Časopis pro pěstování matematiky, roč. 77 (1952)

ZÁKLADY THEORIE INTEGRÁLU V EUKLIDOVÝCH PROSTORECH

JAN MAŘÍK, Praha.

(Pokračování.) 517

III. Absolutně konvergentní integrály a základní věty o míře. Věty o substituci. Funkce s konečnou variací.

V této části jsou dokázány věty o aproximaci absolutně integrovatelné funkce spojitými funkcemi a věty o vyjádření integrálu podle jedné funkce (intervalu) pomocí integrálu podle jiné funkce (specielně odtud plynou některé věty o převodu *Stieltjesova* integrálu na objemový); pro jeden rozměr je pak dokázána věta, že derivace integrálu se skoro všude rovná hodnotě integrované funkce, a jsou dokázány různé věty o substituci.

1. Nyní budeme vyšetřovat souvislost mezi funkcemi z $\mathfrak{P}_A(G, K)$ a funkcemi spojitými. Uvidíme, že je tato souvislost velmi těsná; zmínili jsme se o ní již v poznámce k větě 87, § 2. Důkaz příslušných vztahů, které jsou vyjádřeny větami 11 až 13, provedeme v několika krocích. Užijeme postupu, který se osvědčuje i jinde.

2. *Buďte* a_i, b_i *(resp.* c_i, d_i*) prvky* E_1^* $(i = 1, 2, \ldots, n)$; *nechť mají součty* $a_i + b_i$ *(resp. rozdíly* $c_i - d_i$*) smysl pro* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Pak platí (píšeme* $\max(a_i)$ *místo* $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *a pod.)*

$$\max(a_i + b_i) \leqq \max(a_i) + \max(b_i)$$

$$(resp.\ \max(c_i - d_i) \geqq \max(c_i) - \max(d_i)),$$

jakmile má součet (resp. rozdíl) napravo smysl. Zejména platí

$$\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$$

pro libovolné tři body x, y, z *prostoru* E_n.

Důkaz: Buď na př. $a_1 + b_1 = \max(a_i + b_i)$ Pak je $\max(a_i + b_i) = a_1 + b_1 \leqq \max(a_i) + \max(b_i)$. Je-li na př. $c_1 = \max(c_i)$, je $\max(c_i) - \max(d_i) = c_1 - \max(d_i) \leqq c_1 - d_1 \leqq \max(c_i - d_i)$. Je-li konečně $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $y = \ldots$, klademe $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$ a dostáváme poslední vztah.

3. Buď $\mathfrak{R}(K)$ (resp. $\mathfrak{K}(K)$) množina všech funkcí r (resp. k) v intervalu K, k nimž existují spojité funkce f_n tak, že platí

$$f_n \nearrow r \text{ (resp. } f_n \searrow k).$$

$\mathfrak{K}(K)$ je tedy množina všech $(-r)$, kde $r \in \mathfrak{R}(K)$. Místo $\mathfrak{R}(K)$, $\mathfrak{K}(K)$ budeme obyčejně psát jen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$. Je-li funkce f spojitá v K, platí zřejmě $f \in \mathfrak{R}$ i $f \in \mathfrak{K}$. Snadno nahlédneme, že $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}_B$, $\overline{\int_K} r > -\infty$ pro $r \in \mathfrak{R}$ (při libovolné funkci G, podle které se integruje) a že funkce $r_1 + r_2$, $\max(r_1, r_2)$, $\min(r_1, r_2)$ jsou prvky $\mathfrak{R}$, kdykoli jsou r_1, r_2 prvky $\mathfrak{R}$. (Pro $r \in \mathfrak{R}$ je $r(x) > -\infty$, takže má součet $r_1 + r_2$ smysl; zejména tedy má vždy smysl rozdíl $r - k$, kde $r \in \mathfrak{R}$, $k \in \mathfrak{K}$.) Podobné vztahy platí i pro funkce z množiny $\mathfrak{K}$.

Budiž $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(G, K)$ množina všech funkcí φ v intervalu K takových, že ke každému $\varepsilon > 0$ existují $r \in \mathfrak{R}$, $k \in \mathfrak{K}$ tak, že platí

$$k \leqq \varphi \leqq r, \quad \int_K (r - k) < \varepsilon.$$

Zřejmě je $\mathfrak{L}(G, K) \subset \mathfrak{P}_A(G, K)$; naším úkolem je dokázat, že v tomto vztahu platí rovnost. — Je-li $\varphi \in \mathfrak{L}$, $a < \int_K \varphi < b$, existují $r \in \mathfrak{R}$, $k \in \mathfrak{K}$ tak, že platí $k \leqq \varphi \leqq r$, $a < \int_K k \leqq \int_K \varphi \leqq \int_K r < b$; pro $\varphi \in \mathfrak{L}$ je tedy $\int_K \varphi = \inf \int_K r$, kde $r \geqq \varphi$, $r \in \mathfrak{R}$, a zároveň $\int_K \varphi = \sup \int_K k$, kde $k \leqq \varphi$, $k \in \mathfrak{K}$.

4. *Platí tyto implikace:*

a) $r \in \mathfrak{R}$, $\overline{\int_K} r < \infty \Rightarrow r \in \mathfrak{L}$;

b) $r_n \in \mathfrak{R}$, $r_n \nearrow f \Rightarrow f \in \mathfrak{R}$;

c) $f \in \mathfrak{L} \Rightarrow (-f) \in \mathfrak{L}$;

d) $f_1, f_2 \in \mathfrak{L} \Rightarrow \max(f_1, f_2)$, $\min(f_1, f_2) \in \mathfrak{L}$.

Důkaz: a) a c) je zřejmé. Nechť nyní platí pro $k = 1, 2, \ldots$ $f_n^{(k)} \nearrow r_k$, kde $f_n^{(k)}$ jsou spojité v K; buď $\varphi_n = \max(f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, \ldots, f_n^{(n)})$. Pak $\varphi_1 \leqq \varphi_2 \leqq \ldots$; nechť $\varphi_n \nearrow r$. Protože pro $n \geqq k$ je $\varphi_n \geqq f_n^{(k)}$, platí

$$r = \lim_{n\to\infty} \varphi_n \geqq \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)} = r_k,$$

tedy též

$$r \geqq \lim_{k\to\infty} r_k = f.$$

Avšak $\varphi_n \leqq \max(r_1, r_2, \ldots, r_n) = r_n$; je tedy též

$$r = \lim \varphi_n \leqq \lim r_n = f.$$

Odtud plyne $r = f$, $f \in \mathfrak{R}$. Tím je dokázáno b).

Jsou-li nyní f_1, f_2 prvky $\mathfrak{L}$, zvolme $\varepsilon > 0$ a funkce $r_i \in \mathfrak{R}$, $k_i \in \mathfrak{K}$ tak, aby bylo

$$k_i \leqq f_i \leqq r_i, \ \int_K (r_i - k_i) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \ (i = 1, 2).$$

Pak platí na př.

$$\max(k_i) \leqq \max(f_i) \leqq \max(r_i),$$

$$\int_K (\max(r_i) - \max(k_i)) \leqq \int_K \max(r_i - k_i) \leqq \int_K (r_1 - k_1) + \int_K (r_2 - k_2) < \varepsilon.$$

Je tedy $\max(f_i) \in \mathfrak{L}$ a tedy též $\min(f_i) \approx -\max(-f_i) \in \mathfrak{L}$.

5. *Nechť $f_n \in \mathfrak{L}$, $f_n \nearrow f$, $\overline{\int_K} f < \infty$. Pak je $f \in \mathfrak{L}$.*

Důkaz: Zvolme $\varepsilon > 0$ a funkce $r_n \in \mathfrak{R}$, $k_n \in \mathfrak{K}$ tak, aby platilo

$$k_n \leqq f_n \leqq r_n, \ \int_K (r_n - k_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Buď $r_n^* = \max(r_1, \ldots, r_n)$, $k_n^* = \max(k_1, \ldots, k_n)$; nechť $r_n^* \nearrow r$. Pro libovolné n platí

$$r_n^* - k_n^* \leqq \max_{1 \leq i \leq n} (r_i - k_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} (r_i - k_i),$$

tedy

$$\int_K r_n^* - \int_K k_n^* \leqq \sum_{i=1}^{n} \int_K (r_i - k_i) < \varepsilon.$$

Protože $\lim \int_K k_n^* \leqq \lim \int_K f_n = \int_K f < \infty$, je též $\overline{\int_K} r = \lim \int_K r_n^* \leqq \lim \int_K k_n^* + \varepsilon < \infty$. Pro jisté n tedy platí

$$\int_K r - \int_K r_n^* < \varepsilon,$$

takže $\int_K (r - k_n^*) = \int_K r - \int_K k_n^* = \int_K r - \int_K r_n^* + \int_K r_n^* - \int_K k_n^* < 2\varepsilon$, při čemž $r \in \mathfrak{R}$, $k_n^* \in \mathfrak{K}$, $k_n^* \leqq f \leqq r$. Tím je věta dokázána.

6. *Nechť $c_1 > -\infty$, $c_2 < \infty$, $f_n \in \mathfrak{L}$, $c_1 \leqq f_n$, $\int_K f_n \leqq c_2$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Pak je $\underline{\lim} f_n \in \mathfrak{L}$.*

Důkaz: Klademe-li $\varphi_n = \min(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, je $\varphi_n \searrow \inf f_n$; podle 4d) a „obrácené“ věty 5 platí tedy $\inf f_n \in \mathfrak{L}$. Podobně platí

$$\psi_n = \inf_{k \geq n} f_k \in \mathfrak{L} \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

a tedy (protože $\int_K \psi_n \leqq \int_K f_n \leqq c_2$, $\psi_n \nearrow \underline{\lim} f_n$) platí též $\underline{\lim} f_n \in \mathfrak{L}$.

7. *Nechť* $\emptyset \neq M \subset E_m$. *Pak je* $\varrho(x, M)$ *spojitou funkcí proměnné* x; *platí dokonce*

$$|\varrho(x, M) - \varrho(y, M)| \leqq \varrho(x, y), \qquad (\alpha)$$

kdykoli $x, y \in E_m$.

Důkaz: Zvolme $x, y \in E_m$, $z \in M$. Pak platí

$$\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z) \geqq \varrho(x, M),$$

tedy též

$$\varrho(x, y) + \varrho(y, M) \geqq \varrho(x, M)$$

neboli

$$\varrho(x, M) - \varrho(y, M) \leqq \varrho(x, y).$$

Vyměníme-li ještě bod x s bodem y, dostaneme snadno (α).

8. *Buď interval* I *částí* K; *buď* $-\infty < c_1 \leqq c_2$. *Nechť platí*

$$f(x) = c_1 \text{ pro } x \in I,$$
$$f(x) = c_2 \text{ pro } x \in K - I.$$

Pak je $f \in \mathfrak{R}$.

Důkaz: Buď $h_n(x) = n \,.\, \varrho(x, I)$. Pak $h_n \nearrow h$, kde $h(x) = 0$ pro $x \in I$, $h(x) = \infty$ pro x non $\in I$. Podle 7 je $h \in \mathfrak{R}$; tedy jsou i funkce

$$g = h + c_1,\ f = \min(g, c_2)$$

prvky $\mathfrak{R}$.

9. *Buď* f *zdola omezená funkce. Pak ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje funkce* $r \in \mathfrak{R}$ *tak, že platí*

$$r \geqq f,\quad \int_K r \leqq \overline{\int_K} f + \varepsilon.$$

Důkaz: Je-li $\overline{\int_K} f = \infty$, volíme $r(x) = \infty$ pro každé $x \in K$. Jinak zvolíme majorantu M tak, aby platilo

$$M(K) < \overline{\int_K} f + \varepsilon.$$

Budiž $\{\mathfrak{D}_n\}$ posloupnost dělení intervalu K taková, že posloupnost příslušných norem (viz 62, § 2) konverguje k nule. Sestrojíme nyní posloupnost funkcí $\{f_n\}$ tímto předpisem: Zvolíme $I \in \mathfrak{D}_n$. Má-li $M(I)$: : $G(I)$ smysl, buď

$$v(I) = M(I) : G(I);$$

jinak buď $v(I) = \infty$. Položme

$$f_{n,I}(x) = v(I) \text{ pro } x \in I,$$
$$f_{n,I}(x) = \infty \quad \text{pro } x \in K - I.$$

Buď nyní

$$f_n = \min(f_{n,I}) \text{ pro všechna } I \in \mathfrak{D}_n \ (n \text{ je pevné}).$$

Podle 8 je $f_{n,I} \in \mathfrak{R}$, tedy je též $f_n \in \mathfrak{R}$. Dále platí

$$-\infty < \overline{\int_I} f_n \leqq \overline{\int_I} f_{n,I} = v(I) \,.\, G(I) \leqq M(I)$$

pro každé $I \in \mathfrak{D}_n$ (je-li $G(I) > 0$, je zřejmě $v(I) \,.\, G(I) = M(I)$; jinak je $v(I) \,.\, G(I) = 0$, $M(I) \geqq \overline{\int_I} f = 0$), tedy

$$\overline{\int_K} f_n = \sum_{I \in \mathfrak{D}_n} \overline{\int_I} f_n \leqq \sum_{I \in \mathfrak{D}_n} M(I) \leqq M(K) < \infty.$$

Zejména je tedy (viz 4a)) $f_n \in \mathfrak{L}$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Protože normy dělení konvergují k nule, plyne snadno z významu čísla $f_n(x)$, že platí

$$\underline{\lim} f_n(x) \geqq \underline{M}(x) \geqq f(x) \tag{α}$$

pro každé $x \in K$. Je-li však funkce f zdola omezena číslem c, je

$$M(I) \geqq \overline{\int_I} f \geqq c \, G(I)$$

a tedy

$$v(I) \geqq c$$

pro každé $I \in \mathfrak{D}_n$. Odtud plyne, že platí

$$f_n \geqq c \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

Z věty 71, § 2 plyne vztah

$$\overline{\int_K} \underline{\lim} f_n \leqq \underline{\lim} \overline{\int_K} f_n \leqq M(K) < \overline{\int_K} f + \varepsilon.$$

Podle 6 je $\underline{\lim} f_n \in \mathfrak{L}$, tedy existuje $r \in \mathfrak{R}$ tak, že platí

$$\underline{\lim} f_n \leqq r, \quad \int_K r < \overline{\int_K} f + \varepsilon.$$

Podle (α) vyhovuje tato funkce r naší větě.

