Časopis pro pěstování matematiky

G. Petrov

O podmínkách konstrukce trojúhelníku

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 1, 77--92

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117019`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 77 (1952)

O PODMÍNKÁCH KONSTRUKCE TROJÚHELNÍKU

G. PETROV, Praha.

(Došlo dne 21. července 1950.) 512 513

Předmětem tohoto článku jest nalezení nutných a postačujících podmínek k tomu, aby existoval trojúhelník určený třemi podmínkami.

Omezíme se na případy, kdy trojúhelník jest určen třemi s ním spojenými úsečkami. Naší methody rozboru může se užíti i tehdy, když k určení trojúhelníku je dána nějaká kombinace s ním spojených úseček, nebo nějaký úhel, když v posledním případě vezmeme místo úhlu nějakou goniometrickou funkci.

1. Jest nám známo, že mezi kterýmikoli čtyřmi elementy trojúhelníku existuje vztah, který je vyjádřen určitou algebraickou rovnicí mezi nimi. Podmínky pro existenci trojúhelníku daného třemi elementy vyjadřují se algebraickými nerovnostmi i rovnicemi. Považujeme zvolené čtyři elementy trojúhelníku za homogenní pravoúhlé souřadnice trojrozměrného euklidovského prostoru, doplněného o nevlastní elementy. Třeba poznamenati, že uvažujeme o bodech, ležících v první oktantě, jelikož máme na mysli absolutní velikosti elementů trojúhelníků. Rovnice mezi čtyřmi elementy trojúhelníku vyjádřená v pravoúhlých homogenních souřadnicích určuje nám rovnici algebraické plo-plochy Ω. Nerovnosti, event. rovnice, mezi třemi z těchto čtyř elementů vyjadřující podmínky existence trojúhelníků, určují nám oblast σ' a určitou část její hranice v té souřadnicové rovině, ve které je rovna nule ona souřadnice, která se nevyskytuje v těchto nerovnostech. Homogenní souřadnice bodu oblasti σ' a jenom ony, mohou býti elementy trojúhelníku. Válec ζ', jehož podstavou je oblast σ' a jehož tvořící přímky jsou rovnoběžné se souřadnicovou osou neležící v souřadnicové rovině, jež obsahuje σ', určuje na ploše Ω oblast σ. Hranice oblasti σ jest křivka, ve které plocha Ω se protíná s hraniční válcovou plochou η' válce ζ'. Při tom oblast σ jest určena jednoznačně uvedeným způsobem, když každá tvořící přímka válce ζ' a hraniční válcová plocha η' protíná Ω v jednom bodě nacházejícím se v prvním oktantu. V opačném případě užijeme oblasti σ''' nacházející se v některé z druhých souřadnicových rovin, ve kterých hom. souřadnice odpovídají elementům trojúhelníku,

u kterých známe podmínky řešitelnosti trojúhelníku, t. j. u kterých známe σ'''. Tedy σ jest oblastí na Ω obsaženou ve válcích ζ' i ζ''' utvořených respektive nad σ' i σ''' s tvořícími přímkami rovnoběžnými se souřadnicovou osou neležící v souřadnicové rovině obsahující σ' nebo σ'''. Hranicí oblasti σ v tom případě jest křivka, ve které se protínají na Ω válcové plochy η' i η'' omezující válce ζ' i ζ'''.

Homogenní souřadnice bodů oblasti σ, po případě též část její hranice a jenom ony, mohou býti elementy trojúhelníku, jelikož v opačném případě následuje, že oblast σ' (resp. oblast σ''') neurčuje podmínky řešitelnosti trojúhelníku.

Promítejme oblast σ resp. její hranici do souřadnicové roviny, ve které máme homogenní souřadnice (elementy), mezi kterými hledáme podmínky řešitelnosti trojúhelníků, rovnoběžně k souřadnicové ose neležící v této souřadnicové rovině. Na souřadnicové rovině obdržíme oblast σ''; pouze homogenní souřadnice bodů této oblasti po případě i některých bodů její hranice jsou elementy trojúhelníku, poněvadž každá rovnoběžka se souřadnicovou osou neležící v této souřadnicové rovině mající společný bod s σ'' má i společný bod s σ a obráceně.

Oblast σ'' i odpovídající část její hranice jsou určeny analyticky resp. nějakou nerovností a rovnicí mezi souřadnicemi v odpovídající souřadnicové rovině.

Vyjádříme-li tyto nerovnosti i rovnice odpovídajícími elementy trojúhelníku, dostaneme nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s těmi třemi elementy.

Při promítání oblasti σ do druhé souřadnicové roviny rozlišujeme dva případy podle toho, zdali křivka dotyku D plošky Ω s dotykovou válcovou plochou δ'' opsanou Ω, jejíž tvořící přímky jsou rovnoběžné se směrem promítání, leží či neleží v σ.

