Časopis pro pěstování matematiky

Václav Vilhelm; Čestmír Vitner
Spojitost v metrických prostorech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 2, 147--173

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117027`

SPOJITOST V METRICKÝCH PROSTORECH

VÁCLAV VILHELM a ČESTMÍR VITNER, Praha.

(Došlo dne 20. června 1951.) 519

Práce se zabývá rozborem pojmu spojitosti v metrických prostorech. V odst. 1 se vyšetřují spojitá, stejnoměrně spojitá a cauchyovsky spojitá zobrazení. (Říkáme, že zobrazení f prostoru P_1 do P_2 je na P_1 cauchyovsky spojité, jestliže každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ z P_1 se zobrazí na cauchyovskou posloupnost $\{f(x_n)\}$ z P_2.) Jsou zde předně udány nutné a postačující podmínky pro to, aby zobrazení f bylo spojité, resp. cauchyovsky spojité, resp. stejnoměrně spojité. Dále jsou zde určeny prostory, na nichž každé zobrazení f do libovolného prostoru je spojité, resp. cauchyovsky spojité, resp. stejnoměrně spojité. Nakonec jsou studována spojitá zobrazení na speciálních prostorech (úplných a kompaktních). Odst. 2 se zabývá spojitostí funkcí, t. j. spojitostí zobrazení do jednorozměrného eukleidovského prostoru E_1. Jádro tohoto paragrafu tvoří rozšíření oboru spojité, resp. cauchyovsky, resp. stejnoměrně spojité funkce a určení prostorů, v nichž každá spojitá funkce je cauchyovsky, resp. stejnoměrně spojitá. Nakonec jsou uvedeny hlavní věty o spojitých funkcích, jež se dokazují v elementární analyse pro funkce jedné reálné proměnné. Tato práce shrnuje známé výsledky o spojitých zobrazeních, nikoliv ovšem úplně vyčerpávajícím způsobem. Podnět k práci nám dala přednáška doc. *M. Katětova* o abstraktních prostorech. Pokud čtenář bude postrádat definice některých užívaných pojmů, odkazujeme ho na knihu prof. *E. Čecha*: *Bodové množiny*. Jde hlavně o některé základní pojmy z theorie množin a theorie metrických prostorů. Pro stručnost jsme vypustili důkazy těch vět, které jsou obsaženy ve zmíněné knize prof. Čecha.

I. Spojité, cauchyovsky spojité, stejnoměrně spojité zobrazení v metrických prostorech.

Definice 1,1. Nechť f je zobrazení metrického prostoru $P_1(\varrho_1)$ do metrického prostoru $P_2(\varrho_2)$. Říkáme, že (1) *f je v bodě $x \in P_1$ spojité*, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že $y \in P_1$, $\varrho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \Rightarrow \varrho_2[f(x), f(y)] < \varepsilon$; (2) *$f$ je na P_1 spojité*, je-li spojité v každém bodě prostoru P_1; (pravíme také, že f je spojité zobrazení P_1 do P_2); (3) *f je na P_1 cauchyovsky spojité*, je-li $\{f(x_n)\}$ cauchyovská posloupnost v P_2, kdykoli $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost*) v P_1. (4) *f je na P_1 stejno-*

*) Definice: Nechť P je metrický prostor. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z P. Pravíme, že $\{x_n\}$ je *cauchyovská posloupnost*, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index p tak, že $m > p$, $n > p \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

měrně spojité, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že $x \in P_1$, $y \in P_1$, $\varrho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho_2[f(x), f(y)] < \varepsilon$.

Příklady: 1. Nechť $P_1 = P_2 = E_1$ s obvyklou metrikou. Zobrazení f prostoru P_1 do P_2 definujme takto: $x \in P_1$, x iracionální $\Rightarrow f(x) = 0$, $x \in P_1$, x racionální $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = x$. Pak f je spojité v bodě 0 a nikde jinde.

2. Nechť $P_1 = P_2 = E_1$ s obvyklou metrikou. Nechť $x \in P_1 \Rightarrow f(x) = x^2$. Pak, jak se snadno přesvědčíme, je f spojité a cauchyovsky spojité zobrazení P_1 do P_2. f není však na P_1 stejnoměrně spojité: položíme-li totiž $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$, pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, pak $\varrho_1(x_n, y_n) = \frac{1}{n}$, ale $\varrho_2[f(x_n), f(y_n)] = \left|n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$.

3. Nechť P_1 je interval $(0, \infty)$ v E_1, $P_2 = E_1$, ϱ_1, ϱ_2 obyčejná metrika v E_1. Budiž f zobrazení P_1 do P_2 takové, že $x \in P_1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$. Pak f je spojité, ale není cauchyovsky spojité: položíme-li $x_n = \frac{1}{n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, pak $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost, ale posloupnost $\{f(x_n)\}$, t. j. $\{n\}$, není cauchyovská.

Budiž f zobrazení P_1 do P_2. Nechť $A \subset P_2$. Pak $f^{-1}(A)$ bude značit množinu $\underset{x \in P_1}{\mathrm{E}} [f(x) \in A]$.

Věta 1,1. *Zobrazení f prostoru P_1 do P_2 je spojité, když a jen když platí jedna z těchto podmínek:*

(1) $n = 1, 2, 3, \ldots$, $x_n \in P_1$, $x \in P_1$, $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$,
(2) $x \in P_1$, $A \subset P_1$, $\varrho_1(x, A) = 0 \Rightarrow \varrho_2[f(x), f(A)] = 0$,
(3) $A \subset P_1 \Rightarrow f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$,*)
(4) $B \subset P_2$, B *uzavřená v* $P_2 \Rightarrow f^{-1}(B)$ *uzavřená v* P_1,
(5) $C \subset P_2$, C *otevřená v* $P_2 \Rightarrow f^{-1}(C)$ *otevřená v* P_1.

Důkaz: (1) Viz Čech: BM, str. 44.
(4) a (5) Viz Čech: BM, str. 45.

(2) Nechť f je na P_1 spojité; mějme $x \in P_1$, $A \subset P_1$, $\varrho_1(x, A) = 0$. K $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $y \in P_1$, $\varrho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho_2[f(x, y)] < \varepsilon$. Protože $\varrho_1(x, A) = 0$, existuje $z \in A$ tak, že $\varrho_1(x, z) < \delta$, tedy $\varrho_2[(f(x), f(z)] < \varepsilon$, $f(z) \in f(A)$. To platí pro každé $\varepsilon > 0$. Proto $\varrho_2[f(x), f(A)] = 0$. — Obráceně sporem. Nechť f splňuje (2), ale není spojité. Pak neplatí (1). To znamená, že existuje posloupnost $\{x_n\}$ v P_1, $x_n \to x \in P_1$, ale neplatí $f(x_n) \to f(x)$. Tedy lze z $\{f(x_n)\}$ vybrat $\{f(x_{k_n})\}$ tak, že $\varrho_2[f(x_{k_n}), f(x)] \geqq \geqq \alpha > 0$ pro všechna n. Buď A množina všech x_{k_n}. Pak $\varrho_1(x, A) = 0$, avšak $\varrho_2[f(x), f(A)] = \inf \varrho_2[f(x), f(x_{k_n})] \geqq \alpha > 0$, což je spor.

Tedy f je spojité.

---

*) $\bar{A}$ značí *uzávěr* A v P_1.

(3) Nechť f je spojité na P_1; mějme $A \subset P_1$. Nechť $x \in \bar{A}$, t. j. $\varrho_1(x, A) = 0$. Odtud podle (2) plyne $\varrho_2[f(x), f(A)] = 0$, t. j. $f(x) \in \overline{f(A)}$. Tedy $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. — Nechť naopak platí (3). Mějme $x \in P_1$, $A \subset P_1$, $\varrho_1(x, A) = 0$. T. zn. $x \in \bar{A}$, tedy $f(x) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, tudíž $\varrho_2[f(a), f(A)] = 0$, a proto je f podle (2) spojitá.

Věta 1,2. *Nechť f je zobrazení prostoru P_1 do P_2. Je-li f stejnoměrně spojité, pak je cauchyovsky spojité; je-li f cauchyovsky spojité, pak je spojité.*

Důkaz: 1. Nechť f je stejnosměrně spojité, $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v P_1. K $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $x \in P_1$, $y \in P_1$, $\varrho_1(x, y) < < \delta \Rightarrow \varrho_2[f(x), f(y)] < \varepsilon$. K tomuto $\delta > 0$ existuje index p tak, že $m > p$, $n > p \Rightarrow \varrho_1(x_m, x_n) < \delta$, a proto $\varrho_2[f(x_m), f(x_n)] < \varepsilon$. Tedy $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská posloupnost v P_2.

2. Nechť f je cauchyovsky spojité zobrazení. Nechť pro $n = 1, 2, \ldots$ jest $x_n \in P_1$, $x_n \to x \in P_1$. Utvořme posloupnost $\{x_1, x, x_2, x, x_3, x, ..\}$; ta je cauchyovská. Proto i $\{f(x_1), f(x), f(x_2), f(x), \ldots\}$ je cauchyovská. Tudíž k $\varepsilon > 0$ existuje index p takový, že $n > p \Rightarrow \varrho_2[f(x_n), f(x)] < \varepsilon$, čili $f(x_n) \to f(x)$ a f je podle věty 1,1 (1) spojité.

V dalším uvedeme určité nutné a postačující podmínky, aby dané zobrazení f P_1 do P_2 bylo na P_1 stejnoměrně spojité. Za tím účelem si nejprve dokážeme tuto pomocnou větu:

Věta 1,3. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v prostoru P. Nechť z ní nelze vybrat cauchyovskou posloupnost. Potom existuje $\beta > 0$ a vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}$ taková, že $m \neq n \Rightarrow \varrho(x_{k_n}, x_{k_m}) > \beta$.*

Důkaz: Předpokládejme, že z $\{x_n\}$ nelze vybrat takovou posloupnost $\{x_{k_n}\}$ pro žádné $\beta > 0$ a dokážeme, že pak lze z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat posloupnost cauchyovskou.

Nejdříve dokážeme, že k libovolnému $\beta > 0$ existuje index i tak, že pro nekonečně mnoho n platí $\varrho(x_i, x_n) \leq \beta$. Kdyby totiž ke každému i existovalo jen konečně mnoho takových n, mohli bychom volit $x_{n_1} = x_1$ a k němu $n_2 > 1$ tak, že $\varrho(x_{n_1}, x_{n_2}) > \beta$.

Dále bychom mohli najít $n_3 > n_2$ tak, aby platilo

$$\varrho(x_{n_j}, x_{n_3}) > \beta \text{ pro } j = 1, 2;$$

obecně bychom k bodům $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ mohli najít $n_{k+1} > n_k$ tak, aby platilo

$$\varrho(x_{n_j}, x_{n_{k+1}}) > \beta \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, k.$$

Pro takto utvořenou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ by pak platila implikace $k \neq h \Rightarrow \varrho(x_{n_k}, x_{n_h}) > \beta$, což by odporovalo našemu předpokladu o posloupnosti $\{x_n\}$.

