze ukázat, že *postačující podmínkou, aby* (12), (13), (14), (15), *bylo řešením jest, aby* $\frac{\partial f}{\partial s}$ *splňovalo t. zv. podmínkou Hölderovu.* U tohoto se však zdržovati nebudeme.

Často se řeší problém pružnosti převedením na t. zv. *Hilbertův problém*. Co jest *Hilbertův* problém? K definování tohoto problému je třeba zavésti některé pojmy.

Buď γ kružnice (obecněji to může býti jednoduchá křivka). Budiž E komplexní otevřená rovina.

Funkci $\Phi(z)$ definovanou $E - \gamma$ nazveme po *částech holomorfní*, když je holomorfní v obou komponentách $E - \gamma$, v bodě (∞) má nejvýše pól, a je spojitě prodlužitelná na γ jak z vnějšíku, tak vnitřku γ.

Hodnoty, které nabývá $\Phi(z)$ na γ při postupu zevnitř označíme $\Phi^+(\sigma)$, $\sigma \in \gamma$, hodnoty, které nabývá při postupu z vnějšku γ označíme $\Phi^-(\sigma)$.

Nyní můžeme přistoupit k definici Hilbertova problému, ovšem ve specielním tvaru postačujícím pro náš úkol.

Budiž $G(\sigma)$, $\sigma \in \gamma$ komplexní funkce různá od nuly na γ. Potom homogením Hilbertovým problémem nazýváme určení funkce po částech holomorfní s předepsaným pólem v (∞) takové, aby

$$\Phi^+(\sigma) = G(\sigma)\Phi^-(\sigma). \tag{16}$$

Buď dále $f(\sigma)$, $\sigma \in \gamma$ komplexní funkce. Nehomogením Hilbertovým problémem nazveme určení funkce po částech holomorfní s předepsaným pólem v (∞) tak, aby

$$\Phi^+(\sigma) = G(\sigma)\,\Phi^-(\sigma) + f(\sigma). \tag{17}$$

Mějme opět na γ předepsánu funkci

$$f(s) = i \int_{s_0}^{s} (X_n + iY_n)\, ds.$$

Budiž funkce φ, ψ funkce napjatosti řešící náš problém. Funkce φ, ψ jsou definovány ve vnitřku γ. Vytvořme funkci definovanou vně γ

$$\varphi(z) = -\, z\overline{\varphi'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - \overline{\psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \qquad z \in E - K - \gamma \tag{18}$$

Podle věty 3. víme, že φ je holomorfní vně γ. Položíme-li $\zeta = \dfrac{1}{\bar{z}}$, snadno zjistíme, že

$$\varphi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) = -\,\frac{1}{\bar{\xi}}\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}, \qquad \zeta \in K. \tag{19}$$

Dosadíme-li nyní do rovnice (10′)

$$f = \varphi + z\overline{\varphi}' + \overline{\psi}$$

z rovnice (19) poznáme, že

$$\varphi + \xi\overline{\varphi}' + \overline{\psi} = \varphi(\zeta) - \varphi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + \overline{\varphi'(\zeta)}\left[\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right]. \tag{20}$$

Poněvadž u φ' předpokládáme prodlužitelnost, tedy omezenost, jest

$$\lim_{|\zeta|\to 1} \varphi'(\zeta) \left[\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right] = 0$$

a tedy jest

$$f(\sigma) = \varphi^+(\sigma) - \varphi^-(\sigma), \tag{21}$$

čímž je v podstatě problém převeden na problém Hilbertův v nejjednodušším tvaru; jeho řešení jest

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - z} + P_n(z), \tag{22}$$

kde P_n jest polynom n-tého stupně.

Tento polynom určíme z podmínek, aby podle (18) φ měla pól prvého stupně v (∞) a aby $\psi(\zeta)$ vypočtené z (19) bylo regulární v K.

Lze ukázat, že výpočet konstant polynomu je možný tehdy a jen tehdy, když je splněna momentová výminka rovnováhy. Splňuje-li f t. zv. podmínku Hölderovu, lze ukázat, že φ je skutečně řešením problému.