10. *Nechť $f \in \mathfrak{P}_A$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $r \in \mathfrak{R}$ tak, že platí*

$$r \geqq f, \quad \int_K r < \int_K f + \varepsilon.$$

Důkaz: Buď $f_n = \max(-n, f)$. Pak $f_n \searrow f$, tedy je pro jisté n $\int_K f_n < \int_K f + \varepsilon$. Podle 9 existuje $r \in \mathfrak{R}$ tak, že platí

$$r \geqq f_n \geqq f, \quad \int_K r < \int_K f + \varepsilon.$$

11. $\mathfrak{L}(G, K) = \mathfrak{P}_A(G, K)$.

Důkaz: Plyne snadno z 10.

Poznámka: Buďte f_n spojité v K, $f_n \nearrow r$; nechť $P_n = \int f_n$, $R = \overline{\int} r$. Protože P_n je Newtonovým integrálem funkce f_n a protože $R \geqq P_n$, platí

$$\underline{R}(x) \geqq \underline{P_n}(x) \geqq f_n(x)$$

a tedy také

$$\underline{R}(x) \geqq r(x)$$

pro každé x. Vidíme, že R je majorantou funkce r. Je-li nyní $f \in \mathfrak{P}_A$, $\int_K f < c$, existuje $r \in \mathfrak{R}$ tak, že platí

$$r \geqq f, \quad \int_K f \leqq \int_K r < c.$$

Funkce $R = \int r$ je pak majorantou funkce r a tím spíše funkce f; $\int_K f$ se tedy rovná infimu čísel tvaru $M(K)$, kde M je *aditivní* majoranta funkce f.

12. *Je-li $f \in \mathfrak{P}_A$, existují funkce g, h druhé třídy tak, že platí*

$$g \leqq f \leqq h, \quad \int_K g = \int_K f = \int_K h.$$

Důkaz: Podle 11 existují $k_n \in \mathfrak{K}$, $r_n \in \mathfrak{R}$ tak, že platí

$$k_n \leqq f \leqq r_n, \quad \int_K (r_n - k_n) < \frac{1}{n}.$$

Buď $g_n = \max(k_1, \ldots, k_n)$, $h_n = \min(r_1, \ldots, r_n)$. Pak též $g_n \in \mathfrak{K}$, $h_n \in \mathfrak{R}$, $g_n \leqq f \leqq h_n$. Snadno zjistíme, že naší větě vyhovují funkce $g = \lim g_n$, $h = \lim h_n$.

13. *$\mathfrak{P}_A(G, K)$ je právě množina funkcí f (definovaných v intervalu K) takových, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spojitá funkce φ tak, že platí*

$$\overline{\int_K} |f - \varphi| < \varepsilon.$$

Důkaz: Nechť funkce f má uvedenou vlastnost. Protože platí

$$\varphi - |f - \varphi| \leqq \varphi + (f - \varphi) = f \leqq \varphi + |f - \varphi|,$$

je

$$\int_K \varphi - \varepsilon < \int_K \varphi - \overline{\int_K} |f - \varphi| = \int_K \varphi + \underline{\int_K} - |f - \varphi| \leqq$$

$$\leqq \underline{\int_K} (\varphi - |f - \varphi|) \leqq \underline{\int_K} f \leqq \overline{\int_K} f \leqq \overline{\int_K} (\varphi + |f - \varphi|) \leqq$$

$$\leqq \int_K \varphi + \overline{\int_K} |f - \varphi| < \int_K \varphi + \varepsilon,$$

tedy

$$\overline{\int_K} f - \underline{\int_K} f < 2\varepsilon, \quad f \in \mathfrak{P}.$$

Protože však $f - \varphi \in \mathfrak{P}_A$, je též $(f - \varphi) + \varphi = f \in \mathfrak{P}_A$.

Je-li naopak $f \in \mathfrak{P}_A$, $\varepsilon > 0$, existuje funkce $r \in \mathfrak{R}$, pro niž platí

$$r \geqq f, \quad \int_K r - \int_K f < \varepsilon.$$

Jestliže $f_n \nearrow r$, kde f_n jsou spojité, je při vhodném n

$$\int_K r - \int_K f_n < \varepsilon.$$

Je-li $f(x) = r(x) = \infty$, položme $(r - f)(x) = 0$. Pak platí pro $f_n = \varphi$

$$|f - \varphi| \leqq |f - r| + |r - \varphi| = (r - f) + (r - \varphi),$$

tedy

$$\int_K |f - \varphi| \leqq \int_K (r - f) + \int_K (r - \varphi) < 2\varepsilon.$$

Tím je věta dokázána.

14. *Jestliže $f, g \in \mathfrak{P}_0$, je též $fg \in \mathfrak{P}_0$.*[1])

Důkaz: Zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť $|f| \leqq c$, $|g| \leqq c$ $(c \in E_1)$. Podle 13 existují spojité funkce φ, ψ tak, že platí

$$c(\int_K |f - \varphi| + \int_K |g - \psi|) < \varepsilon. \qquad (\alpha)$$

Dále můžeme předpokládat, že je též $|\varphi| \leqq c$; pro funkci φ_1, určenou vztahem

$$\varphi_1(x) = \max(-c, \min(\varphi, c)),$$

platí totiž

$$|f - \varphi_1| \leqq |f - \varphi|$$

(k důkazu tohoto vztahu stačí rozeznat případy $\varphi(x) > c$, $\varphi(x) < -c$, $-c \leqq \varphi(x) \leqq c$), tedy též

$$\int_K |f - \varphi_1| \leqq \int_K |f - \varphi|,$$

takže φ_1 splňuje (α) tím spíše; přitom je φ_1 spojitá funkce a platí $|\varphi_1| \leqq c$.

Tak dostáváme

$$\overline{\int_K} |fg - \varphi\psi| \leqq \overline{\int_K} |f - \varphi|\,|g| + \overline{\int_K} |g - \psi|\,|\varphi| \leqq$$
$$\leqq c(\int_K |f - \varphi| + \int_K |g - \psi|) < \varepsilon.$$

Protože funkce $\varphi\psi$ je spojitá, platí podle 13 $fg \in \mathfrak{P}_A$ a tedy též $fg \in \mathfrak{P}_0$.

Poznámka: Jestliže platí $f \in \mathfrak{P}_0$, $g \in \mathfrak{P}_A$, pak je též $fg \in \mathfrak{P}_A$, jak se snadno zjistí limitním přechodem. Jsou-li však f, g prvky $\mathfrak{P}_A$, nemusí již platit $fg \in \mathfrak{P}_A$, jak ukazuje příklad funkcí $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ v intervalu

[1]) $\mathfrak{P}_0$ je množina omezených funkcí z $\mathfrak{P}$.

$\langle 0, 1\rangle$ při obyčejném integrálu. Rovněž nemusí platit $fg \in \mathfrak{P}$, jestliže $f \in \mathfrak{P}_0$, $g \in \mathfrak{P}$ (viz cvič. 13, § 2).

15. *Buďte G_1, G_2 konečné nezáporné aditivní funkce, $G_1 \leqq G_2$. Pak platí*

$$\mathfrak{P}_A(G_1, K) \supset \mathfrak{P}_A(G_2, K).$$

Důkaz: Nechť $f \in \mathfrak{P}_A(G_2, K)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle 13 existuje spojitá funkce φ tak, že platí $\int_K |f - \varphi| \, dG_2 < \varepsilon$. Snadno zjistíme, že $\overline{\int_K} |f - \varphi| \, dG_1 \leqq \int_K |f - \varphi| \, dG_2$; je tedy též $\overline{\int_K} |f - \varphi| \, dG_1 < \varepsilon$. Podle 13 odtud plyne $f \in \mathfrak{P}_A(G_1, K)$.

16. Je-li $A \subset K$, nazveme *charakteristickou funkcí* množiny A (vzhledem k intervalu K) funkci c_A, určenou vztahy

$$c_A(x) = 1 \text{ pro } x \in A,$$
$$c_A(x) = 0 \text{ pro } x \in K - A.$$

Platí zřejmě $c_{A+B} = \max(c_A, c_B)$, $c_{AB} = \min(c_A, c_B) = c_A \cdot c_B$. Je-li $AB = \emptyset$, platí $c_{A+B} = c_A + c_B$. Jestliže $A \supset B$, máme $c_{A-B} = c_A - c_B$, zejména $c_{K-B} = 1 - c_B$. V případě $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A$ je $c_{A_n} \nearrow c_A$; podobný vztah platí pro posloupnost „nerostoucí".

Horní (resp. *dolní*) *mírou* množiny $A \subset K$ (vzhledem k funkci G a intervalu K) nazveme číslo

$$\overline{\mu}(A, G, K) = \overline{\mu}(A) = \overline{\int_K} c_A \quad (\text{resp. } \underline{\mu}(A, G, K) = \underline{\mu}(A) = \underline{\int_K} c_A).$$

Zřejmě $\overline{\mu}(A + B) \leqq \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$; jestliže $AB = \emptyset$, je $\underline{\mu}(A) + \underline{\mu}(B) \leqq \underline{\mu}(A + B)$. Pro $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ je $\overline{\mu}(A_n) \nearrow \overline{\mu}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)$. Vždy platí

$$\overline{\mu}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mu}(\sum_{k=1}^{n} A_k) \leqq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu}(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n).$$

Je-li $c_A \in \mathfrak{P}$ neboli

$$\overline{\mu}(A) = \underline{\mu}(A),$$

řekneme, že množina A je *měřitelná* (vzhledem k ...) a píšeme

$$\overline{\mu}(A) = \underline{\mu}(A) = \mu(A);$$

toto číslo nazveme *mírou* množiny A.

Snadno zjistíme, že sjednocení a průnik libovolné posloupnosti měřitelných množin je opět množina měřitelná. Je-li posloupnost (množin) „monotonní", je limita posloupnosti měr rovna míře sjednocení (resp. průniku); jsou-li členové posloupnosti po dvou disjunktní, je součet řady měr roven míře sjednocení.

17. Je-li dána nějaká vlastnost V bodů intervalu K, pak množinu těch bodů, které mají vlastnost V, značíme symbolem

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x} [x \text{ má vlastnost } V].$$

Řekneme, že *skoro všecky* body intervalu K mají vlastnost V, jestliže množina těch bodů, které tuto vlastnost nemají, t. j. množina $\mathop{\mathrm{E}}_{x} [x$ nemá vlastnost $V]$, má míru 0. Též říkáme, že nějaký vztah platí v K *skoro všude* a pod. Na př. „$f(x) = g(x)$ skoro všude" znamená, že množina $\mathop{\mathrm{E}}_{x} [f(x) \neq g(x)]$ má míru 0. (Záleží ovšem na funkci G, podle které se integruje; vlastně bychom měli psát „skoro všude vzhledem k funkci G" a pod.)

18. *Nechť $f, g \in \mathfrak{P}$, $f \leqq g$, $\int_K f = \int_K g$. Pak je $f(x) = g(x)$ skoro všude.*

Důkaz: Buď $A = \mathop{\mathrm{E}}_{x} [f(x) < g(x)]$, $A_n = \mathop{\mathrm{E}}_{x} \left[f(x) + \frac{1}{n} < g(x)\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Protože $f + \frac{1}{n} \cdot \mathrm{c}_{A_n} \leqq g$, je $\int_K g = \int_K f \leqq \underline{\int_K}\left(g - \frac{1}{n} \cdot \mathrm{c}_{A_n}\right) \leqq$ $\leqq \int_K g + \underline{\int_K}\left(-\frac{1}{n} \cdot \mathrm{c}_{A_n}\right) = \int_K g - \frac{1}{n} \cdot \overline{\mu}(A_n)$, tedy $\overline{\mu}(A_n) = 0$. Protože $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, je též $\overline{\mu}(A) = 0$.

19. *Nechť $f \in \mathfrak{P}$, $P = \int f$. Pak platí*

$$\underline{P}(x) \leqq f(x) \leqq \overline{P}(x)$$

skoro všude.

Důkaz: Pro libovolnou majorantu M platí $M \geqq P$, tedy $\underline{M}(x) \geqq$ $\geqq \underline{P}(x)$ pro každé x. Buď $f_1(x) = \max(f(x), \underline{P}(x))$. Pak je též $\underline{M}(x) \geqq f_1(x)$ pro každé x, tedy $M(K) \geqq \overline{\int_K} f_1 \geqq \underline{\int_K} f_1 \geqq \int_K f = P(K)$. Odtud plyne snadno vztah

$$\int_K f_1 = \int_K f.$$

Podle 18 tedy platí $f_1(x) = f(x)$ skoro všude neboli $\underline{P}(x) \leqq f(x)$ skoro všude. Druhá nerovnost se dokáže obdobně.

20. a) *Je-li $f \in \mathfrak{P}$, platí $|f(x)| < \infty$ skoro všude.*

b) *Je-li též* $g \in \mathfrak{P}$, *při čemž* $\int_I f = \int_I g$ *pro každý interval* $I \subset K$, *platí* $f(x) = g(x)$ *skoro všude.*

Důkaz: Nechť $f, g \in \mathfrak{P}$, $P = \int f = \int g$. Má-li rozdíl $f(x) - g(x)$ smysl, buď $h(x) = f(x) - g(x)$; jinak buď $h(x) = 1$. Pak je neurčitý integrál funkce h roven nule; podle 19 je tedy $h(x) = 0$ skoro všude. To znamená, že je $f(x) = g(x)$ skoro všude a že rozdíl $f(x) - g(x)$ má smysl skoro všude. Volíme-li $g = f$, vidíme, že je $|f(x)| < \infty$ skoro všude.