Zejména tedy (pro $\beta = \frac{1}{2}$) existuje index i tak, že pro nekonečně mnoho n platí $\varrho(x_{i_1}, x_n) \leqq \frac{1}{2}$. Existuje tedy též posloupnost $\{x_{k_n}\}$, vybraná z $\{x_n\}$ tak, že platí

$$k_n > i_1, \ \varrho(x_{i_1}, x_{k_n}) \leqq \tfrac{1}{2} \text{ pro } n = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Označme $x_{k_n} = x_n^{(1)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Z posloupnosti $\{x_n^{(1)}\}$ ovšem zase nelze pro žádné $\beta > 0$ vybrat posloupnost $\{x_{k_n}^{(1)}\}$ tak, aby pro $m \neq n$ bylo $\varrho(x_{k_m}^{(1)}, x_{k_n}^{(1)}) > \beta$; opět tedy k libovolnému $\beta > 0$ existuje index i tak, že platí pro nekonečně mnoho n $\varrho(x_i^{(1)}, x_n^{(1)}) \leqq \beta$.

Volíme-li nyní $\beta = \frac{1}{4}$, existuje index j_2 tak, že pro nekonečně mnoho n platí $\varrho(x_{j_2}^{(1)}, x_n^{(1)}) \leqq \frac{1}{4}$. Položíme-li $k_{j_2} = i_2$ neboli $x_{j_2}^{(1)} = x_{i_2}$, vidíme, že platí pro nekonečně mnoho n $\varrho(x_{i_2}, x_n) \leqq \frac{1}{4}$. Podle (1) je $i_2 > i_1$, $\varrho(x_{i_1}, x_{i_2}) \leqq \frac{1}{2}$. Tak postupujeme dále: k bodům $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ vždy najdeme bod $x_{i_{m+1}}$ tak, že platí $i_m < i_{m+1}$, $\varrho(x_{i_m}, x_{i_{m+1}}) \leqq \dfrac{1}{2^m}$ a že pro nekonečně mnoho n je $\varrho(x_{i_{m+1}}, x_n) \leqq \dfrac{1}{2^{m+1}}$. Vidíme, že pro $n > m$ je

$$\varrho(x_{i_m}, x_{i_n}) \leqq \varrho(x_{i_m}, x_{i_{m+1}}) + \ldots + \varrho(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{m-1}}.$$

To však značí, že posloupnost $\{x_{i_n}\}$ je cauchyovská.

Věta 1,4. *Zobrazení f prostoru P_1 do P_2 je stejnoměrně spojité, když a jen když platí jedna z těchto podmínek:*

1) $x_n, y_n \in P_1$ $\varrho_1(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow \varrho_2[f(x_n), f(y_n)] \to 0$,
2) $A \subset P_1$, $B \subset P_1$, $\varrho_1(A, B) = 0 \Rightarrow \varrho_2[f(A), f(B)] = 0$,
3) $C \subset P_2$, $D \subset P_2$, $\varrho_2(C, D) > 0 \Rightarrow \varrho_1[f^{-1}(C), f^{-1}(D)] > 0$.

Důkaz: 1) Viz Čech: BM, str. 49.

2) Dokážeme ekvivalenci podmínek 1) a 2).

a) 1) $\Rightarrow$ 2):

Nechť $A \subset P_1$, $B \subset P_1$, $\varrho_1(A, B) = 0$. Tedy $\inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}}[\varrho_1(x, y)] = 0$.

Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ existují tudíž body $x_n \in A$, $y_n \in B$ tak, že $\varrho_1(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$, t. j. $\varrho_1(x_n, y_n) \to 0$; odtud $\varrho_2[f(x_n), f(y_n)] \to 0$, $f(x_n) \in f(A)$, $f(y_n) \in f(B)$. Tedy vskutku $\varrho_2[f(A), f(B)] = 0$.

b) 2) $\Rightarrow$ 1):

Stačí dovést ke sporu předpoklad, že 1) neplatí a 2) platí. Nechť tedy existují posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ bodů z P_1 takové, že $\varrho_1(x_n, y_n) \to 0$, ale neplatí $\varrho_2[f(x_n), f(y_n)] \to 0$. Lze proto vybrat z $\{\varrho_2[f(x_n), f(y_n)]\}$ posloupnost tak, že všechny členy jsou větší než určité kladné číslo. Lze tudíž rovnou předpokládat, že $\varrho_2[f(x_n), f(y_n)] > \alpha > 0$ pro všechna n. Nyní máme dva případy.

(A) Nechť aspoň z jedné z posloupností $\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ lze vybrat cauchyovskou posloupnost. Předpokládejme, že je to $\{f(x_n)\}$; tu vybranou posloupnost označme $\{f(x_{k_n})\}$. Lze ji vybrat tak, aby pro všechna přirozená m, n platilo

$$\varrho_2[f(x_{k_m}), f(x_{k_n})] < \frac{\alpha}{2}.$$

Potom jest pro všechna m, n

$$\varrho_2[f(x_{k_m}), f(y_{k_n})] > \frac{\alpha}{2},$$

neboť z

$$\varrho_2[f(x_{k_m}), f(y_{k_n})] \leqq \frac{\alpha}{2},$$

$$\varrho_2[f(x_{k_m}), f(x_{k_n})] < \frac{\alpha}{2}$$

plyne

$$\varrho_2[f(x_{k_n}), f(y_{k_n})] < \alpha,$$

což neplatí.

Budiž A množina všech x_{k_n}, B množina všech y_{k_n}.

Platí $\varrho_1(x_{k_n}, y_{k_n}) \to 0$, čili $\varrho_1(A, B) = 0$, avšak v důsledku

$$\varrho_2[f(x_{k_m}), f(y_{k_n})] > \frac{\alpha}{2}$$

jest

$$\varrho_2[f(A), f(B)] \geqq \frac{\alpha}{2},$$

což je spor.

(B) Nechť ani z $\{f(x_n)\}$ ani z $\{f(y_n)\}$, nelze vybrat cauchyovskou posloupnost. Potom podle věty 1,3 lze z $\{f(x_n)\}$ vybrat $\{f(x_{k_n})\}$ tak, že $m \neq n \Rightarrow \varrho_2[f(x_{k_m}), f(x_{k_n})] > \beta_1 > 0$. Nyní z $\{f(y_{k_n})\}$ také ovšem nelze vybrat cauchyovskou posloupnost. Tedy existuje $\beta_2 > 0$ a posloupnost

$\{f(y'_n)\}$ vybraná z $\{f(y_{k_n})\}$ tak, že $m \neq n \Rightarrow \varrho_2[f(y'_m), f(y'_n)] > \beta_2 > 0$. Pak tedy je

$$m \neq n \Rightarrow \varrho_2[f(x'_m), f(x'_n)] > \beta > 0,$$
$$m \neq n \Rightarrow \varrho_2[f(y'_m), f(y'_n)] > \beta > 0,$$

kde $\beta = \min(\beta_1, \beta_2)$.

Odtud snadno plyne:

(1) ke každému indexu k existuje nejvýš jedno n tak, že $\varrho_2[f(x'_k), f(y'_n)] \leqq \frac{1}{2}\beta$,

(2) ke každému indexu k existuje nejvýš jedno n tak, že $\varrho_2[f(y'_k), f(x'_n)] \leqq \frac{1}{2}\beta$.

Definujme rekurentně posloupnost $\{y'_{i_k}\}$:

Položme $y'_1 = y'_{i_k}$. Budiž $k = 1, 2, 3, \ldots$ Mějme už y'_{i_k}. Pak v důsledku (1) existuje $y'_{i_{k+1}} \in \{y'_k\}$, $i_k < i_{k+1}$, tak, že

$$\varrho_2[f(x'_j), f(y'_{i_{k+1}})] > \tfrac{1}{2}\beta \text{ pro všechna } j = 1, 2, \ldots, i_k. \tag{3}$$

Máme tak posloupnost $\{y'_{i_k}\}$ vybranou z $\{y'_n\}$.

Potom platí podle (3)

$$j < k \Rightarrow \varrho_2[f(x'_{i_j}), f(y'_{i_k})] > \tfrac{1}{2}\beta. \tag{4}$$

Položme $x'_{i_k} = x''_k$, $y'_{i_k} = y''_k$. Podle (4) platí

$$j < k \Rightarrow \varrho_2[f(x''_j), f(y''_k)] > \tfrac{1}{2}\beta \tag{5}$$

a ke každému k existuje podle (2) nejvýš jedno n tak, že

$$\varrho_2[f(y''_k), f(x''_n)] \leqq \tfrac{1}{2}\beta. \tag{6}$$

Položme nyní $x''_1 = x''_{i_1}$. Budiž $k = 1, 2, 3, \ldots$; mějme už definováno x''_{i_k}. Pak podle (6) existuje bod $x''_{i_{k+1}} \in \{x''_n\}$, $i_k < i_{k+1}$, tak, že

$$\varrho_2[f(y''_j), f(x''_{i_{k+1}})] > \tfrac{1}{2}\beta \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, i_k. \tag{7}$$

Máme tak posloupnost $\{x''_{i_k}\}$ vybranou z $\{x''_k\}$. Utvořme $\{y''_{i_k}\}$ vybranou z $\{y''_k\}$. Potom je podle (7)

$$j < k \Rightarrow \varrho_2[f(y''_{i_j}), f(x''_{i_k})] > \tfrac{1}{2}\beta,$$

podle (5) (8)

$$j < k \Rightarrow \varrho_2[f(y''_{i_j}), f(x''_{i_k})] > \tfrac{1}{2}\beta.$$

Konečně je, jak víme, pro všechna k

$$\varrho_2[f(x''_{i_k}), f(y''_{i_k})] > \alpha. \tag{9}$$

Nyní množinu všech x''_{i_k} pro $k = 1, 2, \ldots$ označme A, množinu všech y''_{i_k} pro $k = 1, 2, \ldots$ označme B.

Jest $A \subset P_1$, $B \subset P_1$, $\varrho_1(A, B) = 0$, neboť $\varrho_1(x''_{ik}, y''_{ik}) \to 0$. Avšak $\varrho_2[f(A), f(B)] \geqq \min(\alpha, \frac{1}{2}\beta) > 0$ podle (8) a (9) a to je spor. Tedy 1) $\Leftrightarrow$ 2).

3) Předně platí 2) $\Rightarrow$ 3):

Mějme

$$M \subset P_2,\ N \subset P_2,\ \varrho_2(M, N) > 0,\ f^{-1}(M) = A,\ f^{-1}(N) = B.$$

Kdyby $\varrho_1(A, B) = 0$, pak z 2) plyne $\varrho_2(M, N) = 0$ a to je spor. Nyní dokážeme, že 3) $\Rightarrow$ 2). Nechť $A \subset P_1$, $B \subset P_2$, $\varrho_1(A, B) = 0$. Kdyby $\varrho_2[f(A), f(B)] > 0$, potom by podle 3) bylo

$$\varrho_1[f^{-1}(f(A)), f^{-1}(f(B))] > 0,\ f^{-1}(f(A)) \supset A,\ f^{-1}(f(b)) \supset B,$$

tedy také $\varrho_1(A, B) > 0$, což je spor. Tedy $\varrho_2[f(A), f(B)] = 0$ a věta je dokázána.

Položme si nyní otázku, jaký musí být prostor P_1, aby každé zobrazení prostoru P_1 do libovolného prostoru P_2 bylo spojité (resp. cauchyovsky spojité, resp. stejnoměrně spojité). Odpověď dávají následující tři věty.