Při tom třeba poznamenati, že ke křivce D náleží i singulární body na Ω. Jestliže průmět D' do souřadnicové roviny na σ' při směru promítání rovnoběžném s tvořícími přímkami válce (ζ') neleží v σ', pak jistě D nenáleží do σ a obráceně, když D' náleží do σ' a D jest v prvním oktantu, pak náleží do σ.

V prvním případě průmět hranice σ určuje nám hranici na σ'', když válcová plocha průmětu její hranice na σ do druhé souřadnicové roviny neprotíná σ.

V druhém případě postačující podmínky, že projekce D'' do druhé souřadnicové roviny části D obsažené v σ je hranicí σ'' jsou:

1. žádný z bodů na D není singulárním bodem, 2. přímky, které promítají příslušnou část D nejsou inflexní tečny na Ω, t. j. nemají dotyk vyššího než druhého řádu, 3. neprotínají σ v bodech odlišných od dotykových. Skutečně v tom případě všechny body na σ nalézají se v jedné z prostorových oblastí ohraničených válcovou plochou δ'' promítající D, takže jejich průměty do druhé souřadnicové roviny jsou

v jedné z oblastí určených křivkou D'', která je průsečnicí δ'' s druhou souřadnicovou rovinou. Jest nutno poznamenati, že homogenní souřadnice bodu křivky D'' také mohou býti elementy trojúhelníku. Druhou část hranice oblasti σ'' obdržíme, když promítneme obdobnou část hranice σ. Počet všech možných řešení trojúhelníku rovná se počtu bodů, ve kterých přímky rovnoběžné se směrem promítání do souřadnicové roviny obsahující σ'' protínají σ. Když do D patří nějaký singulární bod, pak provedeme zvláštní diskusi.

2. Jako obvykle označujeme vrcholy trojúhelníka A, B, C, úhly α, β, γ, strany a, b, c, takže

$$\alpha = \sphericalangle A,\ \beta = \sphericalangle B,\ \gamma = \sphericalangle C,\ a = \overline{BC},\ b = \overline{AC},\ c = \overline{AB}.$$

Dále označíme t_a, t_b, t_c těžnice, v_a, v_b, v_c výšky, u_α, u_β, u_γ úsečky na osách úhlů od vrcholu až k protější straně, r poloměr kružnice opsané, ϱ poloměr kružnice vepsané. Mezi třemi stranami a, b, c trojúhelníku a úsečkou na ose úhlu u_α existuje rovnice:

$$u_\alpha^2(b + c)^2 = bc[(b + c)^2 - a^2]. \tag{2,1}$$

Jest známo, že nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku daného třemi stranami jsou:

$$a + b - c > 0,\ a - b + c > 0,\ - a + b + c > 0. \tag{2,2}$$

Považujeme a, u_α, c, b za pravoúhlé homogenní souřadnice x, y, z, t rozšířeného trojrozměrného euklidovského prostoru. Z relace (2,1) obdržíme rovnici plochy Ω:

$$f(x, y, z, t) \equiv y^2(z + t)^2 - zt[(z + t)^2 - x^2] = 0. \tag*{(2,1)'}$$

Nerovnosti:

$$x + z - t > 0,\ x - z + t > 0,\ - x + z + t > 0 \tag*{(2,2)'}$$

obdržené z (2,2) určují oblast σ' v souřadnicové rovině $y = 0$. Hranice oblasti σ na ploše Ω jsou křivky, v kterých protíná Ω části rovin, ležící v prvním oktantu:

$$x + z - t = 0,\ x - z + t = 0,\ - x + z + t = 0, \tag{2,3}$$

ve které degeneruje válcová plocha η' válce ξ' sestrojeného nad σ' s tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou y. Zde oblast σ je úplně určena, poněvadž každá přímka rovnoběžná s osou y protíná Ω v jednom bodě ležícím v prvním oktantu.

Křivka dotyku D plochy Ω s válcem δ'' o tvořících přímkách rovnoběžných s osou z je určena rovnicemi:

$$f \equiv y^2(z + t)^2 - zt[(z + t)^2 - x^2] = 0, \tag*{(2,1)'}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 2y^2(z + t) - t[(z + t)^2 - x^2] - 2zt(z + t) = 0. \tag{2,4}$$

Eliminujeme y z těchto dvou rovnic a obdržíme rovnici

$$t(z + t)\,[x^2(t - z) - (z + t)^3] = 0, \tag{2,5}$$

která představuje průmět D' křivky D do souřadnicové roviny $y = 0$.

Křivka D' se rozpadá na přímky

$$t = 0,\ z + t = 0$$

a na kisoidu

$$x^2 = \frac{(z + t)^3}{t - z},$$

z nichž žádná nemá body v naší oblasti, neboli křivka D' není obsažena v σ. V tomto případě hranici oblasti σ'', která je průmětem oblasti σ, určíme, když promítneme hranici oblasti σ, poněvadž válec promítající hranici σ ji neprotíná.