21. *Nechť* $A \subset K$. *Buď* $f(x) = 0$ *pro* $x \in K - A$, $f(x) = \infty$ *pro* $x \in A$. *Pak je buď* $\overline{\int_K} f = 0$ *nebo* $\overline{\int_K} f = \infty$ *podle toho, je-li* $\overline{\mu}(A) = 0$ *nebo* $\overline{\mu}(A) > 0$.

Důkaz: Je $f = \lim n \,.\, c_A$, tedy $\overline{\int_K} f = \lim n \,.\, \overline{\mu}(A)$.

22. *Nechť* $f(x) = g(x)$ *skoro všude. Pak je* $\overline{\int_K} f = \overline{\int_K} g$.

Důkaz: Buď $A = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) \neq g(x)]$, $\varphi = \infty \,.\, c_A$. Dále buď $f_1(x) = \infty$ pro $x \in A$, $f_1(x) = f(x)$ pro $x \in K - A$. Pak platí $\varphi(x) + f(x) = f_1(x)$, kdekoli má součet smysl; zřejmě je $f_1 \geqq g$. Máme tedy

$$\overline{\int_K} g \leqq \overline{\int_K} f_1 \leqq \overline{\int_K} f + \overline{\int_K} \varphi = \overline{\int_K} f.$$

Podobně zjistíme, že platí $\overline{\int_K} f \leqq \overline{\int_K} g$.

Poznámka: Je-li $f(x) = g(x)$ skoro všude, platí dokonce $\overline{\int_I} f = \overline{\int_I} g$ pro každý interval $I \subset K$, jak se snadno zjistí.

23. *Funkce* $f, g \in \mathfrak{P}$ *mají stejný neurčitý integrál, když a jen když platí* $f(x) = g(x)$ *skoro všude.*

Důkaz: Plyne ihned z 20 b) a z poznámky k větě 22.

24. *Buď* f *omezená funkce,* $g \in \mathfrak{P}(G, K)$, $G_1 = \int g \, \mathrm{d}G$, $G_1 \geqq 0$. *Pak platí*

$$\overline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_1 = \overline{\int_K} fg \, \mathrm{d}G.$$

Důkaz: Podle 19 je $g(x) \geqq \underline{G_1}(x) \geqq 0$ skoro všude, podle 20 a) je $g(x) < \infty$ skoro všude. Existuje tedy konečná nezáporná funkce g_1 tak, že platí

$$g_1(x) = g(x) \text{ skoro všude}$$

a dále podle 23

$$G_1 = \int g \, \mathrm{d}G = \int g_1 \, \mathrm{d}G, \quad \overline{\int} fg \, \mathrm{d}G = \overline{\int} fg_1 \, \mathrm{d}G.$$

Stačí tedy dokázat větu za předpokladu, že funkce g je konečná nezáporná.

Je-li nyní $r \in \mathfrak{R}$, $r \geqq f$, $\overline{\int_K} r < \infty$, platí podle 87, § 2

$$\int_K r \, dG_1 = \int_K rg \, dG \geqq \overline{\int_K} fg \, dG,$$

tedy též

$$\overline{\int_K} f \, dG_1 \geqq \overline{\int_K} fg \, dG.$$

Abychom dokázali také obrácenou nerovnost, uvažme, že pro konečnou funkci $\varphi \in \mathfrak{P}$ a pro libovolnou funkci ψ platí jednak

$$\overline{\int}(\varphi + \psi) \leqq \overline{\int}\varphi + \overline{\int}\psi = \int\varphi + \overline{\int}\psi,$$

jednak

$$\overline{\int}\psi = \overline{\int}((\varphi + \psi) - \varphi) \leqq \overline{\int}(\varphi + \psi) + \overline{\int}(-\varphi) = \overline{\int}(\varphi + \psi) - \int\varphi,$$

tedy též

$$\overline{\int}\psi + \int\varphi \leqq \overline{\int}(\varphi + \psi).$$

Platí tedy

$$\overline{\int}\psi + \int\varphi = \overline{\int}(\varphi + \psi)$$

a podobně

$$\underline{\int}\psi + \int\varphi = \underline{\int}(\varphi + \psi).$$

Zvolme nyní čísla c, ε, $c \geqq |f|$, $\varepsilon > 0$. Pro $g_n = \min(g, n)$ je $g_n \nearrow g$, $\int_K g_n \nearrow \int_K g$. Zvolme tak velké N, aby platilo

$$4c\int_K (g - g_N) < \varepsilon.$$

Víme, že existuje funkce $r \in \mathfrak{R}$, pro niž je

$$r \geqq f, \; 2N(\int_K r \, dG - \overline{\int_K} f \, dG) = 2N\overline{\int_K}(r - f) \, dG < \varepsilon.$$

Dále můžeme předpokládat, že je též $|r| \leqq c$ (místo funkce r můžeme totiž vzít funkci $r_1 = \min(r, c)$). Za tohoto předpokladu je $r - f \leqq 2c$ a dále

$$\overline{\int_K}(r - f)g = \overline{\int_K}((r - f)(g - g_N) + (r - f)g_N) \leqq$$

$$\leqq \overline{\int_K}(2c(g - g_N) + (r - f)N) = 2c\int_K(g - g_N) + N\overline{\int_K}(r - f) < \varepsilon.$$

Protože zřejmě $r \in \mathfrak{P}_A(G_1, K)$, je jednak

$$rg \in \mathfrak{P}_A(G, K), \; \underline{\int_K}(r - f)g = \int_K rg - \overline{\int_K} fg < \varepsilon,$$

jednak

$$\overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G_1 \leqq \int_K r \,\mathrm{d}G_1 = \int_K rg \,\mathrm{d}G.$$

Odtud plyne $\overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G_1 \leqq \int_K rg \,\mathrm{d}G < \overline{\int_K} fg \,\mathrm{d}G + \varepsilon$, tedy též

$$\overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G_1 \leqq \overline{\int_K} fg \,\mathrm{d}G.$$

Tím je věta dokázána.

25. *Nechť* $g \in \mathfrak{P}(G, K)$, $G_1 = \int g \,\mathrm{d}G$, $G_1 \geqq 0$. *Pak platí*

$$\int_K f \,\mathrm{d}G_1 = \int_K fg \,\mathrm{d}G, \tag{α}$$

jakmile buď $f \in \mathfrak{P}_A(G_1, K)$ *nebo* $fg \in \mathfrak{P}_A(G, K)$.

D ů k a z: Je-li funkce f omezená, platí podle 24 $\overline{\int} f \,\mathrm{d}G_1 = \overline{\int} fg \,\mathrm{d}G$ a ovšem také $\underline{\int} f \,\mathrm{d}G_1 = \underline{\int} fg \,\mathrm{d}G$; tím je věta 25 dokázána pro omezenou funkci.

Dále stačí opět vyšetřit případ, že je funkce g konečná nezáporná. Je-li $f \in \mathfrak{P}(G_1, K)$, $f \geqq 0$, platí $f_n = \min(f, n) \in \mathfrak{P}(G_1, K)$ a tedy $f_n g \in \mathfrak{P}(G, K)$,

$$\int_K f_n \,\mathrm{d}G_1 = \int_K f_n g \,\mathrm{d}G. \tag{β}$$

Protože $f_n \nearrow f$, $f_n g \nearrow fg$, je též $fg \in \mathfrak{P}(G, K)$ a platí (α). Je-li naopak $fg \in \mathfrak{P}(G, K)$, $f \geqq 0$, $f_n = \min(f, n)$, je též $f_n g = \min(fg, ng) \in \mathfrak{P}(G, K)$, tedy $f_n \in \mathfrak{P}(G_1, K)$, $f \in \mathfrak{P}(G_1, K)$ a opět platí (β) i (α). Nabývá-li funkce f kladných i záporných hodnot, dokončíme důkaz obvyklým způsobem.

26. *Nechť* $g \in \mathfrak{P}(G, K)$, $G_1 = \int g \,\mathrm{d}G$, $G_1 \geqq 0$, $A \subset K$. *Pak platí*

$$\overline{\mu}(A, G_1, K) = \overline{\int_K} c_A\, g \,\mathrm{d}G, \quad \underline{\mu}(A, G_1, K) = \underline{\int_K} c_A\, g \,\mathrm{d}G.$$

Je-li zejména $\mu(A, G, K) = 0$, *je též* $\mu(A, G_1, K) = 0$.

(Plyne ihned z 24.)

27. *Budiž funkce G slabě spojitá v bodě $x \in K$. Pak má jednobodová množina $\{x\}$ míru* 0.

D ů k a z: Zvolme $\varepsilon > 0$. Ze slabé spojitosti funkce G plyne, že existuje interval J o středu x tak, že $G(JK) < \varepsilon$. Buď nyní (pro $I \subset K$) $M(I) = G(IJ)$ resp. $M(I) = 0$ podle toho, je-li IJ interval či ne. Podle 22, § 2 je M aditivní v K. Zřejmě je M majorantou charakteristické funkce jednobodové množiny $\{x\}$ a platí $M(K) = G(JK) < \varepsilon$; tedy je $\overline{\mu}(\{x\}) < \varepsilon$, $\overline{\mu}(\{x\}) = 0$.

28. Věta 25 je přirozeným zobecněním věty 87, § 2; bohužel však nic neříká o funkcích, které nepatří do $\mathfrak{P}_A$. Dokážeme proto ještě větu, obdobnou větě 25, která bude platit dokonce pro zcela libovolnou funkci f; o funkci G však vyslovíme specielní předpoklady. — Napřed uvedeme několik definic.

29. Symbolem

$$f \doteq g$$

budeme rozumět, že platí

$$f(x) = g(x) \text{ skoro všude.}$$

Zřejmě $f \doteq g,\ g \doteq h \Rightarrow f \doteq h$.

Dále řekneme, že funkce f má Newtonův (resp. Knichalův) integrál *v širším smyslu*, jestliže existují bodové funkce f_1, f_2 a funkce intervalu F tak, že platí $f_1 \doteq f_2 \doteq f$ a že funkce F je zároveň majorantou (resp. zobecněnou majorantou) funkce f_1 a minorantou (resp. zobecněnou minorantou) funkce f_2. Funkce F je pak zřejmě neurčitým (Perronovým) integrálem funkce f.

Snadno nahlédneme, že aditivní funkce F je Newtonovým integrálem v širším smyslu funkce f, když a jen když je

$$\underline{F}(x) > -\infty,\quad \overline{F}(x) < \infty \text{ pro každé } x$$

a

$$f(x) \sim F'(x) \text{ skoro všude.}$$

Aditivní funkce F je Knichalovým integrálem v širším smyslu funkce f, když a jen když existuje spočetná množina $A \subset K$ tak, že v bodech množiny A jsou obě funkce F i G slabě spojité, že je

$$\underline{F}(x) > -\infty,\ \overline{F}(x) < \infty \text{ pro každé } x \in K - A$$

a že platí

$$f(x) \sim F'(x) \text{ skoro všude.}$$

(Množina A má podle 27 míru 0.)

30. *Buď G_1 neurčitým Knichalovým integrálem v širším smyslu funkce g podle funkce G; nechť $G_1 \geqq 0$. Pak platí pro libovolnou funkci f v intervalu K*

$$\overline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_1 = \overline{\int_K} fg \, \mathrm{d}G.$$

Důkaz: Napřed dokážeme, že platí

$$\overline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_1 \geqq \overline{\int_K} fg \, \mathrm{d}G. \tag{α}$$

Zvolme majorantu M funkce f vzhledem ke G_1. Buď

$$A = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\overline{G_1}(G, x, K) = \infty],$$

$$B = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\text{neplatí } g(x) \sim G_1'(G, x, K)],$$

$$C = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\overline{G_1}(G, x, K) = -\infty, \underline{G_1}(G, x, K) = \infty].$$

Množina A je spočetná, $A \subset B$, B má míru 0 (vzhledem ke G); C má podle 19 také míru 0.

Zvolme napřed $x \in A$ a číslo c, $-\infty < c < \underline{M}(G_1, x, K)$. Je-li $I_n \to x$, platí od jistého indexu

$$c\, G_1(I_n) \leqq M(I_n);$$

protože $G_1(I_n) \to 0$, je $\underline{\lim} M(I) \geqq 0$ pro $I \to x$.

Buď nyní $x \in K - A$. Pak můžeme volit konečná čísla c_1, c_2, c_3 tak, aby platilo

$$c_1 < \underline{G_1}(G, x, K), \quad \overline{G_1}(G, x, K) < c_2,$$

$$c_3 < \underline{M}(G_1, x, K).$$

Je-li nyní $I_n \to x$, platí pro velká n

$$c_1\, G(I_n) \leqq G_1(I_n) \leqq c_2\, G(I_n), \quad c_3\, G_1(I_n) \leqq M(I_n).$$

Pak je buď pro $i = 1$ nebo $i = 2$

$$c_3 c_i\, G(I_n) \leqq c_3 G_1(I_n) \leqq M(I_n),$$

tedy

$$\underline{M}(G, x, K) \geqq c_3 c_i > -\infty.$$

Je-li dokonce $x \in K - B$, můžeme volit c_i libovolně blízko k $g(x)$, c_3 k $f(x)$ a dostáváme

$$\underline{M}(G, x, K) \geqq f(x)\, g(x).$$

(Je-li $|f(x)| = \infty$, je třeba rozeznat případy $g(x) = 0$, $g(x) > 0$.)

