Recense článků a knih

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 1, 93--98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117020

RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

A) ČLÁNKY

Alois Apfelbeck: **Příspěvek k Chinčinovu principu přenosu.** Časopis (rus.) 76 (1951) str. 141 až 172, Časopis (anglo-franc.-něm.) 76 (1951) str. 119 až 148.

Budiž dáno mn reálných čísel ϑ_{ij} $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq m)$. Sestrojme systém n lineárních forem

$$S_i(x) = \vartheta_{i1}x_1 + \ldots + \vartheta_{im}x_m + x_{m+i}\ (1 \leqq i \leqq n)$$

o $m + n$ proměnných $x_1, \ldots, x_{m+n}$ a obdobně systém m lineárních forem

$$T_j(y) = \vartheta_{1j}y_1 + \ldots + \vartheta_{nj}y_j + y_{n+j}\ (1 \leqq j \leqq m).$$

V dalším budou x_a, y_b probíhati jen celá čísla. Každému systému $x = [x_1, \ldots, x_{m+n}]$ přiřaďme číslo $\sigma(x) = \mathrm{Max}(|S_1(x)|, \ldots, |S_n(x)|$ a pro libovolné $t \geqq 1$ položme

$$\psi_1(t) = \min_{0 < \mathrm{Max}(|x_1|, \ldots, |x_m|) \leqq t} \sigma(x).$$

Číslo $\psi_1(t)$ tedy udává, s jakým stupněm přesnosti je možno přibližně řešit systém rovnic $S_1(x) = \ldots = S_n(x) = 0$ celými čísly $x_1, \ldots, x_{m+n}$ s podmínkou, že $|x_j| \leqq t$ pro $j = 1, \ldots, m$, při čemž si nevšímáme triviálního řešení $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m+n} = 0$. Obdobný význam nechť má funkce $\psi_2(t)$ pro systém T_j $(j = 1, \ldots, m)$.

Budiž β_1 resp. β_2 supremum oněch čísel ω, pro něž je $\liminf \psi_1(t)\, t^{\frac{m+\omega}{n}} < +\infty$ resp. $\liminf \psi_2(t)\, t^{\frac{n+\omega}{m}} < +\infty$, pro $t \to +\infty$. Obdobný význam nechť mají α_1, α_2 až na to, že místo liminf píšeme limsup.[1]) Mezi čísly β_1, β_2 platí tento vztah

$$\beta_2 \geqq \frac{n\beta_1}{m(m + n - 1) + (n - 1)\beta_1}, \tag{1}$$

který pro $m = 1$ nebo $n = 1$ odvodil *Chinčin* (1926), obecně později *Dyson.* Týž vztah platí mezi čísly α_1, α_2, jak pro $m = 1$ nebo $n = 1$ odvodil *Jarník* (1937) a jak obecně dokazuje nyní *Apfelbeck.* Dále se však mezi oběma problémy ukazují podstatné rozdíly. Nechme stranou triviální případ $m = n = 1$ (načež $S_1 = T_1$). V případě $m = 1$ nebo $n = 1$ nelze nerovnost (1) dále zostřiti (*Jarník*), kdežto obdobnou nerovnost pro α_1, α_2 lze zostřiti, je-li α_1 dosti velké. Týž výsledek pro α_1, α_2 dokazuje nyní *Apfelbeck* pro jakákoliv m, n. Ve speciálním případě $m = 2$, $n = 1$ jde toto zostření tak daleko, že α_2 je jednoznačně určeno číslem α_1 a naopak (*Jarník*). *Apfelbeck* ukazuje, že tento případ, spolu se symetrickým případem $m = 1$, $n = 2$ jsou jediné případy, ve kterých taková jednoznačná závislost existuje. Zostření nerovnosti (1) dokazuje *Apfelbeck* methodou, které použil *Chinčin* k novému důkazu jedné z uvedených Jarníkových vět.

V. Jarník, **Praha.**

---

[1]) *Apfelbeck* píše α, β místo α_1, α_2.

Jaroslav Kurzweil: **Příspěvek k metrické theorii diofantických aproximací.** Časopis (rus.) *76* (1951) str. 173 až 204, Časopis (anglo-franc.-něm.) *76* (1951) str. 149 až 178.