Průmět hranice oblasti σ do souřadnicové roviny $z = 0$ je dán rovnicemi

$$\begin{aligned} y^2 &= 0,\\ 4t^2(x + t)^2 - (2t + x)^2\, y^2 &= 0,\\ 4t^2(x - t)^2 - (x - 2t)^2\, y^2 &= 0, \end{aligned}$$

které se mohou takto rozložit:

$$\begin{aligned} y &= 0,\\ 2t(x + t) - (2t + x)\, y &= 0,\\ 2t(x + t) + (2t + x)\, y &= 0,\\ 2t(t - x) - (2t - x)\, y &= 0,\\ 2t(t - x) + (2t - x)\, y &= 0. \end{aligned} \tag{2,6}$$

Třetí a pátá rovnice jsou rovnice hyperbol, které se nacházejí v částech roviny $x - z + t = 0$ a $x + z - t = 0$, které nejsou obsaženy v prvém oktantu, což znamená, že nejsou průměty hranice σ, která je obsažena pouze v prvním oktantu. Takto obdržíme, že hranice σ'' jsou křivky

$$y = 0,\ 2t(x + t) - (2t + x)\, y = 0,\ 2t(t - x) - (2t - x)\, y = 0. \tag{2,7}$$

Abychom určili přesně oblast σ'' omezenou těmito křivkani, promítneme do druhé souřadnicové roviny bod oboru σ se souřadnicemi $x = z = t = 1$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Oblast, určená hořejšími křivkami, ve které se nachází průmět tohoto bodu, je σ''. Z toho obdržíme, že σ'' je oblast určená nerovnostmi:

$$y > 0,\ 2t(x + t) - (2t + x)\, y > 0,\ 2t(t - x) - (2t - x)\, y < 0. \tag{2,8}$$

Vynecháme rovnosti, neboť ony dávají průměty hranic oblasti σ, pro které neexistuje trojúhelník.

Rovnoběžky s osou z protínají oblast σ jen v jednom bodě.

Vskutku v rovnici

$$f \equiv tz^3 + (2t^2 - y^2)\, z^2 - t(x^2 + 2y^2 - t^2)\, z - y^2t^2 = 0$$

koeficienty při z a prostý člen jsou vždy záporné a koeficient při z^3 vždy kladný, takže nezávisle od znamení $2t^2 - y^2$ vždy budeme mít jednu změnu znamení, to znamená jenom jeden kladný kořen.

Když vyjádříme podmínky (2,8) pomocí a, b, u_α, obdržíme:

Nutné a postačující podmínky, aby existoval trojúhelník s danými a, b, u_α jsou:

$$2b\,\frac{b+a}{2b+a} > u_\alpha > 2b\,\frac{b-a}{2b-a}, \text{ při } b - a \geqq 0.$$

Při těchto podmínkách obdržíme jen jedno jediné řešení.

Stejnou cestou obdržíme i tyto výsledky známé z elementární geometrie.

3. Nutné a postačující podmínky pro řešitelnost trojúhelníku s danými b, c, u_α, jsou:

$$0 < u_\alpha < \frac{2bc}{b+c}. \tag{3,1}$$

4. Nutné a postačující podmínky pro řešitelnost trojúhelníku s danými a, b, t_a jsou:

$$a + 2b - 2t_a > 0,\ a - 2b + 2t_a > 0,\ -a + 2b + 2t_a > 0. \tag{4,1}$$

5. Nutné a postačující podmínky, aby existoval trojúhelník s danými a, b, t_c jsou:

$$a + b - 2t_c > 0,\ a - b + 2t_c > 0,\ -a + b + 2t_c > 0. \tag{5,1}$$

V těchto třech případech existuje jen jedno řešení.

6. Máme určit postačující a nutné podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, b, ϱ.

Mezi třemi stranami trojúhelníku a, b, c a poloměrem ϱ vepsané kružnice platí rovnice

$$4\varrho^2(a + b + c) = [c^2 - (a - b)^2]\,[a + b - c]. \tag{6,1}$$

Položíme $x = a$, $y = c$, $z = \varrho$, $t = b$ a z rovnice (6,1) obdržíme rovnici plochy Ω

$$4z^2(x + y + t) = [y^2 - (x - t)^2]\,(x + t - y) \tag*{(6,1)'}$$

a z nerovnosti (2,2) obdržíme nerovnosti určující oblast σ' v souřadnicové rovině $z = 0$:

$$x + y - t > 0,\ x - y + t > 0,\ -x + y + t > 0. \tag*{(6,2)'}$$

Z rovniee (6,1)′ je zřejmé, že Ω má body v prvním oktantu, jen když jsou splněny nerovnosti (6,2)′, neboť pravá strana (6,1)′ musí být kladná, ježto levá je vždy kladná. To je možné pro kladná x, z, t jen, když jsou splněny všechny tři nerovnosti (6,2)'.

Při tom plocha Ω protíná souřadnicovou rovinu $z = 0$ přesně ve hranici oblasti σ'

$$x + y - t = 0, \quad x - y + t = 0, \quad -x + y + t = 0.$$

Zde σ je úplně určena, neboť každá přímka rovnoběžná s osou z ji protíná jen v jednom bodě.