Tím je dokázáno, že je funkce M zobecněnou majorantou funkce $\varphi \doteq fg$, kde

$$\varphi(x) = f(x)\, g(x) \text{ pro } x \in K - B,$$

$$\varphi(x) = -\infty \text{ pro } x \in B.$$

Je tedy

$$M(K) \geqq \overline{\int_K} \varphi = \overline{\int_K} fg.$$

Odtud plyne snadno, že platí (α).

Nyní dokážeme, že platí také

$$\overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G_1 \leqq \overline{\int_K} fg \,\mathrm{d}G. \tag{β}$$

Můžeme zřejmě předpokládat, že $g(x) = \underline{G_1}(G, x, K)$ pro každé x. (Vztah $g(x) \neq \underline{G_1}(G, x, K)$ může totiž platit jen v bodech množiny $B + C$.) Zvolme $\varepsilon > 0$. Buď M_0 majoranta funkce fg taková, že

$$M_0(K) \leqq \overline{\int_K} fg \,\mathrm{d}G + \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Zvolme $\eta > 0$ tak, aby platilo $\eta\, G(K) < \frac{1}{2}\varepsilon$ a utvořme

$$M = M_0 + \eta G.$$

Pak je

$$\underline{M}(x) \geqq \underline{M_0}(x) + \eta\, \underline{G}(x) \geqq f(x)\, g(x) + \eta$$

pro každé x; dále je

$$M(K) \leqq \overline{\int_K} fg \,\mathrm{d}G + \varepsilon. \tag{γ}$$

Je-li $g(x) = 0$, je $\underline{M}(G, x, K) \geqq \eta$. Jestliže tedy $I_n \to x$, je pro velká n $M(I_n) \geqq 0$, tedy je

$$\underline{M}(G_1, x, K) \geqq 0.$$

Je-li $g(x) = \underline{G_1}(x) > 0$, zvolme c_1, c_2 tak, aby platilo

$$0 < c_1 < g(x),\ c_2 < 0,\ -\infty < c_2 < \underline{M}(G, x, K).$$

Jestliže $I_n \to x$, platí pro velká n

$$c_1\, G(I_n) \leqq G_1(I_n),\ c_2\, G(I_n) \leqq M(I_n),$$

tedy

$$c_2\, G_1(I_n) \leqq c_1 c_2\, G(I_n) \leqq c_1\, M(I_n);$$

odtud plyne

$$\underline{M}(G_1, x, K) \geqq c_2 : c_1 > -\infty.$$

Dokázali jsme tedy, že platí

$$\underline{M}(G_1, x, K) > -\infty \tag{δ}$$

pro každé x.

Zvolme nyní $x \in K - B$; předpokládejme, že je $\underline{M}(G_1, x, K) < \infty$. Nechť $I_n \to x$, $M(I_n) : G_1(I_n) \to \underline{M}(G_1, x, K)$. Pak je pro velká n $G_1(I_n) > 0$; jinak by totiž bylo buď $\underline{M}(G_1, x, K) = -\infty$ ve sporu s (δ) nebo $\underline{M}(G_1, x, K) = \infty$, což jsme vyloučili. Platí tedy též $G(I_n) > 0$ pro velká n; odtud plyne, že je $x \in K - C$ neboli $\overline{G_1}(x) = \underline{G_1}(x) = g(x) < \infty$ a dále

$$M(I_n) : G(I_n) = \{M(I_n) : G_1(I_n)\} \,.\, \{G_1(I_n) : G(I_n)\} \to$$
$$\to \underline{M}(G_1, x, K) \,.\, g(x) \geqq \underline{M}(G, x, K) \geqq f(x)\, g(x) + \eta.$$

Dostáváme tak $g(x) > 0$, $\underline{M}(G_1, x, K) > f(x)$.

Vidíme, že je funkce M majorantou funkce f_1, pro niž platí

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{pro } x \in K - B,$$
$$f_1(x) = -\infty \text{ pro } x \in B.$$

Množina B má však podle funkce G míru 0; podle funkce G_1 má tedy (viz 26) také míru 0. Odtud plyne (viz též (γ))

$$\overline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_1 = \overline{\int_K} f_1 \, \mathrm{d}G_1 \leqq M(K) \leqq \overline{\int_K} fg \, \mathrm{d}G + \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, platí též (β); tím je věta dokázána.

Poznámka: Při důkaze vztahu (β) jsme nikde nemluvili o množině A; (β) tedy platí pro libovolnou funkci f, kdykoli nezáporná funkce $G_1 = \int g \, \mathrm{d}G$ splňuje vztah

$$g(x) \sim G_1'(G, x, K) \text{ skoro všude;}$$

k tomu postačí podle 19 a 20 a), bude-li platit

$$\overline{G_1}(x) = \underline{G_1}(x) \text{ skoro všude.}$$

Pak ovšem platí pro libovolnou funkci f také

$$\underline{\int_K} fg \, \mathrm{d}G \leqq \underline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_1.$$

Je-li tedy zejména $fg \in \mathfrak{P}(G, K)$, je též $f \in \mathfrak{P}(G_1, K)$ a mezi integrály platí rovnost.

31. *Buď φ spojitá neklesající v $\langle a, b\rangle$, G konečná neklesající ve $\langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle$ (je-li $\varphi(a) = \varphi(b)$, nepožadujeme od funkce G nic). Pak platí pro libovolnou funkci f v intervalu (event. degenerovaném) $\langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle$*

$$\overline{\int_a^b} f(\varphi) \, \mathrm{d}G(\varphi) = \overline{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}} f \, \mathrm{d}G.$$

Důkaz: Buď M bodová majoranta funkce f vzhledem k funkci G; buď $N(t) = M(\varphi(t))$. Dokážeme, že je N majorantou funkce $f(\varphi)$ vzhledem ke $G(\varphi)$. Zvolme $t \in \langle a, b\rangle$; buď $\underline{N}(G(\varphi), t, \langle a, b\rangle) < \infty$. Zvolme t_n, t_n' tak, aby platilo $t_n < t_n'$, $\langle t_n, t_n'\rangle \to t$, $\{N(t_n') - N(t_n)\} : \{G(\varphi(t_n')) - G(\varphi(t_n))\} = (M(x_n') - M(x_n)) : (G(x_n') - G(x_n)) \to \underline{N}(t)$; položili jsme $x_n = \varphi(t_n)$, $x_n' = \varphi(t_n')$. Je ovšem $x_n < x_n'$ pro každé n; kdyby bylo $x_n = x_n'$, měl by podíl tvar $0 : 0$. Z důvodů spojitosti platí $\langle x_n, x_n'\rangle \to x = \varphi(t)$. Je tedy

$$-\infty \neq \underline{N}(G(\varphi), t, \langle a, b\rangle) \geqq \underline{M}(G, x, \langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle) \geqq$$
$$\geqq f(x) = f(\varphi(t)),$$

$$M(\varphi(b)) - M(\varphi(a)) = N(b) - N(a) \geqq \overline{\int_a^b} f(\varphi)\, \mathrm{d}G(\varphi),$$

tedy

$$\overline{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}} f\, \mathrm{d}G \geqq \overline{\int_a^b} f(\varphi)\, \mathrm{d}G(\varphi).$$

Abychom dokázali také obrácenou nerovnost, uvažme, že ke každému $x \in \langle\varphi(a), \varphi(b)\rangle$ existuje aspoň jedno t, pro něž platí $\varphi(t) = x$. Vybereme-li ke každému x právě jedno, dostaneme funkci ψ, pro niž platí

$$\varphi(\psi(x)) = x.$$

Volme pro jednoduchost $\psi(\varphi(b)) = b$, $\psi(\varphi(a)) = a$. Buď nyní M libovolná majoranta funkce $f(\varphi)$ vzhledem ke $G(\varphi)$; dokážeme, že je $N = M(\psi)$ majoranta funkce f vzhledem ke G. Zvolme $x \in \langle\varphi(a), \varphi(b))$, $x_n \searrow x$, $x_n > x$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Buď $\psi(x_n) = t_n$, $\psi(x) = t$. Je $t_n \geqq t_{n+1} \geqq t$, tedy $t_n \searrow t_0 \geqq t$. Protože $x_n = \varphi(t_n) \geqq \varphi(t_0)$, je též $\varphi(t) = x = \lim x_n \geqq \varphi(t_0)$, tedy $x = \varphi(t) = \varphi(t_0)$. Zvolme $B < \underline{M}(G(\varphi), t_0, \langle t_0, b\rangle)$. Pak platí od jistého indexu

$$B(G(\varphi(t_n)) - G(\varphi(t_0))) \leqq M(t_n) - M(t_0).$$

Je-li $t_0 > t$, je $M(t_0) - M(t) \geqq \overline{\int_{t_0}^{t}} f(\varphi)\, \mathrm{d}G(\varphi) = 0$ (protože je zde $G(\varphi)$ konstantní, $\varphi(t_0) = \varphi(t)$), tím spíše tedy platí $B(G(\varphi(t_n)) - G(\varphi(t))) \leqq M(t_n) - M(t)$ neboli $B(G(x_n) - G(x)) \leqq N(x_n) - N(x)$.

Odtud plyne snadno, že platí

$$B \leqq \underline{N}(G, x, \langle x, \varphi(b)\rangle)$$

a tedy také

$$f(x) = f(\varphi(t_0)) \leqq \underline{M}(G(\varphi), t_0, \langle t_0, b\rangle) \leqq \underline{N}(G, x, \langle x, \varphi(b)\rangle).$$

Podobný vztah můžeme odvodit též pro derivaci zleva a dostáváme

$$-\infty \neq \underline{N}(G, x, \langle\varphi(a), \varphi(b)\rangle) \geqq f(x).$$

Platí tedy

$$M(b) - M(a) = N(\varphi(b)) - N(\varphi(a)) \geqq \overline{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}} f\, \mathrm{d}G$$

a ovšem také

$$\overline{\int_a^b} f(\varphi)\, \mathrm{d}G(\varphi) \geqq \overline{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}} f\, \mathrm{d}G.$$

Tím je věta dokázána.

32. Dosud jsme pokládali funkci G, podle které se počítal integrál, v jistém smyslu za pevnou. Později však budeme definovat integrál nejen podle nezáporné funkce intervalu, nýbrž také podle t. zv. funkce s konečnou variací, t. j. podle funkce, která je rozdílem dvou funkcí nezáporných. K tomu budeme potřebovat několika vět, které pojednávají o případu, že se táž bodová funkce integruje podle různých funkcí intervalu; tyto věty, které se osvědčí i při jiných příležitostech, si nyní odvodíme.

33. *Buďte G_1, G_2 konečné nezáporné aditivní funkce v intervalu K. Pak platí pro libovolnou bodovou funkci f v intervalu K*

$$\overline{\int_K} f \, \mathrm{d}(G_1 + G_2) \leqq \overline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_1 + \overline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_2 \qquad (\alpha)$$

$$(\textit{resp.} \ \underline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_1 + \overline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_2 \leqq \overline{\int_K} f \, \mathrm{d}(G_1 + G_2)), \qquad (\beta)$$

pokud má součet napravo (resp. nalevo) smysl.

Důkaz: (α) dokáže čtenář snadno sám; dokážeme jen (β). Můžeme předpokládat, že je $\underline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_1 > -\infty$, $\overline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_2 > -\infty$, $\overline{\int_K} f \, \mathrm{d}(G_1 + G_2) < \infty$.

Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$; dále zvolme (konečnou) majorantu M_{12} funkce f vzhledem ke $G_1 + G_2$ a (konečnou) minorantu $m_1^{(0)}$ vzhledem ke G_1 tak, aby platilo

$$M_{12}(K) < \overline{\int_K} f \, \mathrm{d}(G_1 + G_2) + \varepsilon, \quad \underline{\int_K} f \, \mathrm{d}G_1 < m_1^{(0)}(K) + \varepsilon.$$

Budiž η voleno tak malé, aby bylo $\eta G_1(K) < \varepsilon$; buď $m_1 = m_1^{(0)} - \eta G_1$. Protože je $\overline{m_1}(G_1, x, K) \leqq \overline{m_1^{(0)}}(G_1, x, K) + (\overline{-\eta G_1})(G_1, x, K) \leqq f(x) - \eta$, je vždy

$$\overline{m_1}(G_1, x, K) < \underline{M_{12}}(G_1 + G_2, x, K)$$

(i když $|f(x)| = \infty$); zvolíme-li tedy $x \in K$, existuje $c \in E_1$ tak, že platí

$$\overline{m_1}(\ldots) < c < \underline{M_{12}}(\ldots).$$

Jestliže nyní $I_n \to x$, platí od jistého indexu

$$m_1(I_n) \leqq c \, G_1(I_n), \ c \, (G_1 + G_2)(I_n) \leqq M_{12}(I_n),$$

tedy

$$c \, G_2(I_n) \leqq (M_{12} - m_1)(I_n);$$

odtud plyne

$$c \leqq \underline{(M_{12} - m_1)}(G_2, x, K).$$

Protože $M_{12} - m_1$ je superaditivní funkce a protože c můžeme volit libovolně blízko k $f(x)$, je $M_{12} - m_1$ majorantou funkce f vzhledem ke G_2 a dostáváme

$$\overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_2 \leqq (M_{12} - m_1)(K) < \overline{\int_K} \ldots + \varepsilon - \underline{\int_K} \ldots + \varepsilon + \eta G_1(K) <$$
$$< \overline{\int_K} f\,\mathrm{d}(G_1 + G_2) - \underline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_1 + 3\varepsilon.$$

Odtud věta ihned plyne.

34. *Jsou-li splněny předpoklady věty 33, platí také*

$$\underline{\int} f\,\mathrm{d}(G_1 + G_2) \leqq \underline{\int} f\,\mathrm{d}G_1 + \overline{\int} f\,\mathrm{d}G_2$$
$$(\textit{resp.}\ \underline{\int} f\,\mathrm{d}G_1 + \underline{\int} f\,\mathrm{d}G_2 \leqq \underline{\int} f\,\mathrm{d}(G_1 + G_2)),$$

pokud má součet napravo (resp. nalevo) smysl.