Věta 1,5. *Každé zobrazení f prostoru P_1 do libovolného metrického prostoru P_2 je spojité, když a jen když má P_1 jednu z těchto ekvivalentních vlastností:*

(1) $x \in P_1$, $A \subset P_1$, $\varrho_1(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A$,
(2) *P_1 je isolovaný*) prostor.*

Důkaz: Nechť platí (1).

Budiž f zobrazení P_1 do P_2. Nechť $x \in P_1$, $A \subset P_1$, $\varrho_1(x, A) = 0$. Pak $x \in A$, tedy $f(x) \in f(A)$ a proto $\varrho_2[f(x), f(A)] = 0$. Tedy f je spojité podle věty 1,1 (2).

Obráceně nechť existuje $x \in P_1$, $A \subset P_1$, $\varrho_1(x, A) = 0$, x non $\in A$. Pak za P_2 vezměme množinu $\{1\} + \{2\}$, $\varrho_1(1, 2) = 1$ a definujme f předpisem $f(x) = 1$, $y \in P_1$, $y \neq x \Rightarrow f(y) = 2$. Pak $f(A) = \{2\}$, $f(x) = 1$ a tedy $\varrho_2[f(x), f(A)] = 1$, což podle 1,1 (2) značí, že f není spojité.

Snadno se nahlédne, že podmínky (1) a (2) jsou ekvivalentní.

Věta 1,6. *Každé zobrazení f prostoru P_1 do libovolného metrického prostoru P_2 je cauchyovsky spojité, když a jen když ke každé cauchyovské posloupnosti $\{x_n\}$ v P_1 existuje index p takový, že $n \geqq p \Rightarrow x_n = x_p$.*

Důkaz: Nechť podmínka platí. Budiž f zobrazení P_1 do P_2. Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v P_1. Pak existuje p tak, že $n \geqq p \Rightarrow$ $\Rightarrow x_n = x_p$. Odtud pro $\{f(x_n)\}$ platí: $n > p = f(x_n) \Rightarrow f(x_p)$, tedy $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská. — Nechť obráceně v P_1 existuje cauchyovská posloup-

*) Definice: Nechť P je metrický prostor. Pravíme, že bod $x \in P$ je *isolovaný* v P, existuje-li $\delta > 0$ tak, že $y \in P$, $y \neq x \Rightarrow \varrho(x, y) > \delta$. Je-li každý bod prostoru P isolovaný, říkáme, že P je *isolovaný prostor.*

nost $\{x_n\}$, pro niž podmínka neplatí. Pak z ní lze vybrat prostou cauchyovskou posloupnost $\{x_{k_n}\}$. Nyní za P_2 vezměme množinu $\{1\} + \{2\}$, $\varrho_2(1, 2) = 1$, a definujme na P_1 f takto:

$$n \text{ liché} \Rightarrow f(x_{k_n}) = 1,$$
$$n \text{ sudé} \Rightarrow f(x_{k_n}) = 2.$$

Pak $\{f(x_n)\}$ zřejmě není cauchyovská a tudíž f není na P_1 cauchyovsky spojité.

Věta 1,7. *Každé zobrazení f prostoru P_1 do libovolného metrického prostoru P_2 je stejnoměrně spojité, když a jen když má P_1 jednu z těchto ekvivalentních vlastností:*

(1) $A \subset P_1$, $B \subset P_1$, $\varrho_1(A, B) = 0 \Rightarrow A \,.\, B \neq \emptyset$,
(2) *existuje* $\alpha > 0$ *tak, že* $x \in P_1$, $y \in P_1$, $x \neq y \Rightarrow \varrho_1(x, y) \geqq \alpha$.

Důkaz: Nechť platí (1). Budiž f zobrazení P_1 do P_2. Nechť $A \subset P_1$, $B \subset P_1$, $\varrho_1(A, B) = 0$. Pak existuje $x \in A.B$. Odtud $f(x) \in f(A) \,.\, f(B)$, tedy $\varrho_2[f(A), f(B)] = 0$ a f je podle věty 1,4; 2) stejnoměrně spojité. Nechť naopak existují $A \subset P_1$, $B \subset P_1$, $\varrho_1(A, B) = 0$, $A \,.\, B = \emptyset$. Položme $P_2 = \{1\} + \{2\}$, $\varrho_2(1, 2) = 1$ a definujme f takto:

$$x \in P_1,\ x \text{ non} \in A \Rightarrow f(x) = 1,$$
$$x \in P_1,\ x \in A \qquad \Rightarrow f(x) = 2.$$

Pak $f(A) = \{2\}$, $f(B) = \{1\}$, $\varrho_2[f(A), f(B)] = 1$, a proto podle 1,4; 2) není f stejnoměrně spojité. Tím je dokázáno, je podmínka (1) je pro platnost tvrzení nutná a postačující. Nyní dokážeme, že podmínky (1) a (2) jsou ekvivalentní.

Zřejmě (2) $\Rightarrow$ (1). Nechť neplatí (2). Pak ke každému n existují v P_1 body $x_n \neq y_n$ tak, že $\varrho_1(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$, $x_n \neq y_m$ pro $n \neq m$. Množinu těchto x_n (resp. y_n) označme A (resp. B). Jest $\varrho_1(A, B) = 0$, avšak $A \,.\, B = \emptyset$, což odporuje (1).

Tedy (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Příklady. 1. Nechť prostor P_1 je množina čísel $\dfrac{1}{n}$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$, vnořená do E_1 s obyčejnou metrikou. Pak každé zobrazení f prostoru P_1 do libovolného P_2 je na P_1 spojité, ale existuje na P_1 zobrazení, které není cauchyovsky spojité. To plyne z toho, že P_1 má vlastnost (2) z věty 1,5, nemá však vlastnost (1) z věty 1,6, neboť v něm existuje cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, která je prostá.

2. Nechť P_1 je množina bodů $(n; 0)$, $(n; \dfrac{1}{n})$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$, vnořená do E_2 s obvyklou metrikou. Pak každé zobrazení f na P_1 je cauchyovsky spojité, avšak na P_1 existuje zobrazení, jež není stejnoměrně spojité. To plyne z toho, že P_1 splňuje podmínku (1) věty 1,6 (neboť žádná prostá posloupnost v P_1 není cauchyovská).

nesplňuje však podmínku (1) věty 1,7, protože pro $A = \underset{x_1 \in P_1}{\mathrm{E}} [x = (n, 0)]$ a $B =$ $= \underset{x \in P_1}{\mathrm{E}} \left[x = \left(n, \frac{1}{n}\right)\right]$ jest $\varrho_1(A, B) = 0$, $A \,.\, B = \emptyset$.

Věta 1,8. *Mějme metrické prostory $P_1(\varrho_1)$, $P_2(\varrho_2)$, $P_3(\varrho_3)$. Nechť f je spojité (cauchyovsky spojité, stejnoměrně spojité) zobrazení P_1 na P_2 a g spojité (cauchyovsky spojité, stejnoměrně spojité) zobrazení P_2 na P_3. Pak zobrazení φ prostoru P_1 na P_3, kde $x \in P_1 \Rightarrow \varphi(x) = g[f(x)]$, je na P_1 spojité (cauchyovsky spojité, stejnoměrně spojité).*

Důkaz: Nechť f a g jsou spojitá. Zvolme $x \in P_1$, $\varepsilon > 0$. K ε existuje $\delta_1 > 0$ tak, že

$$y \in P_2,\ \varrho_2[y, f(x)] < \delta_1 \Rightarrow \varrho_3[g(y), g[f(x)]] < \varepsilon. \tag{1}$$

K $\delta_1 > 0$ existuje $\delta_2 > 0$ tak, že

$$z \in P_1,\ \varrho_1(x, z) < \delta_2 \Rightarrow \varrho_2[f(x), f(z)] < \delta_1.$$

Odtud z (1) plyne $z \in P_1$, $\varrho_1(x, z) < \delta_2 \Rightarrow \varrho_3[\varphi(x), \varphi(z)] < \varepsilon$. Tedy φ je spojité. Podobně pro cauchyovskou a stejnoměrnou spojitost.

Definice 1,2. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost zobrazení prostoru P_1 do prostoru P_2, f zobrazení P_1 do P_2. Pravíme, že *posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na P_1 stejnoměrně k f*, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že $n > n_0$, $x \in P_1 \Rightarrow \varrho_2[f_n(x), f(x)] < \varepsilon$. f je limita posloupnosti $\{f_n\}$.

Věta 1,9. *Nechť P_1, P_2 jsou metrické prostory. Limita na P_1 stejnoměrně konvergentní posloupnosti $\{f_n\}$ na P_1 spojitých (cauchyovsky spojitých, stejnoměrně spojitých) zobrazení f_n prostoru P_1 do P_2 je na P_1 spojité (cauchyovsky spojité, stejnoměrně spojité) zobrazení f prostoru P_1 do P_2.*

Důkaz: a) Nechť f_n jsou spojitá. Zvolme $y \in P_1$ a $\varepsilon > 0$. Platí

$$x \in P_1 \Rightarrow \varrho_2[f(x), f(y)] \leqq \varrho_2[f(x), f_n(x)] + \varrho_2[f_n(x), f_n(y)] + \\ + \varrho_2[f_n(y), f(y)]. \tag{1}$$

K $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ existuje index n_1 tak, že

$$x \in P_1,\ n > n_1 \Rightarrow \varrho_2[f_n(x), f(x)] < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{2}$$

Zvolme index $n_0 > n_1$. Protože f_{n_0} je na P_1 spojité, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$x \in P_1,\ \varrho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho_2[f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)] < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{3}$$

Nyní z (1), (2) a (3) plyne: k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $x \in P$, $\varrho_1(x, y) <$ $< \delta \Rightarrow \varrho_2[f(x), f(y)] < \varepsilon$. Tedy f je na P_1 spojité.

b) Nechť f_n jsou cauchyovsky spojitá. Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v P_1. Platí

$$\varrho_2[f(x_k), f(x_h)] \leqq \varrho_2[f(x_k), f_n(x_k)] + \varrho_2[f_n(x_k), f_n(x_h)] + \\ + \varrho_2[f_n(x_k), f(x_k)]. \tag{4}$$

Budiž $\varepsilon > 0$. Pak existuje index n_1 tak, že

$$x \in P_1,\ n > n_1 \Rightarrow \varrho_2[f_n(x), f(x)] < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{5}$$

Zvolme index $n_0 > n_1$. Protože f_{n_0} je na P_1 cauchyovsky spojité, $\{x_n\}$ v P_1 cauchyovská, je $\{f_{n_0}(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská v P_2, což značí, že k $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ existuje index k_0 tak, že

$$k > k_0,\ h > k_0 \Rightarrow \varrho_2[f_{n_0}(x_k), f_{n_0}(x_h)] < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{6}$$

Podle (4), (5), (6) existuje ke každému $\varepsilon > 0$ index p tak, že $k > p$, $h > p \Rightarrow \varrho_2[f(x_k), f(x_h)] < \varepsilon$. Tedy f je na P_1 cauchyovsky spojité.

c) Stejnoměrná spojitost se dokáže obdobně.