Z toho vyplývá, že část Ω nacházející se v prvním oktantu představuje σ.

Křivka D, ve které se dotýká plochy Ω válec δ'', který má za tvořící přímky rovnoběžky s osou y, je určena rovnicemi

$$f \equiv y^3 - (x + t)\, y^2 + [4z^2 - (x - t)^2]\, y + \\ + (x + t)\, [4z^2 + (x - t)^2] = 0, \qquad (6,1)''$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 3y^2 - 2(x + t)\, y + 4z^2 - (x - t)^2 = 0. \qquad (6,3)$$

Její průmět D' do souřadnicové roviny $z = 0$ je

$$(x + t)\, [y^2 - (x - t)^2] = y[(x + t)^2 - y^2]. \qquad (6,4)$$

Rovnice (6,4) má reálné řešení v prvém kvadrantu souřadnicové roviny $z = 0$ jen v případě, že jsou splněny známé podmínky (6,2)'. Z toho vyplývá, že část D' nacházející se v prvním kvadrantu roviny $z = 0$ se nachází celá v σ'. Když si všimneme, že Ω je symetrická k souřadnicové rovině $z = 0$, následuje, že část křivky D se nachází v prvním oktantu, to jest v σ.

Z rovnice (6,1)'', když považujeme x, z, t za konstanty, obdržíme body, ve kterých přímka rovnoběžná s osou y protíná Ω. Když x, z a t jsou kladné, rovnice (6,1)'' má jeden a pouze jeden záporný kořen a dva kladné, které mohou býti reálné různé, reálné splývající, nebo imaginární. Toto lze lehce určit, když stanovíme změny znamení koeficientů rovnice. Z toho vyplývá, že křivka D nemá bodů v čtvrtém oktantu a že se dotýká Ω v oblasti σ přesně ve dvou bodech a neprotíná σ v jiném bodě. Ale potom jedna z hranic oblastí σ'' je průmět D'' křivky D. Musíme ještě poznamenat, že eliminace y z (6,1)'' a (6,3) určí přesně diskriminantní rovnici (6,1)'', to znamená body, pro které máme jeden dvojnásobný kořen y, ale při podmínce, že diskriminant je záporný, obdržíme body, pro které budeme mít dvě různá reálná řešení.

Když eliminujeme y z (6,1)'' a (6,3), obdržíme rovnici křivky D'':

$$4z^6 + 4(2x^2 + 2t^2 + 7xt)\, z^4 + 4(x^4 - x^3t - x^2t^2 - xt^3 + t^4)\, z^2 - \\ - x^2t^2(x - t)^2 = 0. \qquad (6,5)$$

a hranice oblasti σ se promítá do přímky $z = 0$.

Abychom určili přesně, která je oblast ohraničená těmito dvěma hranicemi, promítneme bod patřící do σ se souřadnicemi $x = y = t = 1$, $z = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ do souřadnicové roviny $y = 0$. Tento se nachází v oblasti určené nerovnostmi:

$$z > 0,\ 4z^6 + 4(2x^2 + 2t^2 + 7xt)\,x^4 + 4(x^4 - x^3t - x^2t^2 - xt^3 + t^4)\,z^2 - \\ - x^2t^2(x - t)^2 < 0.$$

Musíme ještě podotknout, že horní část hranice dává také řešení, protože je průmětem křivky D, která náleží do σ. Dolní ale nedává, protože je průmětem hranice σ. Takto jsme obdrželi konečně, že k oblasti σ'' je nutno ještě připojiti její horní část hranice.

Tedy všem bodům ze σ'' odpovídají dvě hodnoty y vyjímaje body náležející do D'' a splňující rovnici.

Tak dostáváme výsledek: Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, b, ϱ jsou:

$$\varrho > 0,\ 4\varrho^6 + 4(2a^2 + 2b^2 + 7ab)\,\varrho^4 + 4(a^4 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 + b^4)\,\varrho^2 - \\ - a^2b^2(a - b)^2 \leqq 0.$$

Všem hodnotám a, b, ϱ, pro které platí znamení nerovnosti, odpovídají dvě řešení a jedno řešení, platí-li znamení rovnosti.

Lehko nahlédneme, že křivka D'' se nachází v oblasti určené nerovnostmi

$$2z - x < 0,\ 2z - t < 0,\ z > 0.$$

Toto nám dává známé *nutné*, ale ne postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, b, ϱ:

$$2\varrho - a < 0,\ 2\varrho - b < 0.$$

Sledujíce tuto methodu obdržíme následující výsledky, známé z elementární geometrie:

7. Nutná a postačující podmínka, aby existoval trojúhelník s danými a, b, v_a, je

$$b \geqq v_a > 0. \tag{7,1}$$

Při tom, když platí znamení nerovnosti, obdržíme dvě řešení a při rovnosti jedno.