Důkaz: Použijeme věty 33 na funkci $(-f)$.

Poznámka: Z vět 33 a 34 bezprostředně plyne, že pro konečné nezáporné aditivní funkce G_1, G_2, splňující vztah $G_1 \leqq G_2$, a pro libovolnou nezápornou bodovou funkci f platí jednak

$$\overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_1 \leqq \underline{\int_K} f\,\mathrm{d}(G_2 - G_1) + \overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_1 \leqq \overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_2,$$

jednak

$$\underline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_1 \leqq \underline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_1 + \underline{\int_K} f\,\mathrm{d}(G_2 - G_1) \leqq \underline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_2,$$

tedy

$$\overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_1 \leqq \overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_2, \quad \underline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_1 \leqq \underline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_2.$$

Tyto vztahy lze ovšem snadno dokázat také přímo; prvního z nich jsme ostatně použili již dříve.

35. *Jsou-li G_1, G_2 konečné nezáporné aditivní v K, platí*

$$\int_K f\,\mathrm{d}G_1 + \int_K f\,\mathrm{d}G_2 = \int_K f\,\mathrm{d}(G_1 + G_2),$$

jakmile aspoň dva z napsaných integrálů existují.

Důkaz: Plyne snadno z vět 33, 34.

36. *Buďte G_n, G konečné nezáporné aditivní v K, $G_n \nearrow G$. Pak platí pro libovolnou nezápornou bodovou funkci f v intervalu K*

$$\overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_n \nearrow \overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G.$$

Důkaz: Buď napřed $f \leqq N$. Pak je

$$\overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G \leqq \overline{\int_K} f\,\mathrm{d}(G - G_n) + \overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_n \leqq N(G - G_n)(K) + \overline{\int_K} f\,\mathrm{d}G_n.$$

Odtud plyne

$$\overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G \leqq \lim_{n\to\infty} \overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G_n. \tag{α}$$

Podle 35 je však pro každé n $\overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G_n \leqq \overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G$; v ($\alpha$) tedy platí znamení rovnosti.

Pro libovolnou (nezápornou) funkci f buď nyní $f_N = \min(f, N)$. Pak platí pro každé N

$$\overline{\int_K} f_N \,\mathrm{d}G = \lim_{n\to\infty} \overline{\int_K} f_N \,\mathrm{d}G_n \leqq \lim_{n\to\infty} \overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G_n,$$

tedy též

$$\overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G = \lim_{N\to\infty} \overline{\int_K} f_N \,\mathrm{d}G \leqq \lim_{n\to\infty} \overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G_n.$$

Platí zřejmě opět rovnost.

Poznámka: Existují-li integrály $\int_K f \,\mathrm{d}G_n$, plyne ze vztahu $\int_K f \,\mathrm{d}G_n \leqq \underline{\int_K} f \,\mathrm{d}G$, že platí $\lim \int_K f \,\mathrm{d}G_n = \overline{\int_K} f \,\mathrm{d}G \leqq \underline{\int_K} f \,\mathrm{d}G$, tedy $f \in \mathfrak{P}_R(G, K)$.

37. *Nechť* $-\infty < c_1 \leqq c_2 \leqq c_3 < \infty$, $-\infty < a < c < b < \infty$; *nechť*

$$G(x) = c_1 \;\textit{pro}\; x \in \langle a, c),$$
$$G(c) = c_2,$$
$$G(x) = c_3 \;\textit{pro}\; x \in (c, b\rangle.$$

Pak pro libovolnou funkci f v intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$\overline{\int_a^c} f \,\mathrm{d}G = \underline{\int_a^c} f \,\mathrm{d}G = f(c) \,.\, (c_2 - c_1), \quad \overline{\int_c^b} f \,\mathrm{d}G = \underline{\int_c^b} f \,\mathrm{d}G =$$
$$= f(c) \,.\, (c_3 - c_2).$$

Důkaz: Je-li $|f(c)| < \infty$, je funkce $f(c) \,.\, G$ zřejmě Newtonovým integrálem funkce f; je-li $|f(c)| = \infty$, dokážeme větu snadno limitním přechodem.

38. Buď G konečná neklesající v $\langle a, b\rangle$; buďte $a_1, a_2, \ldots$ její body nespojitosti (pokud existují). Ke každému a_i existuje racionální číslo b_i, pro něž platí $G(a_i-) < b_i < G(a_i+)$; odtud plyne snadno, že bodů a_i je jen spočetně mnoho. Definujme funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ tímto předpisem:

$$\varphi_i(x) = 0 \;\text{pro}\; x < a_i;$$
$$\varphi_i(a_i) = G(a_i) - G(a_i-);$$
$$\varphi_i(x) = G(a_i+) - G(a_i-) \;\text{pro}\; x > a_i$$

(klademe event. $G(a-) = G(a)$, $G(b+) = G(b)$). Buď

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i.$$

(Řada konverguje všude, protože platí $\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) \leqq \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(b) \leqq G(b) - G(a)$. Je-li bodů nespojitosti jen konečný počet, zvolíme je za $a_1, a_2, \ldots, a_p$, a za $a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots$ zvolíme libovolné body spojitosti funkce G.) Zvolíme-li N tak, aby bylo $\sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_i(b) < \varepsilon$, a neleží-li v intervalu $\langle x, y\rangle$ žádný z bodů $a_1, a_2, \ldots, a_N$, je $0 \leqq \varphi(y) - \varphi(x) < \varepsilon$; v každém bodě x, různém ode všech a_i, je tedy funkce φ spojitá. Podobně zjistíme, že pro každé i je $\varphi(a_i) - \varphi(a_i-) = G(a_i) - G(a_i-)$, $\varphi(a_i+) - \varphi(a_i) = G(a_i+) - G(a_i)$. Funkce $G - \varphi$ je tedy spojitá; protože $G(y) - G(x) \geqq \varphi(y) - \varphi(x)$ pro $x < y$, je to funkce neklesající. Rozložili jsme tedy neklesající funkci G na spojitou neklesající funkci $G_0 = G - \varphi$ a na funkci φ, zvanou její *funkcí skoků*. Funkci G_0 budeme říkat *spojitá část* funkce G.

39. *Buď G konečná neklesající v $\langle a, b\rangle$; buďte $a_1, a_2, \ldots$ její body nespojitosti, $s_i = G(a_i+) - G(a_i-)$. Buď f bodová funkce v $\langle a, b\rangle$ taková, že řada $\sum_i f(a_i)s_i$ konverguje absolutně (nebo je jen konečným součtem). Pak platí*

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}G = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}G_0 + \sum_i s_i f(a_i),$$

kde G_0 je spojitá část funkce G.

Důkaz: Utvořme funkce φ_i, φ jako v 38. Podle 36 (a poznámky) platí

$$\int_a^b f_+ \,\mathrm{d}\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_+ \,\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_+ \,\mathrm{d}\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_+(a_i)s_i;$$

podobně je

$$\int_a^b f_- \,\mathrm{d}\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} f_-(a_i)s_i,$$

tedy existuje $\int_a^b f \,\mathrm{d}\varphi$ a rovná se $\sum_{i=1}^{\infty} f(a_i)s_i$. Podle 33 platí

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}G_0 + \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\varphi \leqq \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}G \leqq \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}G_0 + \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\varphi;$$

odtud věta snadno plyne.

40. *Buď G konečná neklesající v $\langle a, b\rangle$; nechť $f \in \mathfrak{P}(G, \langle a, b\rangle)$. Buď bodová funkce F neurčitým integrálem funkce f podle funkce G. Pak je F omezená.*

Důkaz: Předpokládejme na př., že F není shora omezená. Pak existují $x_n \in \langle a, b\rangle$ tak, že $\lim F(x_n) = \infty$. Podle 11, § 2 můžeme předpokládat, že body x_n konvergují k jistému bodu $x \in \langle a, b\rangle$. Kdyby byla funkce G v bodě x spojitá, byla by i funkce F v bodě x spojitá, což není pravda. Protože tedy funkce G není v bodě x spojitá, má jednobodová množina $\{x\}$ kladnou míru (rovnou $G(x+) - G(x-)$, jak plyne na př. z 39). Protože funkce f je skoro všude konečná, je $|f(x)| < \infty$. Sestrojme nyní konečné neklesající funkce G_1, G_2, kde G_1 je spojitá v bodě x, G_2 má v bodě x skok (a jinde je konstantní) a kde $G = G_1 + G_2$. Pak existuje podle 37 $\int_a^b f \, dG_2$, tedy existuje též $\int_a^b f \, dG_1$. Buďte F_1, F_2 neurčité integrály funkce f podle funkcí G_1, G_2. Funkce F_1, F_2 jsou zřejmě v jistém okolí bodu x omezené (F_2 je vůbec omezená, F_1 je v bodě x spojitá), tedy je tam i funkce $F = F_1 + F_2$ omezená. To je však spor, protože $x_n \to x$, $F(x_n) \to \infty$.

41. *Buď G konečná neklesající v $\langle a, b\rangle$; nechť $f \in \mathfrak{P}(G, \langle a, b\rangle)$. Buď bodová funkce F neurčitým integrálem funkce f podle funkce G. Nechť f nabývá v každém bodě nespojitosti funkce G nulové hodnoty. Pak je F spojitá funkce.*

Důkaz: Podle 39 platí pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ $F(x) - F(a) = \int_a^x f \, dG = \int_a^x f \, dG_0$, kde G_0 je spojitá.

Poznámka: Podobně se zjistí, že je spojitou funkcí neurčitý horní integrál omezené funkce f, která nabývá v každém bodě nespojitosti funkce G nulové hodnoty.

42. (Lemma *Sierpińského*.) *Buďte F, G konečné neklesající v $\langle a, b\rangle$. Nechť $A \subset \langle a, b\rangle$; v bodech množiny A buď funkce G spojitá. Budiž dále*

$$\overline{F}(G, x, \langle a, b\rangle) > \eta \text{ pro každé } x \in A.$$

Pak platí

$$F(b) - F(a) \geqq \tfrac{1}{2}\eta \cdot \overline{\mu}(A, G, \langle a, b\rangle).$$

Důkaz: Budiž $c = \overline{\mu}(A, G, \langle a, b\rangle)$; stačí zřejmě vyšetřit případ $\eta c > 0$. Zvolme $2\varepsilon < c$ a označme

$$A_1 = \mathop{\mathrm{E}}_x [x \in A, x < b, \overline{F}(G, x, \langle x, b\rangle) > \eta],$$

$$A_2 = \mathop{\mathrm{E}}_x [x \in A, x > a, \overline{F}(G, x, \langle a, x\rangle) > \eta].$$

Pak je $A = A_1 + A_2$, $\overline{\mu}(A_1) + \overline{\mu}(A_2) \geqq \overline{\mu}(A) > 2\varepsilon$. Nechť platí na př. $\overline{\mu}(A_1) > \varepsilon$. Buď B_n množina těch $x \in A_1$, k nimž existuje $h > \frac{1}{n}$ tak, že podíl

$$q = (F(x+h) - F(x)) : (G(x+h) - G(x))$$

má smysl a je

$$q > \eta.$$

Zřejmě $B_1 \subset B_2 \subset \ldots, \sum_{n=1}^{\infty} B_n = A_1$. Protože $\overline{\mu}(B_n) \nearrow \overline{\mu}(A_1) > \varepsilon$, existuje N takové, že platí

$$\overline{\mu}(B_N) > \varepsilon.$$

Dále zvolme $\delta > 0$ tak malé, aby bylo

$$\overline{\mu}(B_N) > \varepsilon + N(b-a)\delta. \qquad (\alpha)$$

Budiž H neurčitý horní integrál charakteristické funkce množiny B_N (podle funkce G). Podle poznámky k větě 41 je H spojitá funkce. Sestrojíme nyní konečný počet intervalů $I_1, I_2, \ldots, I_p$ $(p \leqq N(b-a))$ tak, aby platilo

$$I_i = \langle x_i, y_i \rangle,\ x_i + \frac{1}{N} \leqq y_i \leqq x_{i+1},$$

tímto postupem:

Označme $a = y_0$. Mame-li již bod y_i, rozeznávejme tyto případy:

a) Existuje $x \in B_N$, $x \geqq y_i$. Pak existuje také bod $x_{i+1} \in B_N$ tak, že platí

$$x_{i+1} \geqq y_i,\ H(x_{i+1}) - H(y_i) \leqq \delta \qquad (\beta)$$

(je-li $H(x) - H(y_i) > \delta$, plyne ze spojitosti funkce H existence bodu x', pro který je $H(x') - H(y_i) = \delta$; v intervalu $\langle y_i, x' \rangle$ pak jistě leží nějaký bod množiny B_N). Bod y_{i+1} pak zvolíme tak, aby platilo

$$(F(y_{i+1}) - F(x_{i+1})) : (G(y_{i+1}) - G(x_{i+1})) > \eta, \qquad (\gamma)$$

$$y_{i+1} \geqq x_{i+1} + \frac{1}{N}.$$

b) Takové x neexistuje; pak volíme $p = i$ a postup je u konce.