Definice 1,3. Metrický prostor P se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\}$ bodů z P lze vybrat posloupnost konvergentní.

Definice 1,4. Metrický prostor P se nazývá *omezený*, existuje-li bod $x \in P$ a číslo $K > 0$ tak, že $y \in P \Rightarrow \varrho(x, y) < K$.

Věta 1,10. *Kompaktní prostor je omezený.*

Důkaz: Viz Čech: BM, str. 103.

Věta 1,11. *Mějme euklidovský k-rozměrný prostor $\mathbf{E}_k$ s obvyklou metrikou (k přirozené číslo). Prostor $\emptyset \neq M \subset E_k$ vnořený do $\mathbf{E}_k$ je kompaktní, když a jen když je M omezená uzavřená množina v $\mathbf{E}_k$.*

Důkaz: Viz Čech: BM, str. 105.

Věta 1,12. *Nechť P_1, P_2 jsou metrické prostory, P_1 kompaktní. Nechť f je zobrazení P_1 do P_2, spojité na P_1. Pak f je na P_1 stejnoměrně spojité.*

Důkaz: Viz Čech: BM, str. 107.

Poznámka: Podmínka o kompaktnosti P_1 z věty 1,12 není nutná: budiž prostor P_1 množina čísel $n = 1, 2, 3, \ldots$, vnořená do $\mathbf{E}_1$ s obvyklou metrikou. P_1 není zřejmě kompaktní, ale každé spojité zobrazení je na P_1 stejnoměrně spojité (viz větu 1,7).

Věta 1,13. *Nechť P_1, P_2 jsou metrické prostory, P_1 kompaktní. Nechť f je zobrazení P_1 na P_2, spojité na P_1. Potom P_2 je kompaktní.*

Důkaz: Viz Čech: BM, str. 107.

Věta 1,14. *Nechť P_1, P_2 jsou metrické prostory, P_1 kompaktní. Nechť f je prosté zobrazení P_1 na P_2, spojité na P_1. Pak zobrazení f^{-1} prostoru P_2 na P_1 je na P_2 spojité, t. j. zobrazení f je homeomorfní.**)

Důkaz: Viz Čech: BM, str. 108.

---

*) Definice: Když f je prosté spojité zobrazení P na Q a když také inversní zobrazení f^{-1} je spojité, pak pravíme, že f je *homeomorfní* zobrazení prostoru P na prostor Q.

Věta 1,15. *Nechť P_1, P_2 jsou metrické prostory, P_1 úplný.**) *Nechť f je zobrazení P_1 do P_2, spojité na P_1. Pak f je na P_1 cauchyovsky spojité.*

Důkaz: Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v P_1. Pak $x_n \to x \in P_1 \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \in P_2 \Rightarrow \{f(x_n)\}$ je cauchyovská v P_2.

Věta 1,16. *Nechť P_1, P_2, jsou metrické prostory, P_2 úplný. Nechť zobrazení f množiny $Q \neq \emptyset$, $Q \subset P_1$ do P_2 je stejnoměrně spojité (resp. cauchyovsky spojité) na Q. Pak existuje právě jedno stejnoměrně (resp. cauchyovsky) spojité zobrazení F uzávěru $\overline{Q}$ do P_2 takové, že $x \in Q \Rightarrow f(x) = F(x)$.*

Důkaz: 1. Nechť f je na Q cauchyovsky spojité. Předně dokážeme, že zmíněné zobrazení F je nejvýš jedno.

Nechť $\bar{x} \in \overline{Q} - Q$. Pak existuje posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in Q$, $x_n \to \bar{x}$. $\{x_n\}$ je cauchyovská, tedy $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská, a protože P_2 je úplný, jest $f(x_n) \to a \in P_2$. Je-li $\{y_n\}$ jiná taková posloupnost, $y_n \in Q$, $y_n \to \bar{x}$ a $f(y_n) \to b \in P_2$, pak $a = b$, jak snadno dokážeme.

Utvořme totiž posloupnost $\{z_n\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots\}$, $z_{2k-1} = x_k$, $z_{2k} = y_k \dots$, $k = 1, 2, 3, \dots$ $\{z_n\}$ je zřejmě cauchyovská. Proto $\{f(z_n)\}$ je cauchyovská a proto

$$\varrho_2[f(x_n), f(y_n)] \to 0.$$

Protože $f(y_n) \to b$, jest

$$\varrho_2[f(x_n), b] \leqq \varrho_2[f(x_n), f(y_n)] + \varrho_2[f(y_n), b] \to 0$$

a tudíž $f(x_n) \to b$. Protože však $f(x_n) \to a$, je $a = b$.

Má-li F být na $\overline{Q}$ cauchyovsky spojité, pak musí být $x_n \to \bar{x} \in \overline{Q} - Q$, $x_n \in Q \Rightarrow F(x_n) = f(x_n) \to F(\bar{x}) = a$.

Protože $a \in P_2$ nezávisí na volbě konvergentní posloupnosti $\{x_n\}$, $x_n \to \bar{x}$, jest F nejvýše jedno a musíme je tedy definovat takto:

$$x \in \overline{Q},\ x_n \to x,\ x_n \in Q \Rightarrow F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Potom zřejmě $x \in Q \Rightarrow F(x) = f(x)$.

Zbývá dokázat, že F je na $\overline{Q}$ cauchyovsky spojité.

Mějme cauchyovskou posloupnost $\{{}^k x\}_{k=1}^{\infty}$, ${}^k x \in \overline{Q}$. Máme dokázat, že $\{F({}^k x)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Ke každému ${}^k x$ existuje posloupnost

$$\{{}^k x_n\}_{n=1}^{\infty},\ {}^k x_n \in Q,\ \lim_{n\to\infty} {}^k x_n = {}^k x \text{ a jest } \lim_{n\to\infty} f({}^k x_n) = F({}^k x).$$

Budiž $k = 1, 2, 3, \dots$ K číslu $\dfrac{1}{k} > 0$ existuje index i_k tak, že současně

*) Definice: Pravíme, že P je *úplný* prostor, když každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní v P.

$$\varrho_1({}^kx_{i_k}, {}^kx) < \frac{1}{k}, \quad \varrho_2[f({}^kx_{i_k}), F({}^kx)] < \frac{1}{k}. \tag{1}$$

Nechť i_k značí první z indexů této vlastnosti. Dostáváme tak posloupnost $\{{}^kx_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z Q. Dokážeme nyní, že tato posloupnost jest cauchyovská.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ existuje index H tak, že $k > H$, $l > H \Rightarrow$ $\Rightarrow \varrho_1({}^kx, {}^lx) < \frac{1}{3}\varepsilon$, k $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo K tak, že $\frac{1}{K} < \frac{1}{3}\varepsilon$. Označme $N = \max(H, K)$.

Potom pro všechna $k > N$, $l > N$ jest

$$\varrho_1({}^kx_{i_k}, {}^lx_{i_l}) \leqq \varrho_1({}^kx_{i_k}, {}^kx) + \varrho_1({}^kx, {}^lx) + \varrho_1({}^lx, {}^lx_{i_l}) < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Nyní ukážeme, že $\{F({}^kx)\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\{{}^kx_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská, je i $\{f({}^kx_{i_k})\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská a tudíž k $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že $k > n_0$, $l > n_0 \Rightarrow \varrho_2[f({}^kx_{i_k}), f({}^lx_{i_l})] < \frac{1}{3}\varepsilon$.

Dále k $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo $\overline{K}$ tak, že $\frac{1}{\overline{K}} < \frac{1}{3}\varepsilon$.

Položme $N_0 = \max(n_0, \overline{K})$.

Pak pro všechna $k > N_0$, $l > N_0$ jest (viz (1))

$$\varrho_2[F({}^kx), F({}^lx)] \leqq \varrho_2[F({}^kx), f({}^kx_{i_k})] + \varrho_2[f({}^kx_{i_k}), f({}^lx_{i_l})] + \\ + \varrho_2[f({}^lx_{i_l}), F({}^lx)] < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Tedy F je na $\overline{Q}$ cauchyovsky spojité.

2. Nechť f je na Q stejnoměrně spojité. Pak je na Q také cauchyovsky spojité a lze tedy podle 1 určit zobrazení F cauchyovsky spojité na $\overline{Q}$, pro něž platí $x \in Q \Rightarrow F(x) = f(x)$.

Máme nyní ukázat, že toto F je na $\overline{Q}$ stejnoměrně spojité.

Budiž $\varepsilon > 0$. K $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ určíme $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že

$$x \in Q, \ y \in Q, \ \varrho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho_2[f(x), f(y)] < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Nechť $x \in \overline{Q}$, $y \in \overline{Q}$, $\varrho(x, y) < \delta$.

Nechť $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \in Q$, $y_n \in Q$. Pak $\varrho_1(x_n, y_n) \to \varrho_1(x, y)$, neboť z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\varrho_1(x, y) - \varrho_1(x, x_n) - \varrho_1(y, y_n) \leqq \varrho_1(x_n, y_n) \leqq \varrho_1(x, x_n) + \\ + \varrho_1(x, y) + \varrho_1(y, y_n)$$

a přechodem k limitě dostaneme

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_1(x_n, y_n) = \varrho_1(x, y) < \delta.$$

Tedy existuje index n_0 tak, že

$$n > n_0 \Rightarrow \varrho_1(x_n, y_n) < \delta \Rightarrow \varrho_2[f(x_n), f(y_n)] < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Protože $f(x_n) \to F(x)$, existuje n_1 tak, že

$$n > n_1 \Rightarrow \varrho_2[f(x_n), F(x)] < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Protože $f(y_n) \to F(y)$, existuje n_2 tak, že

$$n > n_2 \Rightarrow \varrho_2[f(y_n), F(y)] < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Položme $N = \max(n_0, n_1, n_2)$. Potom

$$n > N \Rightarrow \varrho_2[F(x), F(y)] \leqq \varrho_2[F(x), f(x_n)] + \varrho_2[f(x_n), f(y_n)] + \\ + \varrho_2[f(y_n), F(y)] < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Poznámka: Předpoklad, že f je aspoň cauchyovsky spojité na Q, je nutný. Nechť $P_1 = P_2 = \mathbf{E}_1$ s obvyklou metrikou. Nechť $Q = \underset{x \in P_1}{\mathrm{E}}[1 \leqq x \leqq 2, x \text{ racionální}]$. f definujme takto: $x \in Q$, $x < \sqrt{2} \Rightarrow f(x) = 1$, $x \in Q$, $x > \sqrt{2} \Rightarrow f(x) = 2$. Funkce f je na Q spojitá, zřejmě však neexistuje funkce F spojitá na $\overline{Q} = \langle 1, 2 \rangle$ taková, že $x \in Q \Rightarrow f(x) = F(x)$.

Je-li zobrazení f z věty 1,16 pouze spojité na Q, lze — jak se snadno nahlédne — tvrdit jen toto: existuje nejvýš jedno spojité zobrazení F uzávěru $\overline{Q}$ do P_2 takové, že $x \in Q \Rightarrow f(x) = F(x)$.