8. Nutné a postačující podmínky, aby existoval trojúhelník s danými a, b, v_c jsou

$$a \geqq v_c,\ b \geqq v_c. \tag{8,1}$$

Musíme vyloučiti případ, že jsou splněny obě rovnice. Když jsou splněné obě nerovnosti, máme dvě řešení a když je splněna jedna rovnice a jedna nerovnost, obdržíme jedno řešení.

9. Nutné a postačující podmínky, aby existoval trojúhelník s danými a, b, r jsou:

$$a \leqq 2r,\ b \leqq 2r, \tag{9,1}$$

když vyloučíme případ, že jsou splněny obě rovnice. Když jsou splněny obě nerovnosti, obdržíme dvě řešení a když je splněna jedna rovnice a jedna nerovnost, máme jedno řešení.

10. Když trojúhelník je dán jednou stranou a dvěma jinými úsečkami, pak z rovnic, které existují mezi třemi stranami a každou z těchto úseček, eliminujeme jednu ze dvou stran neb některou jejich kombinaci; takto určíme rovnici, která obsahuje dané dvě úsečky a ještě jednu stranu, neb některou kombinaci dvou stran.

Na příklad probereme tento případ:

Určiti nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_a, u_β.

Z rovnic

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$
$$u_\beta^2(a + c)^2 = ac[(a + c)^2 - b^2]$$

eliminujeme b a obdržíme rovnici mezi a, c, t_a, u_β

$$4t_a^2 ac - 2(a + c)^2 (ac - u_\beta^2) - ac(2c^2 - a^2) = 0. \tag{10,1}$$

Užijeme také známých nerovností ze (4,1):

$$a + 2c - 2t_a > 0,\ a - 2c + 2t_a > 0,\ - a + 2c + 2t_a > 0. \tag{10,2}$$

Když považujeme a, c, u_β, t_a za homogenní pravoúhlé souřadnice v euklidovském trojrozměrném prostoru, kladouce $a = x$, $c = y$, $u_\beta = z$ a $t_a = t$, obdržíme z rovnice rovnici plochy Ω

$$f \equiv 4t^2xy - 2(x + y)^2 (xy - z^2) - (2y^2 - x^2)\, xy = 0, \tag{10,1$'$}$$

a z (10,2) nerovnosti určující σ' v souřadnicové rovině $z = 0$:

$$x + 2y - 2t > 0,\ x - 2y + 2t > 0,\ - x + 2y + 2t > 0. \tag{10,2$'$}$$

Hranice oblasti σ' jsou části přímek

$$x + 2y - 2t = 0,\ x - 2y + 2t = 0,\ - x + 2y + 2t = 0, \tag{10,3}$$

nacházející se v prvém kvadrantu roviny $z = 0$; mimo to do hranice oblasti σ na ploše Ω patří křivky, ve které je protata Ω rovinami

$$x + 2y - 2t = 0,\ x - 2y + 2t = 0,\ - x + 2y + 2t = 0.$$

Při tom musíme podotknouti, že když promítáme σ do roviny $t = 0$, obdržíme podmínky dané v případě 3.

Přímka rovnoběžná s osou y protíná σ v jednom bodě. Vskutku rovnice (10,1)$'$ napsaná takto:

$$4xy^3 + (4x^2 - z^2)\, y^2 - x(4t^2 + 2z^2 - x^2)\, y - 2x^2z^2 = 0$$

má jen jednu změnu znamení, neboť z případu 3 vyplývá, že $4x^2 - z^2 > 0$, což platí i pro přímky protínající hranici oblasti σ.

To ukazuje, že křivka dotyku D plochy Ω s válcem δ'' o tvořících přímkách rovnoběžných s osou y nemůže náležet do σ.

Toto můžeme dokázati přímo. Křivka D je určena rovnicí $(10,1)'$ a rovnicí

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 4t^2x - 4(x + y)(xy - z^2) - 4x^2y - 8xy^2 - x^3 = 0. \quad (10,4)$$

Průmět D' křivky D do souřadnicové roviny $z = 0$ obdržíme, když z $(10,1)'$ a $(10,4)$ eliminujeme z, což dává

$$4(y - x)t^2 + x^3 + 7x^2y + 12xy^2 + 4y^3 = 0,$$

neboli

$$[4t^2 - (x + 2y)^2](y - x) + 4x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = 0.$$

Z první rovnice vyplývá, že $y - x < 0$, ale potom z druhé máme $4t^2 - (x + 2y)^2 > 0$ nebo $2t - (x + 2y) > 0$, což ukazuje, že křivka D' se nenachází v oblasti σ' a to znamená, že D nenáleží do σ.