Platí tedy

$$H(y_p) = H(b),\ H(b) - H(a) = \sum_{i=1}^{p} (H(y_i) - H(x_i) + H(x_i) - H(y_{i-1})).$$

Odtud plyne (viz též (β))

$$\overline{\mu}(B_N) = H(b) - H(a) \leqq \sum_{i=1}^{p} (H(y_i) - H(x_i)) + p\delta.$$

Protože $H(y_i) - H(x_i) = \int\limits_{x_i}^{y_i} c_{B_N} \, \mathrm{d}G \leqq \int\limits_{x_i}^{y_i} 1 \, . \, \mathrm{d}G = G(y_i) - G(x_i)$ (a zřejmě $p \cdot \frac{1}{N} \leqq \sum\limits_{i=1}^{p} (y_i - x_i) \leqq b - a$), máme

$$\overline{\mu}(B_N) \leqq \sum_{i=1}^{p} (G(y_i) - G(x_i)) + N(b - a) \, . \, \delta.$$

Srovnáním s (α) dostáváme

$$\varepsilon < \sum_{i=1}^{p} G(y_i) - G(x_i);$$

z (γ) pak vyplývá

$$\sum_{i=1}^{p} F(y_i) - F(x_i) > \eta \sum_{i=1}^{p} G(y_i) - G(x_i) > \eta\varepsilon.$$

Odtud plyne snadno tvrzení věty, protože ε můžeme volit libovolně blízko k $\frac{1}{2}c$.

43. *Buď G konečná neklesající v $\langle a, b \rangle$; nechť $f \in \mathfrak{P}(G, \langle a, b \rangle)$. Buď F neurčitým integrálem funkce f. Nechť $G(a) < G(a+)$ (resp. $G(b-) < G(b)$). Pak platí $|f(a)| < \infty$ (resp. $|f(b)| < \infty$) a dále*

$$f(a) \sim F'(G, a, \langle a, b \rangle) \quad (\textit{resp. } f(b) \sim F'(G, b, \langle a, b \rangle)).$$

Důkaz: Buď na př. $G(b-) < G(b)$; zřejmě $|f(b)| < \infty$. Nechť $G_1(x) = G(x)$ pro $x \in \langle a, b)$, $G_1(b) = G(b-)$. Pak je $\int\limits_a^b f \, \mathrm{d}G = \int\limits_a^b f \, \mathrm{d}G_1 + \int\limits_a^b f \, \mathrm{d}G_2 = \lim\limits_{x \to b-} \int\limits_a^x f \, \mathrm{d}G + f(b) \, . \, (G(b) - G(b-))$ (kde $G_2 = G - G_1$) neboli

$$F(b) - F(a) = F(b-) - F(a) + f(b)(G(b) - G(b-)),$$

t. j.

$$F(b) - F(b-) = f(b)(G(b) - G(b-));$$

odtud plyne

$$f(b) = \lim_{x \to b-} \{(G(b) - G(x)) : (F(b) - F(x))\}.$$

44. *Buď G konečná neklesající v $\langle a, b \rangle$. Nechť pro každé $x \in (a, b)$ platí*

$$\textit{buď } G(x-) = G(x) = G(x+) \textit{ nebo } G(x-) < G(x) < G(x+).$$

Nechť $f \in \mathfrak{P}(G, \langle a, b \rangle)$; buď F neurčitým integrálem funkce f. Pak platí

$$f(x) \sim F'(G, x, \langle a, b \rangle) \textit{ skoro všude.}$$

Důkaz: Budiž $A = \mathop{\mathrm{E}}\limits_x [\underline{F}(x) < f(x)]$, $A_n = \mathop{\mathrm{E}}\limits_x \left[\underline{F}(x) + \frac{1}{n} < f(x)\right]$.

Pak $\overline{\mu}(A_n) \nearrow \overline{\mu}(A)$. Je-li $\overline{\mu}(A) > 0$, existuje tedy N tak, že $\overline{\mu}(A_N) > 0$. Budiž M majoranta k f taková, že platí

$$M(b) - M(a) < F(b) - F(a) + \frac{1}{2N} \cdot \overline{\mu}(A_N). \tag{α}$$

Dokážeme, že pro $x \in A_N$ platí

$$\overline{(M - F)}(x) > \frac{1}{N}.$$

Buď tedy $x \in A_N$, $\overline{(M - F)}(x) < \infty$ neboli $\underline{(F - M)}(x) > -\infty$. Pak ze vztahů $F = (F - M) + M$, $\underline{F}(x) + \frac{1}{N} < f(x) \leqq \underline{M}(x)$ plyne

$$-\infty < \underline{M}(x) + \underline{(F - M)}(x) \leqq \underline{F}(x) < \infty,$$

tedy opravdu

$$\overline{(M - F)}(x) \geqq \underline{M}(x) - \underline{F}(x) > \frac{1}{N}.$$

Podle 42 (kde místo F klademe $M - F$ atd.) dostáváme

$$M(b) - M(a) - (F(b) - F(a)) \geqq \frac{1}{2N} \cdot \overline{\mu}(A_N)$$

ve sporu s (α).

Tím jsme dokázali, že je $\underline{F}(x) \geqq f(x)$ skoro všude. Podobně zjistíme, že je $\overline{F}(x) \leqq f(x)$ skoro všude. Protože je $|f(x)| < \infty$ skoro všude, je věta dokázána.

Poznámka: Má-li omezená funkce obyčejný integrál v intervalu $\langle a, b\rangle$, má tam zároveň (obyčejný) Newtonův integrál v širším smyslu, jak snadno plyne z 44. Jestliže funkce f má v $\langle a, b\rangle$ (obyčejný) nevlastní Riemannův integrál, má v $\langle a, b\rangle$ též Knichalův integrál v širším smyslu (dokonce s konečnou množinou „výjimečných bodů“).

45. Z vět 30 a 31 ihned plyne věta, obdobná větě 98, § 2:

Buďte φ, H konečné neklesající v $\langle a, b\rangle$, φ buď spojitá; G buď konečná neklesající ve $\langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle$. Funkce $G(\varphi)$ buď neurčitým Knichalovým integrálem v širším smyslu funkce k podle funkce H. Pak platí pro libovolnou funkci f v intervalu $\langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle$

$$\overline{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}} f \, \mathrm{d}G = \overline{\int_a^b} f(\varphi)\, k \, \mathrm{d}H. \tag{α}$$

O funkci f se zde sice nepředpokládá nic, zato se však o funkci φ předpokládá navíc proti větě 98, § 2, že je neklesající, což je jistě podstatné omezení. — Přechodem k funkci $(-f)$ zjistíme, že platí (α) také pro dolní integrály; z existence jednoho integrálu v (α) tedy plyne existence druhého.

Použijeme-li ještě věty 44 a poznámky k větě 30, můžeme vyslovit také tuto větu:

Buďte φ, H konečné neklesající v $\langle a, b\rangle$, φ buď spojitá; nechť platí pro každé $x \in (a, b)$

buď $H(x-) = H(x) = H(x+)$ nebo $H(x-) < H(x) < H(x+)$.
G buď konečná neklesající ve $\langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle$; funkce $G(\varphi)$ buď neurčitým (Perronovým) integrálem funkce k podle funkce H. Pak platí

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \, \mathrm{d}G = \int_a^b f(\varphi) \, k \, \mathrm{d}H, \tag{β}$$

jakmile existuje integrál napravo.

Poznamenejme ještě, že předpoklad o tom, že funkce H je buď spojitá nebo „oboustranně nespojitá", není podstatný; není-li totiž tento předpoklad splněn, můžeme utvořit funkci $H_1(x) = \frac{1}{2}(H(x+) + H(x-))$ a lze ukázat, že platí $\int_a^b \psi \, \mathrm{d}H = \int_a^b \psi \, \mathrm{d}H_1$, jakmile jeden z integrálů existuje. (Ve specielním případě to plyne z věty 39; v obecném případě je třeba „upravit" majorantu tak, jako jsme „upravili" funkci H.)

Je-li pak $K = \int k \, \mathrm{d}H_1$ (můžeme předpokládat $k \geq 0$), platí

$$\int_a^b f(\varphi) \, . \, k \, \mathrm{d}H = \int_a^b f(\varphi) k \, \mathrm{d}H_1 = \int_a^b f(\varphi) \, \mathrm{d}K = \int_a^b f(\varphi) \, \mathrm{d}G(\varphi) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \, \mathrm{d}G.$$

Nepříjemný předpoklad, že funkce φ je monotonní, můžeme také podstatně oslabit. Snadno se dokáže vztah

$$\int_\alpha^\beta \psi(x) \, \mathrm{d}G(x) = \int_{c-\beta}^{c-\alpha} \psi(c - x) \, \mathrm{d}(-G(c - x)).$$

Je-li nyní φ nerostoucí, označme

$$k_1(x) = k(c - x), \; H_1(x) = H(c - x), \; \varphi_1(x) = \varphi(c - x),$$

kde $c = a + b$. Pak je $G(\varphi_1)$ neurčitým integrálem funkce $(-k_1)$ podle $(-H_1)$; protože φ_1 je neklesající, platí

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \, \mathrm{d}G = -\int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_1(b)} f \, \mathrm{d}G = -\int_a^b f(\varphi_1)(-k_1) \, \mathrm{d}(-H_1) = \int_a^b f(\varphi) \, k \, \mathrm{d}H$$

(jakmile existuje poslední integrál); dostáváme týž vztah jako u funkce neklesající. Odtud plyne snadno, že (β) platí, existuje-li dělení $\mathfrak{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že v každém intervalu $I \in \mathfrak{D}$ je funkce φ monotonní; předpokládáme ovšem, že funkce G je konečná neklesající v celém intervalu, který vyplní hodnoty funkce φ (tedy nejen ve $\langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle$). K důkazu naší věty stačí dokonce předpokládat, že ke každému intervalu $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$ existuje takové dělení $\mathfrak{D}$; provedení budiž opět přenecháno čtenáři. Poznamenejme však, že postup není tak docela jednoduchý. Zejména v případě, že funkce G není spojitá v bodě $\varphi(b)$ (resp. $\varphi(a)$), je třeba trochu důvtipu.

46. Nyní budeme definovat také integrál podle t. zv. funkce s konečnou variací, t. j. podle funkce (intervalu), která je rozdílem dvou nezáporných funkcí, event. v jednorozměrném případě podle bodové funkce, která je rozdílem dvou funkcí neklesajících. Naskýtá se myšlenka definovat

$$\int_K f \, \mathrm{d}G = \int_K f \, \mathrm{d}G_1 - \int_K f \, \mathrm{d}G_2,$$

jestliže G_1, G_2 jsou nezáporné aditivní funkce takové, že $G = G_1 - G_2$, a jestliže oba integrály napravo existují. Bohužel však rozklad funkce G na rozdíl dvou nezáporných funkcí není jednoznačný a není tedy předem patrné, má-li tato definice vůbec smysl. Je tedy třeba postupovat poněkud jinak; zejména budeme funkci s konečnou variací definovat jiným způsobem, než bylo uvedeno.

47. Buď F funkce intervalu v K. Utvořme funkci $V = V_F$ vztahem

$$V(J) = \sup\left(\sum_{I \in \mathfrak{D}} |F(I)|\right), \text{ kde } \mathfrak{D} \text{ je dělení } J.$$

(To znamená, že zvolíme interval $J \subset K$, utvoříme všechna dělení $\mathfrak{D}$ intervalu J, každému $\mathfrak{D}$ přiřadíme součet $\sum_{I \in \mathfrak{D}} |F(I)|$ a supremum množiny těchto součtů prohlásíme za funkční hodnotu funkce V.) Je-li funkce V konečná, řekneme, že funkce F má *konečnou variaci* (je s konečnou variací). Funkci V nazveme *variací* funkce F.

48. *Je-li funkce F aditivní, je V_F rovněž aditivní.*

Důkaz: Nechť $I_1 \dotplus I_2 = I_3 \subset K$. Zvolme dělení $\mathfrak{D}_3$ intervalu I_3. Přidejme k dělicím bodům dělení $\mathfrak{D}_3$ bod, který vytvořuje rozdělení intervalu I_3 na intervaly I_1, I_2. Tak dostaneme dělení $\mathfrak{D}_3'$ intervalu I_3 a dělení $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ intervalů I_1, I_2, při čemž $\mathfrak{D}_3' = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$. Protože vždy platí $|F(J_1 \dotplus J_2)| \leqq |F(J_1)| + |F(J_2)|$, je $\sum_{I \in \mathfrak{D}_3} |F(I)| \leqq \sum_{I \in \mathfrak{D}_3'} |F(I)|$ a tedy

$$\sum_{I \in \mathfrak{D}_3} \ldots \leqq \sum_{I \in \mathfrak{D}_3'} \ldots = \sum_{I \in \mathfrak{D}_1} \ldots + \sum_{I \in \mathfrak{D}_2} \ldots \leqq V(I_1) + V(I_2).$$

Odtud plyne

$$V(I_3) \leqq V(I_1) + V(I_2). \tag{α}$$

Budiž nyní $\mathfrak{D}_i$ dělení I_i $(i = 1, 2)$. Přidáním dělicích bodů utvoříme jemnější dělení $\mathfrak{D}_i'$ tak, aby $\mathfrak{D}_1' + \mathfrak{D}_2'$ bylo dělením I_3. Platí opět

$$\sum_{I \in \mathfrak{D}_i} |F(I)| \leqq \sum_{I \in \mathfrak{D}'_i} |F(I)|$$

pro $i = 1, 2$, a tedy

$$\sum_{I \in \mathfrak{D}_1} \ldots + \sum_{I \in \mathfrak{D}_2} \ldots \leqq \sum_{I \in \mathfrak{D}_1'} \ldots + \sum_{I \in \mathfrak{D}_2'} \ldots = \sum_{I \in \mathfrak{D}_1' + \mathfrak{D}_2'} \ldots \leqq V(I_3).$$

Tak dostáváme

$$V(I_1) + V(I_2) \leqq V(I_3). \tag{β}$$

Z (α), (β) věta ihned plyne.