Budiž $g(x)$ funkce kladná, spojitá a rostoucí (ač poslední podmínka není všude nutná) pro dostatečně velká x. Říkejme, že reálné iracionální číslo α připouští aproximaci $g(x)$, jestliže existuje nekonečně mnoho párů celých čísel p, q ($q > 0$) tak, že

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 g(q)}.$$

Chinčin dokázal: Jestliže

$$\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{xg(x)} \tag{1}$$

konverguje, potom ta čísla α, která připouštějí aproximaci $g(x)$, tvoří množinu Lebesgueovy míry nulové. Jestliže však tento integrál diverguje, potom skoro všechna α připouštějí aproximaxi $g(x)$. „Velikost" množin míry nulové lze do jisté míry dále vyšetřovat užitím Hausdorffovy míry: Zvolím kladnou spojitou funkci $f(x)$ tak, že pro $x \to 0+$ je $f(x) \to +\infty$, $xf(x) \to 0$ monotonně. Danou množinu M reálných čísel pokryji spočetným systémem intervalů o délkách $d_1, d_2, \ldots$; při tom nechť $d_n < \varrho$, kde ϱ je dané kladné číslo. Infimum součtů $\sum\limits_n d_n f(d_n)$ pro všechna pokrytí množiny M, vyhovující podmínce $d_n < \varrho$, označme $L(\varrho)$. To je zřejmě nerostoucí funkce ϱ, takže existuje $\lim\limits_{\varrho \to 0+} L(\varrho)$ (vnější Hausdorffova míra M při funkci f), kterou *Kurzweil* označuje $\mathrm{Hm}f(M)$. Tato míra umožňuje další klasifikaci množin, které mají Lebesgueovu míru nula. Konverguje-li (1), lze takto vyšetřovati množinu těch α, která připouštějí aproximaci $g(x)$ (*Jarník*). Diverguje-li (1), označme Q_g množinu oněch α, která nepřipouštějí aproximaci $g(x)$, takže Q_g má Lebesgueovu míru nula. Hlavní věta Kurzweilova praví toto: Budiž $g(x) > 10^3$ pro dosti velká x; nechť (1) diverguje. Položme

$$f_1(t) = \exp\left(\frac{2}{3}\int_w^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{\mathrm{d}x}{xg(x)}\right), \quad f_2(t) = \exp\left(2\int_w^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{\mathrm{d}x}{xg(x)}\right)$$

(w je dostatečně velká konstanta).

Potom je $\mathrm{Hm}f_1(Q_g) = 0$, $\mathrm{Hm}f_2(Q_g) = +\infty$. Poznamenejme, že první rovnici lze psáti též $\mathrm{Hm}f_2(Q_{3g}) = 0$. Je vidět, jak jemně dovoluje Hausdorffova míra rozlišit jednotlivé funkce g, na př. $g(x)$ a $3g(x)$. Dříve byly v případě divergence integrálu (1) známy jen hrubé odhady (*Jarník*). Poznamenejme, že věta Chinčinova i věty Jarníkovy pro případ konvergentního integrálu jsou známy též obecněji pro případ simultanní aproximace s čísel $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ zlomky se společným jmenovatelem. Naproti tomu případ divergentního integrálu se vyšetřuje užitím řetězového zlomku pro číslo α a výsledky jsou proto omezeny na případ $s = 1$.

V. Jarník, Praha.

Zygmunt Zahorski: **O křivkách, jejichž tečna nabývá na každém oblouku všech směrů.** Časopis (rus.) *76* (1951) str. 125 až 140, Časopis (anglo-franc.-něm.) str. 105 až 118.

Slovem křivka se zde rozumí spojité zobrazení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ do trojrozměrného prostoru, dané rovnicí $P = f(t)$. Slovem tečna v bodě $f(t_0)$ se míní buďto neorientovaná přímka, která je limitou spojnice bodů $f(t_0)$, $f(t)$ pro $t \to t_0$ nebo orientovaná přímka, která je limitou orientované spojnice bodů $f(t_0)$, $f(t)$, při čemž orientace je od $f(t_0)$ k $f(t)$, je-li $t_0 < t$, ale od $f(t)$ k $f(t_0)$, je-li $t_0 > t$. Autor odpovídá na problém, položený *J. Krzyżem*, těmito větami:

Věta 1. Jestliže křivka má tečnu všude až na spočetný počet bodů, potom tato tečna nemůže nabývati na každém oblouku $t_1 \leqq t \leqq t_2$ všech směrů.

Tato věta platí jak pro neorientovanou tečnu, tak pro orientovanou; v prvním případě se ovšem při slově směr nepřihlíží k orientaci, v druhém případě ano.

Věta 2. Existuje jednoduchý, rektifikace schopný oblouk, jehož orientovaná tečna bývá na každém částečném oblouku všech orientovaných směrů. Z věty *1* je ovšem patrno, že na každém oblouku je nespočetná množina bodů, v nichž orientovaná tečna neexistuje.