Další práce v pružnosti založené na theorii komplexní proměnné a výsledcích Muscheliśviliho provedl jiný sovětský matematik *Michlin*. Michlinova hlavní myšlenka pozůstává v užití *Schwarzova* jádra. Užitím theorie Schwarzova jádra ukázal Michlin na možnosti praktického řešení algoritmy (*Sobolev*, *Michlin*, *Gorgidze*).

Zatím jsme stále předpokládali, že oblast je kruhová. Vlastností kruhu, zejména symetrie, jsme využili podstatně. Je zřejmé, že podobné jednoduché řešení bude v případě poloroviny. Když oblast není ani kruhem ani polorovinou, potom jest problém obecně značně komplikovaný. V případě, že známe konformní zobrazení kruhu na oblast, řešení se zjednoduší. Řešení potom se převádí na integrální rovnici tvaru

$$\varphi'(\sigma_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma K(\sigma_0, \sigma)\, \overline{\varphi'(\sigma)}\, d\sigma = A(\sigma_0).$$

Tato rovnice sice není *Fredholmova*, ale lze ji převésti na soustavu dvou rovnic tohoto typu.

V případě, že zobrazení jest funkce racionální lomená, potom jádro je rozpadlé a řešení má tedy konečný tvar.

Konformní zobrazení lze však také obejíti. Problém vede na rovnici stejného typu. Lze ukázat (*Šerman*, *Michlin*), že charakteristická čísla rovnice jsou kladná, větší než 1 a tedy postupné aproximace jsou konvergentní.

Naše úvahy týkaly se zatím oblastí jednoduše souvislých. V případě, že jde o mnohonásobně souvislé *Jordanovy* oblasti (hranice jsou jednoduché, dostatečně hladké křivky) potom lze opět převésti problém na integrální rovnice. Někdy, když problém pružnosti pro vnějšky křivek jest řešitelný, potom toho lze účinně využít. Dále je někdy velmi účinná Michlinova methoda Schwarzova algoritmu, neboť jak bylo ukázáno, jde o procesy konvergentní.

Stále jsme předpokládali, že hranici tvořily křivky dostatečně hladké. V případě křivek s konečnou rotací (*Magnaradze*) lze ukázat, že integrální rovnice zůstanou stejné, berou-li se integrály ve smyslu *Lebesgueově-Stieltjesově* a pro tyto rovnice platí všechny Fredholmovy věty.

Křivka s konečnou rotací jest taková křivka, u níž uhel tečny s osou (definovaný skoro všude), tvoří funkci s konečnou variací.

Ještě několik slov o dalším rozvinutí theorie analytických funkcí v theorii pružnosti. Jak ukázaly práce, na př. *Lechnického*, *Michlina*, *Šermana*, *Vekuovy*, *Luzinovy*, lze rozvinouti myšlenky Muschelišviliho na rovinný problém pružnosti anisotropních a nehomogenních hmot. Dále jest zřejmé, že další užití jest v theorii desek a všude tam, kde rozhodující roli hraje funkce biharmonická. Nutno ovšem zdůraznit, že jest důležitá formulace okrajových podmínek, na př. při deskách nelze dobře užíti methodu Muscheliŝviliho, když některé okrajové hrany jsou volné (nepodepřené).

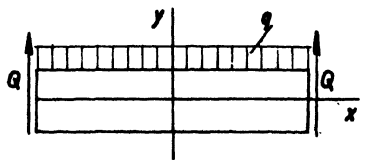
Ukázali jsme si náznakově myšlenku zavedení theorie komplexní proměnné do matematické theorie pružnosti. Jest ještě řada jiných způsobů při řešení problémů pružnosti zejména *variační methody* a *dvojné Fourierovy řady*, avšak o těch se nebudeme vzhledem k omezenému rozsahu zmiňovat. Dotkneme se však ještě jiného problému, ne sice specifického pro rovinou pružnost, avšak mající velký praktický a theoretický význam; jde o *princip Saint-Venanta*.

Vraťme se ke vzorcům (11)—(15) na straně 234. Studujme posloupnost funkcí φ_n, ψ_n příslušnou funkcím f_n podle (11) a (12). Snadno nahlédneme, že když f_n konverguje skoro všude k 0 a $|f_n| < M$, $(i = 1, \ldots)$ potom φ_n, ψ_n konverguje k nule *skoro stejnoměrně* na otevřené množině vnitřku kruhu, což jest vlastně tvrzení principu Saint Venanta ve velmi obecné formě pro kruh. Vidíme zde možnost definice osamělých břemen, o kterých jsme ze začátku mluvili.