49. Buď F konečná aditivní v K, V buď její variace. Funkcím V_1, V_2, kde

$$V_1 = \frac{V + F}{2}, \quad V_2 = \frac{V - F}{2},$$

říkáme *horní* a *dolní* variace funkce F; jsou to zřejmě aditivní funkce. Dále platí:

V je nejmenší z aditivních funkcí G, pro něž je

$$G \geqq |F|;$$

V_1 (resp. V_2) je nejmenší z nezáporných aditivních funkcí G_1 (resp. G_2), pro něž je

$$G_1 \geqq F \ (resp.\ G_2 \geqq -F).$$

Důkaz: Zřejmě je $V \geqq |F|$; je-li naopak G aditivní, $G \geqq |F|$, je při každém dělení $\mathfrak{D}$ intervalu J splněn vztah

$$\sum_{I \in \mathfrak{D}} |F(I)| \leqq \sum_{I \in \mathfrak{D}} G(I) = G(J),$$

tedy je též $V(J) \leqq G(J)$.

Protože je $V \geqq |F|$, platí též $V \geqq F$, $V \geqq -F$, tedy je $V_1 \geqq 0$, $V_2 \geqq 0$. Dále je $V + F \geqq 2F$, $V - F \geqq -2F$, tedy $V_1 \geqq F$, $V_2 \geqq -F$.

Je-li naopak G_1 nezáporná aditivní funkce, $G_1 \geqq F$, je $F \leqq G_1 + (G_1 - F) = 2G_1 - F$, rovněž $-F \leqq 2G_1 - F$, tedy $|F| \leqq 2G_1 - F$, $V \leqq 2G_1 - F_1$, $V_1 \leqq G_1$. Podobně dostáváme $V_2 \leqq G_2$, je-li G_2 nezáporná aditivní, $G_2 \geqq -F$.

50. *Buď F aditivní funkce s konečnou variací. Pak je F rozdílem dvou (konečných) nezáporných aditivních funkcí.*

Důkaz: Zřejmě $F = V_1 - V_2$, kde V_1, V_2 jsou definovány v 49.

51. Buď F aditivní funkce s konečnou variací, f buď bodová funkce. Řekneme, že existuje

$$\int_K f \, \mathrm{d}F,$$

jestliže existují $\int_K f\,\mathrm{d}V_1$, $\int_K f\,\mathrm{d}V_2$ (kde V_1, V_2 jsou definovány 49); klademe pak ovšem

$$\int_K f\,\mathrm{d}F = \int_K f\,\mathrm{d}V_1 - \int_K f\,\mathrm{d}V_2.$$

Význam symbolů $\mathfrak{P}(F, K)$, $\mathfrak{P}_A(F, K)$ je jistě zřejmý. Systém $\mathfrak{P}(F, K)$ můžeme definovat také jako průnik systémů $\mathfrak{P}(V_1, K)$ a $\mathfrak{P}(V_2, K)$; podobně pro $\mathfrak{P}_A(F, K)$.

52. *Buďte G, H konečné nezáporné aditivní funkce v K; nechť existují integrály*

$$\int_K f\,\mathrm{d}G,\ \int_K f\,\mathrm{d}H,\ \int_K f\,\mathrm{d}(G - H).$$

Pak platí

$$\int_K f\,\mathrm{d}G - \int_K f\,\mathrm{d}H = \int_K f\,\mathrm{d}(G - H).$$

Důkaz: Buď $F = G - H$; utvořme V_1, V_2 jako v 49. Pak je $G \geqq F$, $H \geqq -F$, tedy platí podle 49 $G \geqq V_1$, $H \geqq V_2$; nechť $G = V_1 + R$. Pak je R konečná nezáporná aditivní funkce; platí ovšem také $H = V_2 + R$ (protože $G - H = V_1 - V_2$). Podle předpokladu existují $\int_K f\,\mathrm{d}G$, $\int_K f\,\mathrm{d}V_1$, tedy existuje podle 35 také $\int_K f\,\mathrm{d}R$ a platí

$$\int_K f\,\mathrm{d}G = \int_K f\,\mathrm{d}V_1 + \int_K f\,\mathrm{d}R,$$

$$\int_K f\,\mathrm{d}H = \int_K f\,\mathrm{d}V_2 + \int_K f\,\mathrm{d}R,$$

tedy

$$\int_K f\,\mathrm{d}G - \int_K f\,\mathrm{d}H = \int_K f\,\mathrm{d}V_1 - \int_K f\,\mathrm{d}V_2 = \int_K f\,\mathrm{d}F.$$

Poznámka: Věta 52 říká, že integrál $\int_K f\,\mathrm{d}F$ lze vyjádřit v jistém smyslu libovolným způsobem ve tvaru $\int_K f\,\mathrm{d}G - \int_K f\,\mathrm{d}H$, kde G, H jsou nezáporné aditivní funkce, $G - H = F$. Jsou-li však předem dány funkce G, H, pak je předpoklad, že kromě integrálů $\int_K f\,\mathrm{d}G$, $\int_K f\,\mathrm{d}H$ existuje také $\int_K f\,\mathrm{d}(G - H)$, jistě dost nepříjemný. Dokážeme proto ještě následující větu, obdobnou větě 52, v níž se však již tento předpoklad nevyskytuje.

53. *Buďte G, H aditivní funkce s konečnou variací. Nechť $f \in \mathfrak{P}_A(G, K)$, $f \in \mathfrak{P}_A(H, K)$. Pak je též $f \in \mathfrak{P}_A(G + H, K)$ a platí*

$$\int_K f\,\mathrm{d}G + \int_K f\,\mathrm{d}H = \int_K f\,\mathrm{d}(G + H). \qquad (\alpha)$$

Důkaz: Nechť $G = G_1 - G_2$, $H = H_1 - H_2$, kde G_i, H_i jsou horní a dolní variace funkcí G, H. Označme $F_i = G_i + H_i$ $(i = 1, 2)$, $F = G + H$. Pak $F = F_1 - F_2$; jsou-li V_1, V_2 horní a dolní variace funkce

F, je $V_1 \leqq F_1$, $V_2 \leqq F_2$. Protože je (viz 35) $f \in \mathfrak{P}_A(F_i, K)$, platí podle 15 $f \in \mathfrak{P}_A(V_i, K)$ a tedy též $f \in \mathfrak{P}_A(F, K)$; podle 52 dostáváme

$$\int_K f\,\mathrm{d}G + \int_K f\,\mathrm{d}H = \int_K f\,\mathrm{d}F_1 - \int_K f\,\mathrm{d}F_2 = \int_K f\,\mathrm{d}F = \int_K f\,\mathrm{d}(G + H).$$

Poznámka: Čtenář snadno zjistí, že (α) platí i bez předpokladu absolutní konvergence, jakmile jen všechny tři integrály *existují*.

54. Některé z dříve uvedených vět dokáže nyní čtenář snadno i pro integrály podle funkcí s konečnou variací. Viděli jsme však, že zejména v jednorozměrném případě hrála důležitou roli spojitost (ve vícerozměrném případě slabá spojitost) funkce, podle které se počítal integrál. Dokážeme tedy ještě větu, z níž ihned vyplyne, že funkce V_1, V_2 z věty 49 jsou slabě spojité, kdekoli je F slabě spojitá. Zejména je tedy možné rozložit spojitou funkci, která má v intervalu $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci, na rozdíl dvou *spojitých* neklesajících funkcí. Můžeme tedy na př. větu 94, § 2 rozšířit také na případ, že g je spojitá s konečnou variací. (Nestačí zde však utvořit rozdíl jakýchsi dvou výrazů; v podstatě je třeba užít identity $(c_1 - c_2)(d_1 - d_2) = 2c_1d_1 + 2c_2d_2 - (c_1 + c_2)(d_1 + d_2)$.)

55. *Buď F funkce s konečnou variací; buď slabě spojitá v bodě x. Pak je též funkce V_F slabě spojitá v bodě x.*

Důkaz: Předpokládejme, že F je, ale $V = V_F$ není slabě spojitá v bodě x. Pak existuje posloupnost intervalů $I_n \to x$ a číslo $\eta > 0$ tak, že $V(I_n) > \eta$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Je-li nyní J interval o středu x, je od jistého indexu $I_n \subset JK$, tedy $V(JK) > \eta$. Buďte nyní I_n krychle o středu x a průměru $\frac{1}{n}$; položme $J_n = I_nK$. Posloupnost $V(J_n)$ je nerostoucí; buď 3ε její limita. Je ovšem $3\varepsilon \geqq \eta > 0$. Protože F je v bodě x slabě spojitá, existuje $\delta > 0$ tak, že platí

$$|F(I)| < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

(m je počet rozměrů), kdykoli I je interval obsahující bod x o průměru $< \delta$. (Kdyby takové δ neexistovalo, mohli bychom sestrojit posloupnost $I_n \to x$, $F(I_n) \geqq \frac{\varepsilon}{2^m}$ pro $n = 1, 2, \ldots$) Zvolme nyní N tak, aby platilo

$$V(J_N) < 4\varepsilon;$$

označme $J_N = J$. Protože je $V(J) \geqq 3\varepsilon$, existuje dělení $\mathfrak{D}$ intervalu J tak, že $\sum_{I \in \mathfrak{D}} |F(I)| > 2\varepsilon$. Přidáním dalších dělicích bodů se příslušný součet nezmenší; můžeme tedy předpokládat, že všechny intervaly $I \in \mathfrak{D}$ mají průměr $< \delta$. Buď $\mathfrak{A}$ systém těch $I \in \mathfrak{D}$, jež obsahují x. Systém $\mathfrak{A}$ obsahuje nejvýš 2^m intervalů; sjednocení tohoto systému je jakýsi interval L.

Protože od jistého indexu je $J_n \subset L$, je $V(L) \geqq 3\varepsilon$. Protože pro $I \in \mathfrak{A}$ platí $|F(I)| < \frac{\varepsilon}{2^m}$, je $\sum_{I \in \mathfrak{A}} |F(I)| < \varepsilon$, tedy $\sum_{I \in \mathfrak{D} - \mathfrak{A}} |F(I)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$. Je tedy

$$V(J) = \sum_{I \in \mathfrak{D}} V(I) = \sum_{I \in \mathfrak{D} - \mathfrak{A}} V(I) + \sum_{I \in \mathfrak{A}} V(I) \geqq \sum_{I \in \mathfrak{D} - \mathfrak{A}} |F(I)| +$$
$$+ V(L) > \varepsilon + 3\varepsilon = 4\varepsilon.$$

Tento spor dokazuje větu.

56. Jsou-li f, g spojité funkce s konečnou variací v intervalu $\langle a, b \rangle$, nazveme dvojici $[f, g]$ (rovinnou) *křivkou* a množinu bodů tvaru $[f(t), g(t)]$ *grafem* křivky. Je-li nyní graf křivky částí intervalu K a je-li (bodová) funkce F spojitá v K, definuje se někdy křivkový integrál funkce F podle dané křivky C vzhledem k ose x (resp. vzhledem k ose y), značka $\int_C F(x, y)\, \mathrm{d}x$ (resp. $\int_C F(x, y)\, \mathrm{d}y$), jako „limita" součtů tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} F(f(\tau_i), g(\tau_i))(f(t_i) - f(t_{i-1}))$$
$$(\text{resp. } \sum_{i=1}^{n} F(f(\tau_i), g(\tau_i))(g(t_i) - g(t_{i-1}))),$$

při čemž $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $t_{i-1} \leqq \tau_i \leqq t_i$ a normy dělení konvergují k nule. Vidíme, že v tomto případě není $\int_C F(x, y)\, \mathrm{d}x$ (resp. $\int_C F(x, y)\, \mathrm{d}y$) nic jiného než Riemann-Stieltjesův integrál $\int_a^b F(f, g)\, \mathrm{d}f$ (resp. $\int_a^b F(f, g)\, \mathrm{d}g$). Můžeme tedy pojem křivkového integrálu zobecnit tak, že položíme

$$\int_C F(x, y)\, \mathrm{d}x = \int_a^b F(f, g)\, \mathrm{d}f \ (\text{resp. } \int_C F(x, y)\, \mathrm{d}y = \int_a^b F(f, g)\, \mathrm{d}g),$$

kdykoli integrál napravo existuje (jako Perronův integrál). O funkcích f, g předpokládáme, že jsou spojité s konečnou variací; funkce F nemusí být definována jinde než na grafu křivky.

Naskýtá se nyní otázka, zda jsou při dané funkci F stejné integrály podle dvou křivek o témže grafu. Odpověď není „triviální": integrujeme-li totiž „v obráceném směru", dostaneme zřejmě hodnotu s opačným znaménkem. V jistém smyslu je však odpověď na uvedenou otázku přece jen kladná. Je-li totiž φ spojitá neklesající v $\langle c, d \rangle$, při čemž $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, platí pro křivku $C' = [f(\varphi), g(\varphi)]$ vztah

$$\int_C F(x, y)\, \mathrm{d}x = \int_{C'} F(x, y)\, \mathrm{d}x,$$

jakmile jeden z integrálů existuje (C je ovšem křivka $[f, g]$). Důkaz tohoto vztahu (jakož i jeho triviální zobecnění na případ více než dvou rozměrů) budiž opět přenechán čtenáři za cvičení. (Je-li v variace bodové funkce g a je-li φ spojitá neklesající, je $v(\varphi)$ variace funkce $g(\varphi)$. Odtud plyne snadno, že věta 31 platí při vhodné formulaci i pro funkci s konečnou variací; tím je v podstatě důkaz proveden.)

Cvičení 1. Dokažte, že ve větě 72, § 2 stačí místo vztahu $f_n \to f$ předpokládat jen $f_n(x) \to f(x)$ skoro všude.