Věta 1,17. *Zobrazení f prostoru P_1 do P_2 je na P_1 cauchyovsky spojité, když a jen když existuje spojité zobrazení F prostoru $\tilde{P}_1$ do $\tilde{P}_2$*) takové, že $x \in P_1 \Rightarrow f(x) = F(x)$.*

Důkaz: Nechť f je na P_1 cauchyovsky spojité. Protože $\tilde{P}_1$ je uzávěrem P_1 (v prostoru $\tilde{P}_1$), existuje podle 1,16 (právě jedno cauchyovsky) spojité zobrazení F $\tilde{P}_1$ do $\tilde{P}_2$ takové, že pro $x \in P_1$ platí $F(x) = f(x)$.

Nechť naopak f lze rozšířit na spojité zobrazení F $\tilde{P}_1$ do $\tilde{P}_2$. Pak F je podle 1,13 cauchyovsky spojité a tudíž f je rovněž cauchyovsky spojité zobrazení P_1 do P_2.

Definice 1,5. Metrický prostor P se nazývá *souvislý*, má-li tuto vlastnost: $\emptyset \neq A \subset P$, $\emptyset \neq B \subset P$, $A + B = P \Rightarrow \overline{A} . \overline{B} \neq \emptyset$.

Věta 1,18. *Prostor P vnořený do $\mathbf{E}_1$ s obvyklou metrikou je souvislý, když a jen když P je interval nebo jednobodová množina nebo prázdná množina.*

---

*) Prostor $\tilde{P}_1$ se nazývá *úplný obal* prostoru P_1. Platí pro něj 1. $P \subset \tilde{P}$, 2. $\tilde{P}$ je úplný, 3. $\tilde{P} = \overline{P}$. Viz Čech: BM, str. 83. Platí věta, že každý prostor má úplný obal. Viz Čech: BM, str. 84.

Důkaz: Prázdná a jednobodová množina jsou souvislé. Souvislost intervalu J dokážeme sporem. Nechť tedy J není souvislý. Pak existují v J množiny $\emptyset \neq A$, $\emptyset \neq B$, $A + B = J$, $\bar{A} . \bar{B} = \emptyset$ (kde pruhem je označen uzávěr v J). Tedy $\bar{A} = A$, $B = \bar{B}$, $B = J - A$. Nechť $a \in J$. Ze symetrie lze předpokládat, že $a \in A$. Pak platí, že množiny $B . \mathrm{E}\,[x \leqq a]$, $B . \mathrm{E}\,[x \geqq a]$ nejsou současně obě prázdné. Nechť třeba $B . \mathrm{E}\,[x \leqq a] \neq \emptyset$. Označme

$$b = \sup(B . \mathrm{E}\,[x \leqq a]). \tag{1}$$

Takové $b \in \mathrm{E}_1$ existuje a $b < a$. Protože $B . \mathrm{E}\,[x \leqq a]$ je uzavřená v J a zřejmě $b \in J$, jest $b \in B$. B je však v J otevřená. Existuje tudíž $0 < \varepsilon < a - b$ tak, že $b < x < b + \varepsilon < a \Rightarrow x \in B$. Pro tyto body x je pak $x \in B . \mathop{\mathrm{E}}\limits_{x \in J}[x \leqq a]$ a současně $b < x$, což je spor s (1). Obdobně se přivede ke sporu předpoklad, že $B . \mathrm{E}\,[x \geqq a] \neq \emptyset$.

Nechť $P \neq \emptyset$ je souvislý a P není jednobodová množina ani interval. Pak existují $a \in P$, $b \in P$, $a < b$, $a < c < b$, c non $\in P$. Označme $A = \mathop{\mathrm{E}}\limits_{x \in P}[x < c]$, $b = \mathop{\mathrm{E}}\limits_{x \in P}[x < c]$. Potom $\emptyset \neq A \subset P$, $\emptyset \neq B \subset P$, $A + B = P$, avšak $\bar{A} . \bar{B} = \emptyset$. Tedy P není souvislý.

Věta 1,19. *Metrický prostor P_1 je souvislý, když a jen když je při každém spojitém zobrazení f prostoru P_1 do libovolného metrického prostoru P_2 množina $f(P_1)$ souvislá.*

Důkaz: 1. Nechť P_1 je souvislý. Buď f spojité zobrazení P_1 do P_2. Nechť $\emptyset \neq C \subset f(P_1)$, $\emptyset \neq D \subset f(P_1)$, $C + D = f(P_1)$. Položme $f^{-1}(\bar{C}) = A$, $f^{-1}(\bar{D}) = B$, kde $\bar{C}$ a $\bar{D}$ jsou uzávěry množin C, D v prostoru $f(P_1)$. Podle věty 1,1 (4) jsou A, B uzavřené, tedy, protože P_1 je souvislý, platí $AB \neq \emptyset$, tedy též $\bar{C}\bar{D} \neq \emptyset$. Tím je dokázáno, že prostor $f(P_1)$ je souvislý.

2. Nechť P_1 není souvislý. Pak existují $\emptyset \neq A \subset P_1$, $\emptyset \neq B \subset P_1$, $A + B = P_1$, $\bar{A} . \bar{B} = \emptyset$. Protože $A \subset \bar{A}$, $B \subset \bar{B}$, $A . B = \emptyset$, plyne odtud $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$. Zvolme nyní $P_2 = \mathbf{E}_1$ s obvyklou metrikou a definujme zobrazení f prostoru P_1 do P_2 takto: $x \in A \Rightarrow f(x) = 1$, $x \in B \Rightarrow f(x) = 2$. f je zřejmě na P_1 spojité, ale $f(P_1) = \{1\} + \{2\}$ není souvislý prostor.

Věta 1,20. *Nechť f je prosté zobrazení prostoru P_1 na prostor P_2. f je homeomorfní, když a jen když platí jedna z ekvivalentních podmínek:*

(1) *$A \subset P_1$ uzavřená v $P_1 \Leftrightarrow f(A)$ uzavřená v P_2.*

(2) *$A \subset P_1 \Rightarrow f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.*

Důkaz plyne z věty 1,1 (5) a (3).

2. Spojité, cauchyovsky spojité, stejnoměrně spojité funkce v metrických prostorech.

Definice 2,1. Nechť P je metrický prostor. Zobrazení f prostoru P do prostoru $\mathbf{E}_1$ (s obvyklou metrikou) nazveme *funkcí* na prostoru P.

Definice 2,2. Nechť P je metrický prostor, f, g dvě funkce na P. Potom $h = f + g$ (resp. $k = f \cdot g$) značí funkci na P takto definovanou: $x \in P \Rightarrow h(x) = f(x) + g(x)$ (resp. $x \in P \Rightarrow k(x) = f(x) \cdot g(x)$). h (resp. k) nazýváme *součet* (resp. *součin*) funkcí f a g.

Definice 2,3. Nechť f je funkce na metrickém prostoru P. Pravíme, že f je *omezená*, existuje-li číslo K takové, že $x \in P \Rightarrow |f(x)| < K$. f je *spojitá funkce* (*cauchyovsky spojitá, stejnoměrně spojitá*), je-li zobrazení f spojité (cauchyovsky spojité, stejnoměrně spojité).

Věta 2,1. *Nechť funkce f, g jsou na metrickém prostoru P spojité (cauchyovsky, stejnoměrně spojité). Pak funkce $f + g$ je na P rovněž spojitá (cauchyovsky, stejnoměrně spojitá).*

Důkaz: Budiž $\varepsilon > 0$, $x \in P$. K $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ existují $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že pro libovolné $y \in P$ platí $\varrho(x, y) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ a pro libovolné $y \in P$ platí $\varrho(x, y) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Položme

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0.$$

Pak pro libovolné

$$y \in P, \ \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow |[f(x) + g(x)] - [f(y) + g(y)]| < \varepsilon.$$

Podobně pro cauchyovskou a stejnoměrnou spojitost.

Věta 2,2. *Nechť funkce f, g jsou na metrickém prostoru P spojité (cauchyovsky spojité). Pak funkce $f \cdot g$ je na P rovněž spojitá (cauchyovsky spojitá).*

Důkaz: 1. Zvolme $\varepsilon > 0$ a bod $x \in P$; dále zvolme $K > \max(|f(x)|, |g(x)|)$. Ze spojitosti funkcí f, g v bodě x plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $y \in P$, pro něž je $\varrho(x, y) < \delta$, platí zároveň

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad |g(y)| < K.$$

Platí tedy implikace

$$y \in P, \ \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \leqq$$
$$\leqq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Tedy $f \cdot g$ je na P spojitá.

2. Důkaz pro cauchyovskou spojitost je obdobný (užije se tu toho, že cauchyovská posloupnost je ohraničená).

Věta 2,3. *Nechť funkce f, g jsou na metrickém prostoru P stejnoměrně spojité a omezené. Pak funkce $f \,.\, g$ je na P rovněž stejnoměrně spojitá a omezená.*

Důkaz: Zvolme K tak, aby pro každé $x \in P$ platilo $|f(x)| < K$, $|g(x)| < K$. Další postup je stejný jako při důkazu věty 2,2.

Poznámka 1. Je-li některá z funkcí f, g z věty 2,3 neomezená, pak $f \,.\, g$ nemusí již být na P stejnoměrně spojitá: Nechť prostor P je množina bodů $(n, 0)$, $\left(n, \frac{1}{n}\right)$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$, vnořená do $\mathbf{E}_2$ s obvyklou metrikou. Na P definujme funkci f a g předpisy

$$f(n, 0) = n, \quad f\left(n, \frac{1}{n}\right) = n + \frac{1}{n},$$

$$g(n, 0) = 0, \quad g\left(n, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Snadno se přesvědčíme, že f je stejnosměrně spojitá, g omezená a stejnosměrně spojitá. Položme $h = f \,.\, g$.

Vidíme, že

$$h(n, 0) = 0, \quad h\left(n, \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n^2}.$$

Tedy h není na P stejnoměrně spojitá.

Věta 2,4. *Nechť f je spojitá funkce na metrickém prostoru P. Nechť $x \in P \Rightarrow f(x) \neq 0$. Pak funkce $\frac{1}{f}$. (definovaná vztahem $x \in P \Rightarrow \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$) je na P spojitá.*

Důkaz: Zvolme $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Nechť $|f(x)| > \alpha > 0$. Pak existuje $\delta_1 > 0$ takové, že $y \in P$, $\varrho(x, y) < \delta_1 \Rightarrow |f(y)| > \alpha$.

K $\varepsilon \,.\, \alpha^2 > 0$ existuje $\delta_2 > 0$ tak, že $y \in P$, $\varrho(x, y) < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \,.\, \alpha^2$. Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Potom

$$y \in P, \ \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x) \,.\, f(y)|} < \frac{\varepsilon \,.\, \alpha^2}{\alpha^2} = \varepsilon.$$

Věta 2,5. *Nechť f je cauchyovsky (stejnoměrně) spojitá funkce na P. Nechť $x \in P \Rightarrow |f(x)| > \alpha > 0$. Pak funkce $\frac{1}{f}$ je na P cauchyovsky (stejnoměrně) spojitá.*

Důkaz: je obdobný důkazu věty 2,4.