Autor uvádí mimo to bez důkazu ještě několik zajímavých výsledků svých i cizích. *V. Jarník*, Praha.

Karel Havlíček: **Kanálové plochy přímkové,** Časopis (rus.) *76* (1951), str. 213 až 224, Časopis (anglo-franc.-něm) *76* (1951), str. 187 až 197.

Autor si položil otázku, zda existují reálné kanálové plochy přímkové s reálnými přímkami. Jako výsledek svých úvah dokázal větu:

Kanálová plocha je přímkovou plochou tehdy a jen tehdy, když je rotační plochou přímkovou.

V práci použil autor výsledků své práce uveřejněné v Časopise pro pěst. mat. a fys. *74* (1949), str. 21 až 40 (Charakterisace přímkové kanálové plochy anulováním jistého skaláru) a obvyklých method diferenciální geometrie.

F. Vyčichlo, Praha.

B) KNIHY

И. Г. Петровский: **Лекции об уравнениях с частными производными.** (*I. G. Petrovskij:* **Přednášky o rovnicích s parciálními derivacemi.**) Státní vydavatelstvo technicko-teoretické literatury, Moskva-Leningrad 1950, str. 303, cena 7 r. 95 k., tiráž 15 000 kusů.

Kniha vznikla doplněním autorových přednášek pro posluchače matematiky na mechanicko-matematické fakultě Moskevské státní university. Je to vysokoškolská učebnice, která uvádí začátečníka do teorie parciálních diferenciálních rovnic. Autor předpokládá u čtenáře znalost obyčejných diferenciálních rovnic v rozsahu vlastního normálního kursu o obyčejných diferenciálních rovnicích.

Řada fysikálních problémů vede k úlohám o parciálních diferenciálních rovnicích. Nejtypičtější z nich je úloha stanoviti řešení dané parciální rovnice z daných počátečních a okrajových podmínek. Hledáme na př. řešení $u(t, x)$ rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

v intervalu $0 < x < l$ pro $t > 0$ a požadujeme

1. aby toto řešení a jeho parciální derivace až do druhého řádu měly spojitá rozšíření na interval $[0, l]$ pro $t \geqq 0$,

2. aby byly splněny t. zv. počáteční podmínky, t. j. aby bylo

$$u(0, x) = f_0(x)$$
$$u'_t(0, x) = f_1(x),$$

kde $f_0(x)$ a $f_1(x)$ jsou dané funkce mající spojité derivace prvního řádu a rovné nule v koncových bodech intervalu $[0, l]$,

3. aby byly splněny t. zv. okrajové podmínky, t. j. aby bylo

$$u(t, 0) = 0 = u(t, l)$$

(to je t. zv. úloha o struně).

Pro matematika se zde rozrůstá řada otázek. Především je to otázka existence a jednoznačnosti pro obecnou diferenciální rovnici. Tomuto problému je věnována první kapitola. Nejdříve je dokázána existenční věta Kovalevské. Podle této věty má rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} +$$

$$+ b_1(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$+ c(t, x)\, u + f(t, x)$$

v okolí bodu (t^0, x^0) analytické řešení, které vyhovuje počátečním podmínkám

$$u(t^0, x) = \varphi_0(x)$$

$$u'_t(t^0, x) = \varphi_1(x)$$

jestliže funkce a_1, a_2, b_1, b_2, c, f resp. φ_0, φ_1, jsou analytické v okolí bodu (t^0, x^0) resp. (x^0) a to jednoznačně stanovené. Tato věta je ovšem dokázána v obecnějším tvaru (pro systémy lineárních rovnic) a je zobecněna pro případ, kdy počáteční podmínky jsou dány na nějaké analytické křivce resp. ploše. Pro praktické potřeby nevyhovuje tato věta jednak pro svůj lokální charakter, jednak proto, že všechny funkce musejí být analytické (jednoznačnost pouze v oblasti analytických funkcí). Autor vyloží proto některé známé výsledky o tom, za jakých podmínek je řešení jednoznačně určeno ve třídě neanalytických funkcí (které ovšem mají spojité derivace až do určitého řádu) a zbytek kapitoly je věnován klasifikaci rovnic druhého řádu, aby v dalších kapitolách byly odvozeny podrobnější výsledky pro speciální třídy rovnic.