Hranici σ'' tedy obdržíme, když promítneme orthogonálně hranici oblasti σ do souřadnicové roviny $y = 0$; takto obdržíme

$$z = 0 \text{ při } 2y = 2t - x,$$

$$z = 2x\frac{x - 2t}{3x - 2t} \text{ při } 2y = x - 2t,$$

$$z = 2x\frac{x + 2t}{3x + 2t} \text{ při } 2y = x + 2t.$$

Užijeme bodu $x = y = t = 1$ $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{q}}$ z σ a určíme, že σ'' je oblast určená nerovnostmi:

$$z > 0,\ z > 2x\frac{x - 2t}{3x - 2t},\ z < 2x\frac{x + 2t}{3x + 2t}. \quad (10,6)$$

Při tom hranice oblasti σ'' nenáležejí do ní, neboť jsou průmětem hranice oblasti σ. Když se vrátíme zase k začátečnímu označení, obdržíme:

Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_a, u_β jsou

$$2a\frac{a + 2t_a}{3a + 2t_a} > u_\beta,\ u_\beta > 2a\frac{a - 2t_a}{3a - 2t_a} \text{ při } a - 2t_a \geqq 0,$$

$$u_\beta > 0 \text{ při } a - 2t_a < 0.$$

Při těchto podmínkách existuje vždy jen jediné řešení.

Stejným způsobem dostaneme tyto výsledky:

11. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_a, t_b jsou

$$3a + 2t_a - 4t_b > 0,\ 3a - 2t_a + 4t_b > 0,\ -3a + 2t_a + 4t_b > 0; \quad (11,1)$$

při těchto podmínkách máme jen jediné řešení.

12. Nutné a postačující podmínky pro existenci jediného trojúhelníku s danými a, t_b, t_c jsou

$$3a + 2t_b - 2t_c > 0,\ 3a - 2t_b + 2t_c > 0,\ -3a + 2t_b + 2t_c > 0. \quad (12,1)$$

13. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, v_a, v_b jsou

$$a \geqq v_b, \quad (13,1)$$

kde při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnosti jedno.

14. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, v_b, v_c jsou

$$a \geqq v_b,\ a \geqq v_c, \quad (14,1)$$

při čemž je třeba vyloučiti případ, ve kterém jsou splněny současně obě rovnice. Jestliže jsou splněny obě nerovnosti, obdržíme dvě řešení a když je splněna pouze jedna z rovnic, jedno řešení.

15. Když eliminujeme c z rovnic

$$a^2b^2c^2 = r^2[(a + b)^2 - c^2]\,[c^2 - (a - b)^2]$$

a

$$c^2 = 2t_a^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - b^2,$$

obdržíme rovnici

$$a^2b^2(2t_a^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - b^2) = 4r^2[(\tfrac{1}{2}a + b)^2 - t_a^2]\,[t_a^2 - (\tfrac{1}{2}a - b)^2]. \quad (15,1)$$

Volíme $\frac{1}{2}a$, b, r, t_a resp. za homogenní pravoúhlé souřadnice x, y, z, t. Obdržíme z (15,1) rovnici plochy Ω

$$z^2[(x + t)^2 - y^2]\,[y^2 - (x - t)^2] - x^2y^2[2t^2 + 2x^2 - y^2] = 0. \quad (15,1)'$$

Oblast σ' v rovině $z = 0$ je určena nerovnostmi

$$x + y - t > 0,\ x - y + t > 0,\ -x + y + t > 0, \quad (15,2)$$

které obdržíme z případu 4.

Přímky rovnoběžné s osou z mající společné body se σ' protínají naši plochu Ω v jednom bodě. Lehko se nahlédne, že přímky rovnoběžné s osou y protínají plochu Ω ve dvou bodech prvého oktantu, s výjimkou přímky $x = z = t$, která se nalézá na ploše Ω. Část plochy Ω nacházející se v prismatické ploše, mající za stěny roviny rovnoběžné k ose z obsahující hranice oblasti σ', je oblast σ. Křivka dotyku D plochy Ω s válcem

δ'' o tvořících přímkách rovnoběžných s osou y je určena rovnicí (15,1)' a rovnicí

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 4y(z^2 - x^2)(y^2 - x^2 - t^2) = 0;$$

když vyloučíme přímku $z = x = t$, křivka dotyku D náleží do σ, protože její průmět $D' \equiv y^2 - x^2 - t^2 = 0$ náleží do σ', při tom body dotyku s δ'' na Ω jsou z druhé řady, takže projekce D'' křivky D do roviny $y = 0$ bude hranice oblasti σ'', což znamená, že obdržíme

$$2zt = x^2 + t^2$$

jako hranicí σ'', když vyloučíme ze σ přímku $x = t$, v kterémžto případě máme pouze bod $x = t = z$. Při tom, protože D náleží do σ, obdržíme řešení i pro hranici oblasti σ''. Když užijeme bodu $x = 2$, $y = 2$, $t = 1$, $z = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$, dostaneme pro oblast σ'' nerovnosti

$$2zt > x^2 + t^2 \text{ a } x \neq t.$$

Máme výsledek:

Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_a, r jsou

$$r \geqq \frac{a^2 + 4t_a^2}{8t_a} \text{ při } 2t_a \neq a, \text{ nebo } a = 2r = 2t_a$$

při čemž, když je splněna nerovnost, máme dvě řešení a při rovnosti máme jedno řešení. V případě $a = 2r = 2t_a$ máme nekonečné množství řešení.