Věta 2,6. *Funkce f na metrickém prostoru P je spojitá, když a jen když splňuje jednu z následujících ekvivalentních podmínek:*

1) $c \in \mathbf{E}_1 \Rightarrow$ *množiny* $\underset{x \in P}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$, $\underset{x \in P}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ *jsou otevřené v P.*

2) $c \in \mathbf{E}_1 \Rightarrow$ *množiny* $\underset{x \in P}{\mathrm{E}}[f(x) \geqq c]$, $\underset{x \in P}{\mathrm{E}}[f(x) \leqq c]$ *jsou uzavřené v P.*

Důkaz: 1) viz Čech: BM, str. 47.

2) plyne snadno z 1).

V dalším užijeme s výhodou funkce $\varphi_{A,B}$ takto definované: Nechť P je metrický prostor, A, B dvě neprázdné množiny uzavřené v P, $A \,.\, B = \emptyset$. Pak

$$x \in P \Rightarrow \varphi_{A,B}(x) = \frac{\varrho(x, A)}{\varrho(x, A) + \varrho(x, B)} \,. \tag{1}$$

Snadno se nahlédne, že pro $\varphi_{A,\,B}$ platí tyto vztahy:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a)}\ \ 0 \leqq \varphi_{A,B}(x) \leqq 1 \text{ pro každé } x \in P, \\ \text{(b)}\ \ \varphi_{A,B}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A, \\ \text{(c)}\ \ \varphi_{A,B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Věta 2,7. 1) *Zmíněná funkce $\varphi_{A,B}$ je na oboru P spojitá.*

2) *$\varphi_{A,B}$ je na P cauchyovsky spojitá, když a jen když každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ bodů z P obsahuje buď pouze konečný počet členů $x_n \in A$ anebo pouze konečný počet členů $x_n \in B$.*

3) *$\varphi_{A,B}$ je na P stejnoměrně spojitá, když a jen když $\varrho(A, B) > 0$.*

Důkaz: 1) Dokážeme nejprve pro libovolné $u \in P$, $v \in P$ a $M \subset \subset P$ tento vztah: $|\varrho(u, M) - \varrho(v, M)| \leqq \varrho(u, v)$.

Pro libovolné $x \in M$ platí totiž

$$\varrho(u, M) \leqq \varrho(u, x) \leqq \varrho(u, v) + \varrho(v, x),$$

tedy též

$$\varrho(u, M) \leqq \varrho(u, v) + \inf \varrho(v, x) = \varrho(u, v) + \varrho(v, M). \tag{3}$$

Z důvodu symetrie platí také vztah

$$\varrho(v, M) \leqq \varrho(u, v) + \varrho(u, M). \tag{4}$$

Z (3) a (4) plyne snadno

$$|\varrho(u, M) - \varrho(v, M)| \leqq \varrho(u, v). \tag{5}$$

Odtud plyne dále

$$\varphi_{A,B}(u) - \varphi_{A,B}(v) = \frac{\varrho(u, A)}{\varrho(u, A) + \varrho(u, B)} - \frac{\varrho(v, A)}{\varrho(v, A) + \varrho(v, B)} =$$

$$= \frac{\varrho(u, A)\,\varrho(v, B) - \varrho(v, A)\,\varrho(u, B)}{[\varrho(u, A) + \varrho(u, B)] \,.\, [\varrho(v, A) + \varrho(v, B)]} =$$

$$= \frac{\varrho(u, A)[\varrho(v, B) - \varrho(u, B)] + \varrho(u, B)[\varrho(u, A) - \varrho(v, A)]}{[\varrho(u, A) + \varrho(u, B)] \,.\, [\varrho(v, A) + \varrho(v, B)]} \,.$$

Dosadíme-li sem podle (5), dostaneme

$$|\varphi_{A,B}(u) - \varphi_{A,B}(v)| \leqq \frac{[\varrho(u, A) + \varrho(u, B)] \,.\, \varrho(u, v)}{[\varrho(u, A) + \varrho(u, B)] \,.\, [\varrho(v, A) + \varrho(v, B)]} =$$

$$= \frac{\varrho(u, v)}{\varrho(v, A) + \varrho(v, B)} \,. \tag{6}$$

Z (6) plyne ihned, že $\varphi_{A,B}$ je spojitá v každém bodě $v \in P$.

2α) Předpokládejme, že $\varphi_{A,B}$ je cauchyovsky spojitá a neplatí 2). Tedy existuje cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ taková, že nekonečně mnoho x_n leží v A a současně nekonečně mnoho x_n leží v B. To však není možné vzhledem k (2) a k tomu, že $\{\varphi_{A,\,B}(x_n)\}$ je cauchyovská.

β) Nechť každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ v P má vlastnost z podmínky 2).

Dokážeme nejdříve vztah

$$\lim_{n \to \infty} [\varrho(x_n, A) + \varrho(x_n, B)] > 0. \tag{I}$$

Všimněme si, že pro každou cauchyovskou posloupnost $\{x_n\}$ plyne z (5), že též posloupnost $\{\varrho(x_n, M)\}$ je cauchyovská, tedy konvergentní, a že limita v (I) vždy existuje.

Nechť tedy (I) neplatí; pak je $\lim_{n \to \infty} [\varrho(x_n, A) + \varrho(x_n, B)] = 0$, tedy

$$\varrho(x_n, A) \to 0, \; \varrho(x_n, B) \to 0.$$

Zřejmě existují $z_n \in A$, $t_n \in B$ pro $n = 1, 2, \dots$ tak, že

$$\varrho(x_n, z_n) \to 0, \; \varrho(x_n, t_n) \to 0. \tag{II}$$

Utvořme posloupnost $z_1, t_1, z_2, t_2, \dots$ Ta je podle (II) cauchyovská a obsahuje nekonečně mnoho bodů jak z A, tak z B, což je spor.

Z (6) plyne

$$|\varphi_{A,B}(x_n) - \varphi_{A,B}(x_m)| \leqq \frac{\varrho(x_n, x_m)}{\varrho(x_m, A) + \varrho(x_m, B)};$$

odtud vyplývá podle (I), že $\{\varphi_{A,\,B}(x_n)\}$ je cauchyovská.

3α) Předpokládejme, že

$$\varrho(A, B) > 0.$$

Dokážeme předně vztah

$$y \in P \Rightarrow \varrho(y, A) + \varrho(y, B) \geqq \varrho(A, B) > 0. \tag{III}$$

Nechť (III) neplatí; pak existuje $y \in P$ tak, že $\varrho(y, A) + \varrho(y, B) <$ $< \varrho(A, B)$. Zvolme body $u \in A$, $v \in B$. Pak odtud dostaneme

$$\varrho(u, v) \leqq \varrho(y, u) + \varrho(y, v) \leqq \varrho(y, A) + \varrho(y, B) < \varrho(A, B),$$

což je spor.

Z (6) plyne nyní podle (III)

$$|\varphi_{A,B}(x) - \varphi_{A,B}(y)| \leqq \frac{\varrho(x, y)}{\varrho(A, B)}.$$

Odtud snadno zjistíme, že $\varphi_{A,B}$ je stejnoměrně spojitá.

β) Nechť $\varphi_{A,B}$ je stejnoměrně spojitá v P. Nechť $\varrho(A, B) = 0$. Potom podle věty 1,4; 2) platí

$$\varrho[\varphi_{A,B}(A), \varphi_{A,B}(B)] = 0,$$

což je spor s (2).

Pomocná věta 2,8. *Nechť P je metrický prostor, $\emptyset \neq Q \subset P$, $Q = \overline{Q}$. Nechť g je funkce spojitá (cauchyovsky spojitá, stejnoměrně spojitá) v oboru Q, $x \in Q \Rightarrow 0 \leqq g(x) \leqq 1$. Potom existuje spojitá (cauchyovsky spojitá, stejnoměrně spojitá) funkce G v oboru P tak, že $x \in P \Rightarrow \frac{1}{3} \leqq G(x) \leqq \frac{2}{3}$ a pro $x \in Q$ platí $|G(x) - g(x)| \leqq \frac{1}{3}$.*

Důkaz: Položme $A = \underset{x \in P}{\mathrm{E}}\,[0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{3}]$, $B = \underset{x \in P}{\mathrm{E}}\,[\frac{2}{3} \leqq g(x) \leqq 1]$. Podle věty 2,6; 2) jsou množiny A, B uzavřené v Q a protože Q je uzavřená v P, jsou A, B uzavřené v P.

Nyní mohou nastat tyto případy:

a) $B = \emptyset$ a tedy $0 \leqq g(x) < \frac{2}{3}$. Pak za $G(x)$ stačí vzít zřejmě $\frac{1}{3}$.
b) $A = \emptyset$ a tedy $\frac{1}{3} < g(x) \leqq 1$. Pak za $G(x)$ stačí vzít $\frac{2}{3}$.
c) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

Protože A, B jsou v P uzavřené a zřejmě platí $A \,.\, B = \emptyset$, lze sestrojit funkci $\varphi_{A,B}$.

Definujme nyní

$$G(x) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\,\varphi_{A,B}(x).$$

Zřejmě platí

$$x \in A \Leftrightarrow G(x) = \tfrac{1}{3},$$

$$x \in B \Leftrightarrow G(x) = \tfrac{2}{3}.$$

Snadno se nahlédne, že G je ona hledaná funkce.

Tato pomocná věta nám poslouží k důkazu následující důležité věty.

Věta 2,9. *Nechť P je metrický prostor, $\emptyset \neq Q \subset P$, $Q = \overline{Q}$. Nechť f je omezená spojitá (cauchyovsky spojitá, stejnoměrně spojitá) funkce na Q. Nechť $x \in Q \Rightarrow a \leqq f(x) \leqq b$. Potom existuje spojitá (cauchyovsky spojitá, stejnoměrně spojitá) funkce F na oboru P taková, že platí*

1) $x \in Q \Rightarrow F(x) = f(x)$,
2) $x \in P \Rightarrow a \leqq F(x) \leqq b$.

Důkaz: A) Nejprve pro spojitou funkci:

α) Pro $a = b$ jest $f(x) = a$ pro každé $x \in Q$. Pak zvolíme $F(x) = a$ pro každé $x \in P$.

β) $b - a > 0$.

Zkoumejme nejdříve funkci

$$g(x) = \frac{f(x) - a}{b - a}.$$

Platí $x \in Q \Rightarrow 0 \leqq g(x) \leqq 1$, g spojitá na Q. Protože jsou splněny předpoklady věty 2,8, lze konstruovat spojitou funkci G_1 na P takovou, že

$$\left.\begin{array}{c} x \in Q \Rightarrow 0 \leqq g(x) \leqq 1,\ x \in P \Rightarrow \frac{1}{3} \leqq G_1(x) \leqq \frac{2}{3}, \\ x \in Q \Rightarrow |G_1(x) - g(x)| \leqq \frac{1}{3}. \end{array}\right\} \tag{1}$$

V Q můžeme definovat novou funkci g_1:

$$x \in Q \Rightarrow g_1(x) = \tfrac{3}{2}\,[- G_1(x) + g(x)] + \tfrac{1}{2}. \tag{1'}$$

g_1 je spojitá a platí zřejmě

$$x \in Q \Rightarrow 0 \leqq g_1(x) \leqq 1.$$

Dále postupujeme úplnou indukcí. Předpokládejme, že máme již definovánu funkci G_n spojitou na P a g_n spojitou na Q, kde

$$x \in Q \Rightarrow 0 \leqq g_n(x) \leqq 1.$$

Podle věty 2,8 lze konstruovat spojitou funkci G_{n+1} na P tak, že platí

$$\begin{array}{c} x \in Q \Rightarrow 0 \leqq g_n(x) \leqq 1,\ x \in P \Rightarrow \frac{1}{3} \leqq G_{n+1}(x) \leqq \frac{2}{3}, \\ x \in Q \Rightarrow |G_{n+1}(x) - g_n(x)| \leqq \frac{1}{3}. \end{array}$$

V Q lze definovat novou funkci g_{n+1}:

$$g_{n+1}(x) = \tfrac{3}{2}[- G_{n+1}(x) + g_n(x)] + \tfrac{1}{2}. \tag{2}$$

Ta je spojitá a platí zřejmě $x \in Q \Rightarrow 0 \leqq g_{n+1}(x) \leqq 1$.