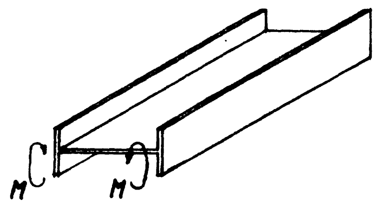
Saint Venantův princip rozumí se obvykle poněkud úžeji. Citujme zde formulaci Loveho: *Podle tohoto principu napětí vyvozená v tělesech rovnovážným systémem sil působícím na malou část povrchu jsou zanedbatelná ve vzdálenosti dosti velké ve srovnání s velikostí plochy, na níž síly působí.*

Saint Venant vyslovil svůj princip na základě experimentálním. V knihách jest tento princip formulován podobně jako u Loveho a vždy bez jakéhokoliv důkazu. V literatuře časopisecké je poměrně málo pojednání zabývající se tímto problémem. V jednom z nich *Mises* poukazuje na nejasnost formulace Loveho s hlediska fysikálního a navrhuje formulaci jinou: *Jestliže síly působící na těleso jsou omezeny na několik malých částí povrchu, potom v konečné vzdálenosti od těchto ploch jest napětí a deformace řádově menší, když na každé z těchto ploch jsou síly v rovnováze, než když v rovnováze nejsou.*

Uvedli jsme tedy matematickou formulaci pro kruh, v obecném případě by musela býti podobná. Mimo to byly uvedeny formulace fysikální. Připomeňme si ještě, jak se užívá Saint Venantova principu a ukažme si, že toto užívání neplyne ani z jedné z těchto výše uvedených formulací. Tak na př. při řešení napjatosti nosníku rovnoměrně zatíženého (obr. 2)



Obr. 2.



Obr. 3.

s pomocí polynomů (Airyho funkce) vychází, že místo skutečné okrajové podmínky na čelech $X_x = 0$ jest $X_x \neq 0'$ avšak tato napětí tvoří soustavu sil, ekvivalentní nule. Nyní se usoudí podle Saint-Venantova principu že v dostatečné vzdálenosti od těchto čel (asi trojnásobná velikost čela) jest vliv napětí X_x na čelech zanedbatelný. Jest zřejmé, že toto tvrzení naprosto není opodstatněno Saint Venantovým principem ve tvaru výše uvedeném.

Mimo to jest rovněž naprosto nejasné, co je to vliv zanedbatelný a jak dalece jest oprávněná obecně tradovaná these trojnásobku. Uveďme ještě příklad, když Saint Venantův princip ve tvaru právě užitém vůbec neplatí.

Mějme ocelový *I* profil (obr.3) zatížený na přírubách napětím lineárně rozloženým, která tvoří stejné nenulové momenty opačného smyslu. Potom jak pokusy dokázaly, ani ve vzdálenosti rovné 20 výškám profilu není namáhání zanedbatelné. Jest sice pochopitelné, že vzhledem k tomu, že stojina jest slabá, že napětí se vyrovnává velmi pomalu a tedy Saint Venantův princip neplatí, ale jest to ukázkou, že není možno se na tento princip mechanicky spoléhat. Tento příklad není ovšem protipříkladem proti formulacím uvedeným ze začátku.

Domníváme se, že Saint Venantův princip není naprosto matematicky fundován, ačkoliv hraje podstatnou úlohu i v matematické theorii pružnosti. Jest tedy toto pole velmi vděčné pro každé působení.

Podali jsme zde stručný referát o rovinné pružnosti. Samozřejmě tento referát zdaleka ani nenaznačuje celou šířku možností řešení problému rovinné pružnosti, ani jeho problematiku, a to ani v případě užití analytických funkcí.

Chtěli jsme hlavně vyzvednout methody, při níž okolnost, že jde o rovinný problém pružnosti hraje rozhodující roli. Samozřejmě ani toto pole jsme zdaleka nevyčerpali. Chtěli jsme v prvé řadě alespoň částečně naznačit problematiku a řešení sovětské školy Muschelišviliho, methody založené na theorii funkcí komplexní proměnné, methody zpracované do velké theoretické hloubky a šířky.