Cvičení 2. Buď I interval, $I \subset K$. Pak $\mu(I^\circ, G, K) = \sup G(J)$, kde $J \subset I^\circ$; $\mu(I) = \inf G(JK)$, kde $J^\circ \supset I$. Je-li funkce G spojitá (viz 79, § 2), je $\mu(I^\circ) = \mu(I) = G(I)$. (Návod: Je-li $J \subset I^\circ$, je funkce M, určená vztahem $M(L) = G(JL)$ resp. $M(L) = 0$ podle toho, je-li JL interval či ne, majorantou k c_J a minorantou k c_{I°; je tedy $\bar{\mu}(J) \leqq G(J) \leqq \underline{\mu}(I^\circ)$. Jestliže nyní $\sum\limits_{n=1}^{\infty} J_n = I^\circ$, kde $J_n \subset \overset{\circ}{J}_{n+1}$, je $\bar{\mu}(I^\circ) = \lim \bar{\mu}(J_n) \leqq \lim G(J_n) \leqq \sup\limits_{J \subset I^\circ} G(J) \leqq \underline{\mu}(I^\circ)$. Ostatní je snadné.)

Cvičení 3. Nechť $f \in \mathfrak{P}_A(G, K)$, kde $K = \langle a, b \rangle$, $G(x) = x$. Pak pro $c \in (a, b)$ platí

$$\lim_{h \to 0+} \int_a^c |f(x+h) - f(x)| \, dx = 0.$$

(Návod: Je-li f spojitá, plyne vztah ze stejnoměrné spojitosti. Je-li $f \in \mathfrak{P}_A$ a je-li φ spojitá, platí $|f(x+h) - f(x)| \leqq |f(x+h) - \varphi(x+h)| + |\varphi(x+h) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x)|$. Nyní použijeme věty 13.)

Cvičení 4. Nechť $f \in \mathfrak{P}_0(G, \langle c, d \rangle)$, $\varphi \in \mathfrak{P}_A(G, \langle a, b \rangle)$, kde $G(x) = x$. Buď bodová funkce Φ neurčitým integrálem funkce φ, $c \leqq \Phi \leqq d$. Pak je $f(\Phi) \,.\, \varphi \in \mathfrak{P}_A(G, \langle a, b \rangle)$ a platí

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\Phi(t)) \, \varphi(t) \, dt.$$

(Návod: Jsou-li f, φ spojité, je to zřejmé; odtud plyne snadno, že věta platí, je-li f spojitá, $\varphi \in \mathfrak{R}$ atd. Je výhodné rozšířit funkci f spojitě na celou přímku. Postupnými limitními přechody a event. změnou funkce φ na množině míry 0 dokážeme větu za předpokladu, že f je omezená funkce 2. třídy a že $\varphi \in \mathfrak{P}_A$. Je-li nyní $f \in \mathfrak{P}_0$, existují omezené funkce 2. třídy g, h tak, že platí $\int_c^d g = \int_c^d h$, $g \leqq f \leqq h$. Pak jsou neurčité integrály funkcí $g(\Phi) \,.\, \varphi$, $h(\Phi) \,.\, \varphi$ stejné; tedy je $g(\Phi(t)) \,.\, \varphi(t) = h(\Phi(t)) \,.\, \varphi(t)$ skoro všude. Odtud plyne, že platí na př. také $f(\Phi(t)) \,.\, \varphi(t) = g(\Phi(t)) \,.\, \varphi(t)$ skoro všude. Dostáváme tak $\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} g = \int_a^b g(\Phi) \,.\, \varphi = \int_a^b f(\Phi) \,.\, \varphi$.)

Cvičení 5. Nechť $f \in \mathfrak{P}_A(G, K)$, $K = \langle a, b \rangle$, $G(x) = x$. Pak platí

$$\lim_{h \to 0} \left(\left(\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt \right) : h \right) = 0$$

pro skoro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. (Návod: Zvolme $c \in E_1$; buď F neurčitým integrálem funkce $|f - c|$. Podle 44 platí $|f(x) - c| = F'(x) = \lim\limits_{h \to 0}((F(x+h) - F(x)) : h) = \lim\limits_{h \to 0}((\int_x^{x+h} |f(t) - c| \, dt) : h)$ pro skoro všechna x, t. j. pro všechna $x \in K - A_c$, kde množina A_c má míru 0. Sestrojme takovéto množiny $A_{c_1}, A_{c_2}, \ldots$ pro všechna racionální $c_1, c_2, \ldots$; buď $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_{c_i}$. Zvolíme-li pak libovolné racionální číslo c a libovolné $x \in K - A$, platí $\lim_{h\to 0}((\int_x^{x+h} |f(t) - c| \, \mathrm{d}t) : h) = |f(x) - c|$. Protože však každé reálné číslo lze libovolně dobře aproximovat racionálním číslem, platí tento vztah dokonce pro libovolné $x \in K - A$ a libovolné reálné c, tedy specielně též pro $c = f(x)$; můžeme zřejmě předpokládat, že f je konečná funkce.)

Cvičení 6. Buď $f \geqq 0$, $f \in \mathfrak{P}_0(G, K)$; nechť $1 \leqq c < \infty$. Pak $f^c \in \mathfrak{P}(G, K)$. (Návod: Podle věty o střední hodnotě pro funkci $\psi(t) = t^c$ platí $a^c - b^c = (a - b) \, . \, c \, . \, \xi^{c-1}$, kde ξ leží mezi a a b. Je-li $0 \leqq f \leqq A$, $\varepsilon > 0$, najdeme podle věty 13 spojitou funkci φ tak, aby platilo $0 \leqq \varphi \leqq A$, $A \, . \, c \, . \int_K |f - \varphi| < \varepsilon$. Pak je též $\int_K |f^c - \varphi^c| < \varepsilon$.)

Cvičení 7. Nechť $f \geqq 0$, $f \in \mathfrak{P}$, $0 \leqq c \leqq 1$. Pak $f^c \in \mathfrak{P}$. (Návod: Je-li $f \geqq 1$, provedeme důkaz podobně jako ve cvičení 6. Odtud plyne pro libovolnou nezápornou funkci $f \in \mathfrak{P}$ vztah $(f_n)^c \in \mathfrak{P}$, kde $f_n = \max\left(\frac{1}{n}, f\right)$; je tedy též $f^c = \lim (f_n)^c \in \mathfrak{P}$.)

Cvičení 8. Nechť $f \in \mathfrak{P}_A$, $c \in \langle 1, \infty)$. Pak $|f|^c \in \mathfrak{P}_B$. (Plyne snadno z 6.)

Cvičení 9. Nechť $f \in \mathfrak{P}$, $f^2 \in \mathfrak{P}$. Pak je $f \in \mathfrak{P}_A$. (Viz cvič. 7.)

Cvičení 10. Nechť f, g, f^2, g^2 jsou prvky $\mathfrak{P}$. Pak je též $fg \in \mathfrak{P}$. (Návod: Podle cvič. 9 můžeme předpokládat $f \geqq 0$, $g \geqq 0$. Buďte $f_n = \min(n, f)$, $g_n = \min(n, g)$. Pak $f_n g_n \nearrow fg$, $2fg \leqq f^2 + g^2$, tedy $fg \in \mathfrak{P}$.)

Cvičení 11. Nechť konečné funkce f, g mají tu vlastnost, že platí $f^n \in \mathfrak{P}$, $g^n \in \mathfrak{P}$ pro každé přirozené n. Pak mají touž vlastnost i funkce fg, $f + g$. (Návod: Podle cvičení 10 je $(fg)^n = f^n g^n \in \mathfrak{P}$ pro každé n. Je-li nyní $p + q = n$, $f, g \geqq 0$, je $f^p g^q \leqq$ $\leqq (\max(f, g))^n \leqq f^n + g^n$; z binomického rozvoje tedy plyne $(f + g)^n \leqq 2^n(f^n + g^n)$. Odtud plyne snadno $(f + g)^n \in \mathfrak{P}$.)

Cvičení 12. Nechť $f \in \mathfrak{P}_0(G, K)$, $0 \leqq f \leqq c$. Definujme v intervalu $K_1 =$ $= K \times \langle 0, c \rangle \subset E_{m+1}$ funkci intervalu G_1 vztahem

$$G_1(I) = G(I) \, . \, (b - a),$$

kde $I \subset K$, $\langle a, b \rangle \subset \langle 0, c \rangle$. Buď $A = A_f$ (resp. $B = B_f$) množina těch $[x, y] \in E_{m+1}$, kde $x \in K$, $0 \leqq y < f(x)$ (resp. $0 \leqq y \leqq f(x)$). Pak platí

$$\mu(A, G_1, K_1) = \mu(B, G_1, K_1) = \int_K f \, \mathrm{d}G.$$

(Návod: Je-li $f =$ konst. $= c_1 > 0$, platí pro $c_0 < c_1$, $c_0 > 0$ vztahy $G(K) \, . \, c_0 =$ $= G_1(K \times \langle 0, c_0 \rangle) = \int_{K \times \langle 0, c_0 \rangle} 1 \, \mathrm{d}G_1 \leqq \int_{K_1} c_A \, \mathrm{d}G_1 = \mu(A, G_1, K_1) = \int_{K \times \langle 0, c_1 \rangle} c_A \, \mathrm{d}G_1 + \int_{K \times \langle c_1, c \rangle} c_A \, \mathrm{d}G_1 \leqq$ $\leqq \int_{K \times \langle 0, c_1 \rangle} 1 \, \mathrm{d}G_1 + \int_{K \times \langle c_1, c \rangle} 0 \, \mathrm{d}G_1 = G_1(K \times \langle 0, c_1 \rangle) = c_1 \, . \, G(K) = \int_K f \, \mathrm{d}G$. Odtud plyne snadno věta pro konstantní funkci a dále pro funkci, která má Riemannův integrál. Jestliže $0 \leqq f_n \leqq c$, $f_n \nearrow f$, je $A_{f_1} \subset A_{f_2} \subset \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_{f_n} = A_f$. Odtud dostáváme větu pro funkce z množiny $\mathfrak{R}$, podobně pro funkce z množiny $\mathfrak{K}$ a podle věty 11 také pro libovolnou nezápornou funkci z množiny $\mathfrak{P}_0$.)

Cvičení 13. Buď f spojitá rostoucí v $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; buď g inversní funkce k funkci f. Pak platí pro libovolná nezáporná čísla a, b

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx \geqq ab;$$

rovnost v tomto vztahu platí, když a jen když $b = f(a)$. (Návod: Nakreslete si obrázek a použijte cvičení 12.)

Cvičení 14. Buďte p, q kladné čísla, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak platí pro libovolná nezáporná a, b

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqq ab;$$

rovnost platí, když a jen když je $b = a^{p-1}$. (Plyne snadno ze cvič. 13; je $(p-1)$ . . $(q-1) = 1$.)

Cvičení 15. Nechť $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 0$. Nechť pro funkce f, g platí $f, g \in \mathfrak{P}$, $|f|^p$, $|g|^q \in \mathfrak{P}$. Pak je též f, g, $fg \in \mathfrak{P}_A$ a platí t. zv. *Hölderova nerovnost*

$$\int_K fg \leqq \left(\int_K |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_K |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(Návod: Nechť $\alpha^p = \int_K |f|^p > 0$, $\beta^q = \int_K |g|^q > 0$; buď $f_1 = \frac{|f|}{\alpha}$, $g_1 = \frac{|g|}{\beta}$. Podle cvičení 14 je $\int_K |f_1 g_1| \leqq 1$.)

Cvičení 16. Pro $p \in \langle 1, \infty)$ buď $\mathfrak{L}_p$ množina těch konečných funkcí $f \in \mathfrak{P}$, pro něž také $|f|^p \in \mathfrak{P}$. Pak $\mathfrak{L}_p \subset \mathfrak{P}_A$; jestliže $f, g \in \mathfrak{L}_p$, pak také $f + g \in \mathfrak{L}_p$. Označíme-li ještě $\|f\|_p = \left(\int_K |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, platí t. zv. *Minkowského nerovnost*

$$\|f + g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dále je $\|f\|_p = 0$, když a jen když $f(x) = 0$ skoro všude. Jestliže $f \in \mathfrak{L}_p$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spojitá funkce φ tak, že je $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$. (Návod: Jsou-li f, g nezáporné omezené, $f, g \in \mathfrak{P}$, pak pro $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ platí $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$, tedy podle cvič. 15 $\int_K (f+g)^p \leqq \left(\int_K f^p\right)^{\frac{1}{p}}$. $\left(\int_K (f+g)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_K g^p\right) . \left(\int_K (f+g)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) . \left(\int_K (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}}$, tedy $\|f\|_p + \|g\|_p \geqq \left(\int_K (f+g)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} = \|f+g\|_p$. Snadno se zjistí, že tento vztah platí pro libovolné funkce $f, g \in \mathfrak{L}_p$. Je-li dále $f \in \mathfrak{L}_p$, $\varepsilon > 0$, najdeme omezenou funkci f^*, $|f^*| \leqq M$, a spojitou funkci φ, $|\varphi| \leqq M$, tak, aby platilo

$$\int_K |f - f^*|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p, \int_K |f^* - \varphi| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \cdot \frac{1}{(2M)^{p-1}}.$$

Pak je $\|f - \varphi\|_p \leqq \|f - f^*\|_p + \|f^* - \varphi\|_p < \varepsilon$.)

Cvičení 17. Funkce f se nazývá ***měřitelnou*** (vzhledem k funkci G a intervalu K), je-li pro každé $c \in E_1$ množina $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) > c]$ měřitelná. Dokažte, že funkce f je měřitelná, když a jen když platí některá z těchto čtyř podmínek: Při každém racionálním c je měřitelná množina a) $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) > c]$, b) $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) \geqq c]$, c) $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) < c]$, d) $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) \leqq c]$.

Cvičení 18. Dokažte, že každá funkce $f \in \mathfrak{P}_A$ je měřitelná. (Návod: Stačí dokázat, že je množina $A = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) > 0]$ měřitelná, kdykoli $f \geqq 0$, $f \in \mathfrak{P}$. Je-li pak $f_n =$
$= \min\left(\frac{1}{n}, f\right)$, je $n \,.\, f_n \nearrow c_A$.)