Z rovnice (2) plyne vztah

$$(\tfrac{2}{3})^n g_n(x) = (\tfrac{2}{3})^{n+1} g_{n+1}(x) + (\tfrac{2}{3})^n G_{n+1}(x) - \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n \text{ pro } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tento vztah však platí také pro $n = 0$, položíme-li $g_0(x) = g(x)$, jak plyne z rovnice (1').

Postupným dosazením získáme pro $x \in Q$ vztah

$$g(x) = G_1(x) + \tfrac{2}{3}G_2(x) + (\tfrac{2}{3})^2 G_3(x) + \ldots + (\tfrac{2}{3})^n G_{n+1}(x) - \\ - \tfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} (\tfrac{2}{3})^k + (\tfrac{2}{3})^{n+1} \cdot g_{n+1}(x),$$

t. j.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (\tfrac{2}{3})^{k-1} G_k(x) - \tfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} (\tfrac{2}{3})^k + (\tfrac{2}{3})^{n+1} g_{n+1}. \tag{3}$$

Zřejmě pro $n \to \infty$ a pro každé $x \in Q$ platí

$$(\tfrac{2}{3})^{n+1}\, g_{n+1}(x) \to 0, \quad \tfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} (\tfrac{2}{3})^k \to 1.$$

Také zřejmě existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} (\tfrac{2}{3})^{k-1}\, G_k(x) = H(x),$$

kde $x \in P$ a platí $x \in P \Rightarrow 1 \leqq H(x) \leqq 2$.

Protože řada, definující H, je na P stejnoměrně konvergentní a protože částečné součty zmíněné řady jsou spojité funkce, je také funkce H spojitá na P. Definujeme funkci G takto:

$$x \in P \Rightarrow G(x) = H(x) - 1.$$

Ze vztahu (3) plyne

$$x \in Q \Rightarrow g(x) = H(x) - 1 = G(x),$$
$$x \in P \Rightarrow 0 \leqq G(x) \leqq 1.$$

Hledanou funkci F dostaneme zřejmě takto:

$$x \in P \Rightarrow F(x) = G(x)(b - a) + a.$$

B) Stejným postupem dostaneme zbývající tvrzení dokazované věty pro cauchyovskou a stejnoměrnou spojitost.

Pro spojitou funkci lze větu 2,9 zostřit:

Věta 2,10. *Nechť P je metrický prostor, $\emptyset \neq Q \subset P$, $Q = \overline{Q}$. Nechť f je spojitá funkce na oboru Q, zobrazující Q do intervalu J. Potom existuje spojitá funkce F na P, zobrazující P do J, taková, že*

$$x \in Q \Rightarrow F(x) = f(x).$$

Důkaz: A) J je interval omezený.

A) 1. Nechť předně $J = [0, 1]$.*)

A) 1, a. $J = \langle 0, 1)$.

Platí $f(Q) \subset J$. Podle věty 2,9 existuje spojitá funkce G na P taková, že $x \in P \Rightarrow G(P) \subset \langle 0, 1\rangle$, $x \in Q \Rightarrow G(x) = f(x)$.

Množina $B = G^{-1}(1)$ je uzavřená a platí $B \,.\, Q = \emptyset$.

α) $B = \emptyset$. Pak hledaná F jest přímo G.

β) $B \neq \emptyset$. Utvořme funkci $\varphi_{B,Q}$ na P.

Položme $F(x) = G(x) \,.\, \varphi_{B,Q}(x)$ pro $x \in P$. Potom $F(x)$ je spojitá v P a platí

$$x \in Q \Rightarrow F(x) = g(x) = f(x),$$
$$x \in P \Rightarrow 0 \leqq F(x) < 1.$$

*) Znak $[a, b]$ je společný symbol pro intervaly $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$, (a, b). Podobně pro $\langle a, b]$ atd.

A) 1, b. $J = (0, 1\rangle$.

Utvořme funkci f_1:

$$x \in Q \Rightarrow f_1(x) = 1 - f(x).$$

Platí $f_1(Q) \subset \langle 0, 1)$. Podle A) 1 a existuje spojitá funkce F_1 v P tak, že

$$x \in Q \Rightarrow f_1(x) = F_1(x), \; F_1(P) \subset \langle 0, 1).$$

Utvořme $F(x) = 1 - F_1(x)$ pro $x \in P$. F je spojitá funkce na P a platí

$$x \in Q \Rightarrow F(x) = 1 - F_1(x) = 1 - f_1(x) = f(x), \; F(P) \subset (0, 1\rangle.$$

A) 1, c. $J = (0, 1)$.

Podle věty 2,9 existuje spojitá funkce G v P taková, že $x \in Q \Rightarrow$ $\Rightarrow G(x) = f(x)$, $G(P) \subset \langle 0, 1\rangle$.

Množiny $A = G^{-1}(0)$, $B = G^{-1}(1)$ jsou uzavřené v P a platí $A \,.\, G = B \,.\, Q = \emptyset$. Potom také $A + B$ je uzavřená v P a $(A + B) \,.\, Q = \emptyset$. Nechť

α) $A + B = \emptyset$. Pak $G(P) \subset (0, 1)$ a můžeme položit $F = G$.

β) $A + B \neq \emptyset$.

Lze utvořit funkci φ_{A+B} na P.

Položme $F_1(x) = G(x) \,.\, \varphi_{A+B,Q}(x)$ pro $x \in P$.

F_1 je spojitá v P a platí

$$x \in Q \Rightarrow F_1(x) = f(x), \; F_1(P) \subset \langle 0, 1). \tag{1}$$

Utvořme dále spojitou funkci f_2 v Q, $f_2(Q) \subset (0, 1)$, předpisem $f_2(x) = 1 - f(x)$.

Jako v předchozím jsme sestrojili F_1, sestrojíme nyní spojitou funkci F_2, pro niž platí

$$x \in Q \Rightarrow F_2(x) = f_2(x), \; F_2(P) \subset \langle 0, 1).$$

Utvořme $F_3(x) = 1 - F_2(x)$ pro $x \in P$. F_3 je spojitá v P a platí

$$x \in Q \Rightarrow F_3(x) = f(x), \; F_3(P) \subset (0, 1\rangle. \tag{2}$$

Sestrojme konečně $F(x) = \frac{1}{2}[F_1(x) + F_3(x)]$ pro $x \in P$.

F je spojitá funkce v P a podle (1) a (2) platí

$$x \in Q \Rightarrow F(x) = f(x), \; F(P) \subset (0, 1).$$

A) 2. $J = [a, b]$, $a < b$.

Utvořme spojitou funkci g v Q:

$$x \in Q \Rightarrow g(x) = \frac{f(x) - a}{b - a};$$

jest $g(Q) \subset [0, 1]$. Postupem určeným v A) 1 dostaneme funkci G spojitou v P, $x \in Q \Rightarrow G(x) = g(x)$, $G(P) \subset [0, 1]$.

Definujme pak F takto:

$$x \in P \Rightarrow F(x) = G(x) \,.\, (b - a) + a.$$

F je spojitá funkce v P, $x \in Q \Rightarrow F(x) = f(x)$, $F(P) \subset [a, b]$.

B) J je interval neomezený.

B) 1. $J = (-\infty, \infty)$.

Pro $x \in Q$ položme

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}.$$

h je spojitá funkce na Q, $h(Q) \subset (-1, 1)$. Podle A) 1, c sestrojíme funkci H, spojitou na P, $x \in Q \Rightarrow h(x) = H(x)$, $H(P) \subset (-1, 1)$. Potom hledaná funkce F je definovaná vztahem

$$x \in P \Rightarrow F(x) = \frac{H(x)}{1 - |H(x)|}.$$

B) 2. $J = [a, +\infty)$.

Pro $x \in Q$ položme

$$h(x) = \frac{f(x) - a}{f(x) - a + 1}.$$

h je spojitá funkce na Q, $h(Q) \subset [0, 1)$ a dál obdobně jako v B) 1.

B) 3. $J = (-\infty, a]$.

Substitucí $f(x) = -h(x)$, $x \in Q$, se tento případ převede na případ B) 2.

Tím je celá věta dokázána.

Také cauchyovsky spojité a stejnoměrně spojité omezené funkce lze větu 2,9 zostřit. K tomu cíli si dokážeme nejprve

Pomocnou větu 2,11. *Nechť P je metrický prostor, A, B dvě neprázdné uzavřené množiny v P, $A \,.\, B = \emptyset$. Potom existuje stejnoměrně spojitá funkce $\psi_{A,B}$ v P taková, že platí $x \in P \Rightarrow 0 \leqq \psi_{A,B}(x) \leqq 1$,*

$$x \in A \Leftrightarrow \psi_{A,B}(x) = 0,\ x \in B \Rightarrow 0 < \psi_{A,B}(x) \leqq 1.$$

Důkaz: 1. Nechť $\varrho(A, B) > 0$, potom dle věty 2,7; 3) je $\varphi_{A,B}$ taková funkce.

2. Nechť

$$\varrho(A, B) = 0.$$

Utvořme množiny

$$B_n = \underset{x \in B}{\mathrm{E}} \left[\varrho(x, A) \geqq \frac{1}{n} \right] \text{ pro } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Existuje zřejmě takový index n_0, že pro $n \geqq n_0$ jsou množiny B_n neprázdné. B_n jsou zřejmě uzavřené. Utvořme nyní funkce $\varphi_n = \varphi_{A,B_n}$ pro

$n \geqq n_0$. Ty jsou na P stejnoměrně spojité podle věty 2,7; 3). Utvořme funkci

$$\psi_{A,B}(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_n(x), \ x \in P.$$

ψ je zřejmě podle věty 1,9 stejnoměrně spojitá. Snadno se nahlédne, že $\psi_{A,B}$ má požadované vlastnosti.

Věta 2,12. *Nechť P je metrický prostor, $\emptyset \neq Q \subset P$, $Q = \overline{Q}$. Nechť f je omezená stejnoměrně (cauchyovsky) spojitá funkce na Q, zobrazující Q do intervalu $J = [a, b]$, $a < b$. Potom existuje stejnoměrně (cauchyovsky) spojitá funkce F na P taková, že $x \in Q \Rightarrow F(x) = f(x)$, $F(P) \subset J$.*

Důkaz: A) Pro stejnoměrnou spojitost. Důkaz provedeme jen v těch bodech, v kterých se liší od důkazu věty 2,10 (t. j. tam, kde budeme používat funkce $\psi_{A,B}$ z věty 2,11). (Pro cauch. spojitost je vše obdobné.)