Nejobsáhlejší druhá kapitola pojednává o hyperbolických rovnicích. Kromě existence a jednoznačnosti vyšetřuje se zejména z hlediska aplikací důležitý pojem ***korektnosti*** dané úlohy. V aplikacích jsou počáteční podmínky dané úlohy obvykle známé pouze přibližně a je tedy důležité, aby malá odchylka uvažovaných počátečních hodnot měla za následek pouze malou odchylku uvažovaného řešení od skutečného řešení. Na př. úloha o struně je korektní v tomto smyslu:

Na daném obdélníku $0 \leqq x \leqq l$, $0 \leqq t \leqq T$ lze dosáhnouti toho, že dvě řešení $u(t, x)$ a $\bar{u}(t, x)$ se od sebe málo liší tím, že jim příslušné počáteční hodnoty $f_0(x)$ a $\bar{f}_0(x)$, $f_1(x)$ a $\bar{f}_1(x)$ a jejich první derivace podle x $f_0'(x)$ a $\bar{f}_0'(x)$, $f_1'(x)$ a $\bar{f}_1'(x)$ se od sebe dosti málo liší.

S tím souvisí také pojem t. zv. zobecněných řešení dané úlohy, který zavedl *S. L. Sobolev*. Zobecněným řešením diferenciální rovnice nazveme každou takovou funkci, která je stejnoměrnou limitou obyčejných řešení této rovnice. Hledejme na př. řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

při počátečních podmínkách

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u'_t(0, x) = \psi(x).$$

Jak se snadno přesvědčíme, řešením této úlohy bude funkce

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + t) + \varphi(x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\, d\xi.$$

Tento vzorec dává obyčejné řešení dané úlohy pouze za předpokladu, že funkce $\varphi(x)$ má spojitou derivaci druhého řádu a funkce $\psi(x)$ má spojitou derivaci prvního řádu, zatím co tentýž vzorec dává zobecněné řešení úlohy, předpokládáme-li pouze, že funkce $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ a $\psi(x)$ jsou spojité.

Podrobně je vyšetřována Fourierova methoda pro řešení okrajových úloh pro rovnice tvaru

$$A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D(t)\frac{\partial u}{\partial t} + E(x)\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+ (F_1(t) + F_2(x))\,u = 0$$

kde A, C, D, E, F_1, F_2 jsou dosti hladké funkce a $A(t) > a_0 > 0$, $C(x) < c_0 < 0$. Tato methoda je odvozena jednak pomocí variačního počtu, jednak pomocí Greenovy funkce a theorie integrálních rovnic.

Pro úlohu o struně dostáváme tímto způsobem řešení

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{l}x\left[A_k \cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t\right], \tag{1}$$

kde

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = f_0(x)$$

$$u'_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} B_k \sin\frac{k\pi}{l}x = f_1(x)$$

a musíme ovšem předpokládat, že funkce f_0, f_1 mají spojité derivace čtvrtého řádu na intervalu $[0, l]$ a že hodnoty těchto funkcí a jejich derivací druhého řádu jsou rovny nule v koncových bodech úsečky $[0, l]$.

Ale k tomu, aby řada (1) byla zobecněným řešením dané úlohy stačí, aby funkce f_0 a f_1 byly rovné nule na koncích úsečky $[0, l]$ a měly spojité první derivace na intervalu $[0, l]$.

Typickou eliptickou rovnicí je t. zv. Laplaceova rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Spojitá řešení této rovnice jsou t. zv. harmonické funkce. Vyšetřování okrajových úloh pro tuto rovnici je provedeno v kapitole třetí. Nejznámější z nich je t. zv. Dirichletova úloha:

Budiž na hranici Γ ohraničené oblasti G dána spojitá funkce f. Hledáme funkci u, harmonickou v G a spojitou na $G + \Gamma$, aby platilo $u = f$ na Γ.

Pěkný a elementární důkaz toho, že Dirichletova úloha má nejvýš jedno řešení a že toto řešení spojitě závisí na funkci f, podal v r. 1926 *I. I. Privalov*. Toto tvrzení plyne bezprostředně z věty:

Funkce $u(x, y)$, harmonická v ohraničené oblasti G a spojitá na $G + \Gamma$ (Γ je hranice G) nabývá svého maxima (i minima) na Γ.

Důkaz: Předpokládejme, že (spojitá) funkce u nabývá svého maxima M v některém bodě P oblasti G, zatím co maximum m funkce u na Γ je menší než M. Položme počátek souřadnic do bodu P a sestavme pomocnou funkci

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{M - m}{2d^2}(x^2 + y^2),$$

kde d je průměr oblasti G.