Podobně obdržíme i následující výsledky:

16. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_a, v_a jsou:

$$t_a \geqq v_a;$$

zde při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnosti jedno.

17. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_a, v_b jsou:

$$a \geqq v_b, \ 2t_a \geqq v_b,$$

kde je třeba vyloučiti případ, že platí obě znamení rovnosti. Když jsou splněny obě nerovnosti, máme dvě řešení a v opačném případě, to jest, je-li splněna jedna z rovnic, jedno řešení.

18. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_b, v_a jsou:

$$2t_b \geqq v_a$$

kde při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnici jedno.

19. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_b, v_c jsou:

$$a \geqq v_c, \quad 2t_b \geqq v_c$$

při nerovnosti máme dvě řešení a při jedné z rovnic jedno. Vyloučit musíme případ, že platí obě znamení rovnosti.

20. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_c, v_c jsou:

$$a \geqq v_c, \quad v_c \leqq t_c.$$

Je třeba vyloučiti případ, že jsou splněny obě rovnosti. Při nerovnosti máme dvě řešení, při jedné rovnici jedno.

21. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_b, r jsou:

$$a \leqq 2r, \quad \left|\frac{a^2 - 2t_b^2}{t_b}\right| \leqq 2r.$$

Při nerovnostech máme 2 řešení a při každé z rovnic jedno.

22. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, v_b, u_β jsou

$$a \geqq v_b, \quad u_\beta \geqq v_b,$$

kde je třeba vyloučit případ, že platí obě znamení rovnosti. V případě dvou nerovností máme dvě řešení a při jedné z rovnic jedno.

23. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, v_b, u_γ jsou:

$$a \geqq v_b, \quad u_\gamma^2 < 2a^2 + (\sqrt{a^2 - v_b^2})\, 2a;$$

při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnici jedno.

24. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, v_b, r jsou:

$$2r \geqq a, \quad v_b \leqq a$$

i zde je třeba vyloučit případ, že současně platí znamení rovnosti. Při dvou nerovnostech máme dvě řešení, jinak při $r = \dfrac{a^2}{2v_b}$ jedno řešení.

25. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, v_b, ϱ jsou

$$a \geqq v_b > 2\varrho,$$

kde při nerovnosti máme dvě řešení a při první rovnosti jedno.

26. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_b, u_β jsou

$$0 < u_\beta < a\,\frac{2t_b - a}{t_b} \quad \text{při } t_b - a \geqq 0,$$

při čemž máme jedno řešení, nebo

$$u_\beta \leqq t_b \text{ při } t_b - a \leqq 0,$$

kde při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnosti jedno.

Z rovnice

$$4v_a^2 a^2 = [(b + c)^2 - a^2]\,[(b + c)^2 - 4t_a^2],$$

z **16** a z nutných podmínek pro existenci trojúhelníku s danými $a, b + c, t_a$, t. j. $a < b + c$, $b + c > 2t_a$ obdržíme následující výsledky:

27. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými $a, b + c, t_a$ jsou:

$$a^2 < (b + c)^2,\ 4t^2 < (b + c)^2,\ (b + c)^2 \leqq a^2 + 4t_a^2,$$

kde při rovnosti máme jedno řešení a při nerovnosti dvě.

28. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými $a, b + c, v_a$ jsou

$$(b + c)^2 \geqq a^2 + 4v_a^2,$$

kde při rovnosti máme jedno řešení, při nerovnosti dvě řešení.

Stejnou cestou obdržíme i tyto výsledky:

29. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými $a, b + c, u_\alpha$ jsou:

$$(b + c)^2 \geqq a^2 + 4u_\alpha^2,\ u_\alpha > \frac{(b + c)^2 - a^2}{4(b + c)},$$

kde při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnosti jedno.

30. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými $a, b + c, r$ jsou:

$$4r \geqq \frac{(b + c)^2}{\sqrt{(b + c)^2 - a^2}} \text{ při } 2r \geqq a,$$

kde při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnosti jedno.

31. Nutné a postačující podmínky k existenci trojúhelníku s danými $a, b + c, \varrho$ jsou:

$$a < b + c \leqq a\frac{4\varrho^2 + a^2}{a^2 - 4\varrho^2} \text{ při } a > 2\varrho;$$

v tomto případě při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnosti jedno.

32. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, u_α, t_a jsou:

$$t_a \geqq u_\alpha > \frac{4t_a^2 - a^2}{4t_a};$$

když je splněna nerovnost, máme dvě řešení, a při rovnosti jedno.

33. Nutné a postačující podmínky existence trojúhelníku s danými a, t_a, ϱ jsou:

$$\varrho \leqq \frac{a}{4t_a}\left(\sqrt{a^2 + 4t_a^2} - a\right)$$

při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnici jedno.

34. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, v_a, u_α jsou:

$$v_a \leqq u_\alpha,$$

při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnosti jedno.

35. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, v_a, r jsou

$$2r \geqq a, \quad 2r \geqq \frac{a^2 + 4v_a^2}{4v_a},$$

kde při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnosti jedno.

36. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, v_a, ϱ jsou:

$$v_a \geqq \frac{2a^2\varrho}{a^2 - 4\varrho^2} \text{ při } a > 2\varrho;$$

v tomto případě při rovnosti máme jedno řešení a při nerovnosti dvě.

37. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, u_α, r jsou: Při

$$a \leqq 2u_\alpha, \quad 8u_\alpha r \geqq a^2 + 4u_\alpha^2$$

máme jen jedno řešení a při $a \geqq 2u_\alpha$, $2r > a$, $8u_\alpha r \leqq a^2 + 4u_\alpha^2$ máme dvě řešení a jedno při $8u_\alpha r > a^2 + 4u_\alpha^2$, $a \geqq 2u_\alpha$, $2r > a$.

38. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, u_α, ϱ jsou:

$$u_\alpha \geqq a^2 \frac{2\varrho}{a^2 - 4\varrho^2} \quad a > 2\varrho;$$

při nerovnosti máme dvě řešení a při rovnosti jedno.

39. Když eliminujeme bc z rovnic

$$2\varrho r = \frac{abc}{a + b + c}$$

$$r^2 = \frac{a^2b^2c^2}{[(b + c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b - c)^2]},$$

dostaneme rovnici

$$a(b + c)^2 - 2(a^2 + 4\varrho r)(b + c) + 8a\varrho r + a^3 + 4a\varrho^2 = 0,$$

neboli

$$[a(b + c) - a^2 - 4\varrho r - 2\varrho\sqrt{4r^2 - a^2}]\,[a(b + c) - a^2 - 4\varrho r + \\ + 2\varrho\sqrt{4r^2 - a^2}] = 0.$$

Z této rovnice, když vezmeme $b + c$, r, ϱ a respektive za homogenní souřadnice x, y, z, t obdržíme rovnici plochy Ω

$$[tx - t^2 - 4yz - 2z\sqrt{4y^2 - t^2}]\,[tx - t^2 - 4yz + 2z\sqrt{4y^2 - t^2}] = 0, \quad (39,1)$$

což ukazuje, že plocha Ω se rozpadá na dvě plochy vyjádřené rovnicemi:

$$tx - t^2 - 4yz - 2z\sqrt{4y^2 - t^2} = 0, \quad (39,2)$$

$$tx - t^2 - 4yz + 2z\sqrt{4y^2 - t^2} = 0. \quad (39,3)$$

Z podmínek ve **29.** a **30.** obdržíme oblasti σ' a σ''' určené v souřadnicových rovinách $z = 0$, $y = 0$:

$$4y \geqq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - t^2}}, \; 2y > t, \quad (39,4)$$

$$t < x \leqq t\,\frac{t^2 + 4z^2}{t^2 - 4z^2}; \; t > 2z. \quad (39,5)$$

Válcové plochy η' a η''' proložené hranicemi oblastí σ' a σ''' se protínají na ploše s rovnicí (39,2). Lehko se pozná, že plocha (39,3) vůbec se neprotíná s η'''; to znamená, že na ní neleží žádná část σ. Z toho plyne, že σ leží na první ploše. Promítneme-li σ do souřadnicové roviny $x = 0$, to jest ze (39,2) a z jedné z rovnic (39,4) neb (39,5) eliminujeme x, obdržíme:

$$2y > t, \; t^2\,\frac{4z^2 + t^2}{t^2 - 4z^2} \geqq t^2 + 4zy + 2z\sqrt{4y^2 - t^2}.$$

Přitom musíme podotknouti, že každá přímka rovnoběžná s osou x protíná σ jen v jednom bodě. Tak dostáváme:

Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, ϱ, r jsou

$$\frac{4a^2\varrho}{a^2 - 4\varrho^2} \geqq 2r + \sqrt{4r^2 - a^2} \text{ při } a > 2\varrho, \; 2r \geqq a.$$

Přitom máme jedno řešení.

40. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_c, u_β jsou:

$$u_\beta > 4a\,\frac{a - t_c}{3a - 2t_c} \text{ při } a - t_c \geqq 0$$

$$u_\beta > 0 \text{ při } a - t_c \leqq 0$$

$$u_\beta < 4a\frac{a + t_c}{3a + 2t_c}.$$

Při těchto podmínkách existuje jen jedno řešení.

41. Nutné a postačující podmínky pro existenci trojúhelníku s danými a, t_b, u_α jsou:

$$u_\alpha > 4(a - t_b)\frac{a - 2t_b}{3a - 4t_b} \text{ při } a - 2t_b > 0,$$

$$u_\alpha > 0 \text{ při } a - 2t_b \leqq 0,\ a - t_b \geqq 0,$$

$$u_\alpha > 4(t_b - a)\frac{2t_b - a}{4t_b - 3a} \text{ při } a - t_b < 0,$$

$$u_\alpha < 4(a + t_b)\frac{a + 2t_b}{3a + 4t_b}.$$

Za těchto podmínek existuje jen jedno řešení.