A) 1, β) Utvořme stejnoměrně spojitou funkci $\psi_{Q,B}$.

Platí $Q \,.\, B = \emptyset$,

$$x \in P \Rightarrow 0 \leqq \psi_{Q,B}(x) \leqq 1,$$
$$x \in Q \Rightarrow \Leftrightarrow \psi_{Q,B}(x) = 0,$$
$$x \in B \Rightarrow 0 < \psi_{Q,B}(x) \leqq 1.$$

Položme $F(x) = G(x) - \psi_{Q,B}(x) \,.\, G(x)$. F je podle vět 2,1 a 2,3 na P stejnoměrně spojitá a platí zřejmě $F(x) = f(x)$ pro $x \in Q$, $F(P) \subset \langle 0, 1)$.

A) 1, c, β) Utvořme $\psi_{Q,A+B}(x)$. Platí

$$x \in P \Rightarrow 0 \leqq \psi_{Q,A+B}(x) \leqq 1.$$

Položme $F_1(x) = G(x) - \psi_{Q,A+B}(x) \,.\, G(x)$ pro $x \in P$. F_1 je stejnoměrně spojitá v P a platí

$$x \in Q \Rightarrow F_1(x) = f(x), \ F_1(P) \subset \langle 0, 1).$$

Dále už postupuje důkaz přesně podle důkazu věty 2,10.

Věty 2,10 v dalším častěji užijeme. Jako příklad na její užití uveďme tuto větu:

Věta 2,13. *Nechť P je spočetný metrický prostor. Pak každá funkce f na P je limitou posloupnosti spojitých funkcí v P.*

Důkaz: Z bodů prostoru P lze utvořit posloupnost $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. Mějme funkci f na P. Nechť $n = 1, 2, 3, \ldots$ Označme

$$M_n = \mathop{\mathrm{E}}_{x_m \in P} [x_m, m \leqq n].$$

M_n jsou uzavřené neprázdné množiny v P. Na M_n definujme funkci f_n takto:

$$x_m \in M_n \Rightarrow f_n(x_m) = f(x_m).$$

f_n je na M_n spojitá a proto podle 2,10 existuje spojitá funkce F_n na P taková, že

$$x_m \in M_n \Rightarrow f_n(x_m) = F_n(x_m).$$

Nyní posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ má za limitu funkci f, jak se lehko ukáže.

Věta 2,14. *Každá spojitá funkce f na P je omezená když a jen když jest P kompaktní prostor.*

Důkaz: 1. Nechť P je kompaktní. Potom $f(P)$ je podle vět 1,13 a 1,10 omezený; to znamená, že funkce f je omezená.

2. Nechť P není kompaktní. Potom existuje prostá posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in P$, z níž nelze vybrat konvergentní posloupnost.

Budiž Q množina všech bodů x_n. Q je neprázdná a uzavřená v P.

Definujme na Q funkci f: $x_n \in Q \Rightarrow f(x_n) = n$. f je na Q spojitá a proto podle 2,10 existuje spojitá funkce F na P taková, že $x_n \in Q \Rightarrow f(x_n) = F(x_n) = n$. Tedy F není na P omezená.

Věta 2,15. *Každá spojitá funkce na daném prostoru P je cauchyovsky spojitá na P, když a jen když jest P úplný prostor.*

Důkaz: 1. Nechť P je úplný, f spojitá funkce na P. Pak f je na P cauchyovsky spojitá podle 1,15.

2. Nechť P není úplný. Pak existuje cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ bodů z P, jež není konvergentní. Z $\{x_n\}$ lze vybrat prostou cauchyovskou posloupnost $\{x'_n\}$. Buď X množina všech x'_n.

Jest $X = \overline{X}$. Na X definujme funkci f vztahem $f(x'_n) = n$.

f je na X spojitá; podle 2,10 existuje tedy na P spojitá funkce F taková, že $F(x'_n) = f(x'_n)$ pro $n = 1, 2, \ldots$ F však není na P cauchyovsky spojitá, neboť $\{F(x'_n)\}$ není cauchyovská.

Věta 2,16. *Každá spojitá funkce na prostoru P je stejnoměrně spojitá, když a jen když platí:*

1) *množina K všech neisolovaných bodů prostoru P jest kompaktní prostor,*

2) *ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\alpha > 0$ tak, že*

$$x \in P,\ y \in P,\ x \neq y,\ \varrho(x, K) \geqq \varepsilon,\ \varrho(y, K) \geqq \varepsilon \Rightarrow \varrho(x, y) > \alpha.$$

Důkaz: 1. Nechť P má vlastnosti 1) a 2). Budiž f spojitá funkce v P. Nechť $n = 1, 2, 3, \ldots$, $x_n \in P$, $y_n \in P$, $\varrho(x_n, y_n) \to 0$.

Máme dokázat $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. Předpokládejme, že to neplatí. Pak lze předpokládat, že pro všechna n jest $|f(x_n) - f(y_n)| > \beta > 0$. Odtud plyne $x_n \neq y_n$ pro všechna n. Platí $\varrho(x_n, K) \to 0$, neboť jinak by šlo z $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ vybrat $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$ tak, že by pro všechna n bylo $\varrho(x'_n, K) > \gamma > 0$, $\varrho(y'_n, K) > \gamma > 0$. To je ve sporu s 2).

Tedy vskutku $\varrho(x_n, K) \to 0$. Proto lze v K určit posloupnost $\{z_n\}$ tak, že $\varrho(x_n, z_n) \to 0$. Z posloupnosti $\{z_n\}$ v K lze vybrat konvergentní $\{z_n^*\}$, $z_n^* \to z \in K$.

Protože $\varrho(x_n, z_n) \to 0$, jest $x_n^* \to z$; odtud a z $\varrho(x_n, y_n) \to 0$ plyne $y_n^* \to z$. Tedy $f(x_n^*) \to f(z)$, $f(y_n^*) \to f(z)$ a to je spor.

2. Nechť každá spojitá funkce f v P je stejn. spojitá.

a) Budiž K množina neisolovaných bodů z P. Předpokládejme, že K není kompaktní. Pak existuje v K prostá posloupnost $\{x_n\}$ taková, že z ní nelze vybrat konvergentní posloupnost v K a tedy ani v P. Buď X množina všech x_n. X je uzavřená v P. Definujme na X funkci f_1.

$x_n \in X \Rightarrow f_1(x_n) = n$. Ta je na X spojitá. f_1 lze rozšířit podle 2,10 na F_1 spojitou v P, $f_1(x_n) = F_1(x_n)$.

F_1 je podle předpokladu stejnoměrně spojitá. Tedy existuje $\delta > 0$ tak, že

$$x \in P,\ y \in P,\ \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow |F_1(x) - F_1(y)| < 1.$$

Odtud plyne

$$n \neq m \Rightarrow \varrho(x_n, x_m) \geqq \delta. \tag{1}$$

Body x_n nejsou isolované, lze tudíž v P najít body y_n tak, že

$$0 < \varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}\,\delta. \tag{2}$$

Buď Y množina všech y_n. Y je v důsledku (1) a (2) uzavřená v P. Tedy i $X + Y$ je uzavřená v P.

Platí $x_n \neq y_m$ pro libovolné n, m, jak ihned plyne z (2) a (1).

Tudíž $X \,.\, Y = \emptyset$. Nyní definujme na $X + Y$ funkci f_2 předpisem $x_n \in X \Rightarrow f_2(x_n) = 0$, $y_n \in Y \Rightarrow f_2(y_n) = 1$. Funkce f_2 je na $X + Y$ spojitá. Lze ji tedy rozšířit podle 2,10 na P. Dostaneme funkci F_2 na P spojitou a tedy stejnoměrně spojitou, $x \in X + Y \Rightarrow F_2(x) = f_2(x)$. Nyní platí $\varrho(x_n, y_n) \to 0$ podle (2), avšak $F_2(x_n) = 0$; $F(y_n) = 1$, a to je spor. Tudíž K je kompaktní.

b) Zbývá dokázat 2). Předpokládejme, že 2) neplatí. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ tak, že lze najít pro každé $n = 1, 2, \ldots$ body $x_n \in P$, $y_n \in P$ tak, že

$$x_n \neq y_n,\ \varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n},\ \varrho(x_n, K) \geqq \varepsilon,\ \varrho(y_n, K) \geqq \varepsilon. \tag{3}$$

Z posloupnosti $\{x_n\}$ ani $\{y_n\}$ nelze vybrat konvergentní posloupnost. Jinak by totiž pro limitu x příslušné vybrané konvergentní posloupnosti platilo $\varrho(x, K) \geqq \varepsilon > 0$ a tedy neisolovaný bod x by neležel v K. Lze také předpokládat, že $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ jsou prosté. Odtud týmž způsobem jako v části 2a) lze ukázat existenci čísla $\delta_1 > 0$ takového, že

$$m \neq n \Rightarrow \varrho(x_n, x_m) \geqq \delta_1. \tag{4}$$

Dále existuje index $n_0 > \dfrac{1}{\delta_1}$ takový, že $n > n_0$, $m > n_0 \Rightarrow x_n \neq y_m$. Pro $n = m$ plyne správnost tohoto tvrzení přímo z definice bodů x_n, y_n, pro $n \neq m$ sporem z (3) a (4).

Lze tedy z $\{x_n\}$ vybrat $\{x_{k_n}\}$ tak, že $x_{k_n} \neq y_{k_m}$ pro každé m a n. Obě posloupnosti jsou prosté; buďte X, resp. Y množiny jejich členů. X i Y

jsou uzavřené v P, $X . Y = \emptyset$. Funkce f, definovaná na $X + Y$ předpisem $f(x_{k_n}) = 0$, $f(y_{k_n}) = 1$, je na $X + Y$ spojitá. Protože $X + Y$ je uzavřená v P, lze podle 2,10 rozšířit f na P; dostaneme funkci F, která je na P spojitá a tedy stejnoměrně spojitá. To však je ve sporu s tím, že

$$\varrho(x_{k_n}), y_{k_n}) < \frac{1}{n}, \; F(x_{k_n}) = 0, \; F(y_{k_n}) = 1.$$

Tím je celá věta dokázána.

Definice 2,5. Nechť P je metrický prostor, f funkce na P. Pravíme, že f nabývá na P *maxima* (resp. *minima*), existuje-li $x \in P$ takový, že $y \in P \Rightarrow f(y) \leqq f(x)$ (resp. $y \in P \Leftarrow f(y) \geqq f(x)$).

Věta 2,17. *Každá spojitá funkce na daném metrickém prostoru P nabývá na P maxima a minima, když a jen když jest P kompaktní prostor.*

Důkaz: 1. Nechť P je kompaktní. Množina $f(P) \subset E_1$ je podle 1,13 kompaktní, podle 1,11 uzavřená a omezená, její supremum (resp. infimum) je tedy jejím maximem (resp. minimem).

2. Nechť P není kompaktní. Pak podle 2,14 existuje na P spojitá neomezená funkce f, která tedy nenabývá na P maxima a minima.

Věta 2,18. *Pro každou spojitost funkcí f na $P \neq \emptyset$ jest množina $f(P)$ interval nebo jednobodová množina, když a jen když je P souvislý prostor.*

Důkaz: Plyne z věty 1,18 a 1,19.