Zřejmě $v(0, 0) = u(0, 0) = M$. Jestliže bod (x, y) leží na hranici Γ, potom

$$v(x, y) \leqq m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M.$$

Tedy funkce $v(x, y)$ také nabývá svého maxima v některém bodě Q oblasti G. To však není možné, protože všude v G je

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{M - m}{d^2} = \frac{M - m}{d^2} > 0,$$

ale v bodě Q žádná z obou parciálních derivací druhého řádu nemůže být kladná.

Dále jsou dokázány základní věty o harmonických funkcích (Harnackovy věty, Liouvilleova věta) a existenční věta pro Dirichletovu úlohu (Poincaréovou methodou). Pouze v rovině se autor zabývá theorií potenciálu a znovu řeší okrajové úlohy.

Kratičká čtvrtá kapitola obsahuje dva problémy o parabolických rovnicích.

Kniha je psána velmi jasně a srozumitelně, vyložené věty jsou často ilustrovány jednoduchými příklady. Na nevelkém rozsahu je shrnut bohatý materiál: m. j. se čtenář poučí o kanonických tvarech rovnic, o numerických methodách a seznámí se s některými aplikacemi (difuse vln, chvění membrány).

Mimořádnou cenu mají odstavce umístěné ke konci kapitol, kde jsou stručně vyložena zobecnění dokázaných vět a kde jsou často uvedeny výsledky dosažené v době zcela nedávné. *Jar. Kurzweil*, Praha.

И. Г. Петровский: **Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.** (*I. G. Petrovskij:* **Přednášky o theorii obyčejných diferenciálních rovnic.**) Gostechizdat, 3. vydání, Moskva-Leningrad 1949, 208 stran, cena 4 r. 30 k, tiráž 15000 kusů.

Kniha je schválena jako učebnice pro fysikálně matematické fakulty universit. Autor se po stručném úvodu soustředí na větu existenční a větu o jednoznačnosti (pro rovnici $y' = f(x, y)$). Nejdříve vyloží Peanův důkaz existenční věty a Osgoodův důkaz jednoznačnosti, potom methodu postupných approximací, která užívá Lipschitzovy podmínky. Methoda postupných approximací je v následujícím odstavci formalisována v t. zv. „princip sžatych otobraženij" (věta o pevném bodě) a jako aplikace tohoto principu je dokázána existenční věta pro integrální rovnice druhého druhu a existence implicitní funkce určené rovnicí $f(x, y) = 0$. Následuje Cauchyova věta [o případě, kdy $f(x, y)$ je holomorfní funkce], věta o závislosti řešení na parametrech a počátečních podmínkách a stručný přehled o průběhu integrálních křivek.

Pro systémy diferenciálních rovnic jsou nejprve zobecněny obecné methody vyložené pro rovnici $y' = f(x, y)$ (důkaz jednoznačnosti a existence), pak následují věty o lineárních rovnicích a věta o nulových bodech řešení lineární homogenní rovnice druhého řádu. Poslední kapitola je věnována převedení systému lineárních rovnic s konstantními koeficienty na kanonický tvar. V dodatku je dokázána existenční věta pro parciální rovnice prvního řádu.

И. Г. Петровский: **Лекции по теории интегральных уравнений.** (*I. G. Petrovskij:* **Přednášky o theorii integrálních rovnic.**) Gostechizdat, Moskva-Leningrad 1951, 2. vyd. 127 stran, cena 4 r. 50 k., tiráž 10000 kusů.

V první kapitole jsou dokázány Fredholmovy věty pro rovnici druhého druhu se spojitým jádrem a s jádrem tvaru $\frac{K(P,Q)}{(PQ)^\alpha}$ ($K(P, Q)$ je spojitá funkce, (P, Q) vzdálenost bodů P a Q — autor pracuje s Riemannovým integrálem).

Druhá kapitola je věnována Volterrově rovnici a ve třetí kapitole autor rozvíjí analogii mezi theorií integrálních rovnic s reálným symetrickým jádrem a theorií kvadratických forem, studuje vlastnosti vlastních hodnot a funkcí, dokazuje větu Hilbert-Schmidtovu a větu o rozložení jádra. Dodatek obsahuje zobecnění theorie pro funkce, které jsou schopny integrace podle Lebesguea a jejichž kvadráty mají integrál.

Výklad v obou jmenovaných knihách je jasný a stručný a tak při nevelkém rozsahu je soustředěno mnoho materiálu; pěkné a jednoduché jsou příklady, které ilustrují nezbytnost učiněných předpokladů, přibližné methody i aplikace.

Jar. Kurzweil, Praha.