Miroslav Fiedler

Řešení jedné úlohy prof. E. Čecha

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 1, 65--75

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117018`

ŘEŠENÍ JEDNÉ ÚLOHY PROF. E. ČECHA

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 1. srpna 1951.)

519.5

Prof. *E. Čech* zapsal do Knihy problémů matematické obce pražské tuto úlohu:

Charakterisovat množinu nulových bodů funkce

$$\sum_{r=1}^{n} |a_r x + b_r y + c_r| + ax + by + c,$$

kde a_r, b_r, c_r a, b, c jsou reálná čísla!

Abychom mohli řešení přehledněji formulovat, zavedeme následující definice:

Definice 1. Množina bodů M v euklidovské rovině (x, y) (značíme ji v dalším E_2) se nazývá polorovinou, existují-li reálná čísla a, b, c tak, že

1. není současně $a = b = 0$,
2. bod (x, y) je v M tehdy a jen tehdy, je-li $ax + by + c \geqq 0$.

Definice 2. Množina bodů v E_2 se nazývá K-množinou, lze-li ji vyjádřit jako průnik konečného počtu polorovin nebo je-li celou E_2.

Poznámka. Polorovina v def. 1. je uzavřenou polorovinou v obvyklém smyslu. Obdobně lze definovat (uzavřenou) úsečku a polopřímku.

Platí zřejmě *věta:*

Průnik konečně mnoha K-množin je opět K-množina.

Definice 3. K-množinu F nazveme neohraničenou, existuje-li polopřímka, jež leží celá v F. Neexistuje-li taková polopřímka, nazveme F ohraničenou. Existuje-li polopřímka α v F a platí-li, že každá polopřímka, ležící v F, je s α souhlasně rovnoběžná (včetně případu souhlasných polopřímek v téže přímce), nazveme F jednosměrně neohraničenou K-množinou.

Definice 4a. Útvar, složený z konečného počtu úseček, nazveme jednoduchým řetězem, existuje-li množina bodů $P_1, P_2, \ldots, P_n$ $(n > 1)$ tak, že 1. ty úsečky jsou $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$, 2. žádné tři sousední body P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, $i = 2, 3, \ldots, n - 1$, neleží v přímce, 3. žádné dvě nesousední úsečky (t. j. $\overline{P_iP_{i+1}}, \overline{P_jP_{j+1}}$, $|i - j| > 1$, $i, j = 1, \ldots, n - 1$) se neprotínají.

Definice 4b. Útvar složený z konečného počtu n úseček ($n \geqq 3$), nazveme uzavřeným řetězem, existuje-li množina bodů $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($P_{n+1} = P_1$, $P_{n+2} = P_2$) tak, že 1. ty úsečky jsou

$$\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1},$$

2. žádné tři body P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, $i = 2, 3, \ldots, n+1$, neleží v přímce,

3. žádné dvě nesousední (ve zřejmém smyslu) úsečky se neprotínají.

Definice 4c. Útvar složený ze dvou disjunktních polopřímek a jednoduchého řetězu nazveme úplným n-řetězem, je-li počet úseček řetězu roven číslu ($n - 2$) a platí-li

1. počátky obou polopřímek splývají s počátkem P_1 a koncem P_{n-1} řetězu,

2. toto jsou jediné průsečíky vždy jedné z polopřímek a řetězu,

3. počáteční (t. j. s krajovým bodem P_1) a koncová (t. j. s krajovým bodem P_{n-1}) úsečka neleží v přímce s prvou resp. druhou polopřímkou. Přitom útvar, složený ze dvou polopřímek (ne v přímce) se společným počátkem, budeme považovat též za úplný dvojřetěz.

Budiž nyní F K-množinou, jež není celá E_2; nechť jedno vyjádření F jakožto průniku konečně mnoha (m) polorovin je $F = \bigcap_{i=1}^{m} R_i$, kde R_i jsou poloroviny. Označme $\mathfrak{M}_F$ množinu čísel m, t. j. počtu polorovin v různých vyjádřeních množiny F. $\mathfrak{M}_F$ je neprázdná, obsahuje jen přirozená čísla (tedy zdola ohraničená nulou), a má tedy nejmenší prvek, označme jej n.

Má-li F vnitřní bod, t. j. není-li F částí přímky, pak pro toto n platí věta (*Reidemeister*: Topologie der Polyeder, str. 31):

Vyjádření F jakožto průniku n polorovin je až na pořadí faktorů jednoznačné.

Označíme-li jako obvykle $H(M)$ hranici množiny M (v E_2), platí dále:

Při rozkladu podle známého vzorce

$$H(F) = H(\bigcap_{i=1}^{n} R_i) = H(R_1) \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n \cup R_1 \cap H(R_2) \cap \ldots \cap R_n \cup \ldots$$
$$\ldots \cup R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap H(R_n)$$

obsahuje každý ze sčítanců alespoň dva různé body.

Poněvadž je každý sčítanec průnik přímky $H(R_i)$ s konečným počtem polorovin, je podle této věty hranice F složená z právě n úseček resp. polopřímek nebo přímek, jež nazveme stranami F*.) Tím je opodstatněna

*) Tyto strany leží v navzájem různých přímkách $H(R_i)$: Kdyby totiž $H(R_i) = H(R_j)$, $i \neq j$, pak buď $R_i = R_j$ ve sporu s nejmenším n (R_j lze škrtnout v součinu), nebo je celá F v přímce $H(R_i)$ ve sporu s existencí vnitřního bodu F.

definice 5. K-množinu F s vnitřním bodem, jež není celou rovinou a jíž tedy náleží přirozené číslo n sestrojené jako dříve, nazveme n-stranem.

Uvádíme teď bez důkazu klasifikaci K-množin a jejich hranic, k níž směřovaly všechny úvahy této předběžné části:

K-množiny jsou:

A, prázdná množina (hranice prázdná),

B, jednobodová množina (hranice táž množina),

C_1, úsečka (hranice táž množina)

C_2, polopřímka (hranice táž množina),

C_3, přímka (hranice táž množina),

D_1, ohraničený n-straň, $n \geqq 3$ (hranice uzavřený n-řetěz),

D_2, neohraničený n-stran, $n \geqq 2$, s výjimkou násl. D_3 (hranice úplný n-řetěz),

D_3, pás mezi dvěma rovnoběžkami (hranice dvě rovnoběžky),

D_4, polorovina (hranice přímka),

D_5, rovina (hranice prázdná).

Poznámka. D_2 lze ještě rozdělit na jednosměrně neohraničený n-stran ($n \geqq 3$), pro který jsou obě polopřímky v hranici souhlasně rovnoběžné (D_2a) a nikoliv jednosměrně neohraničený n-stran ($n \geqq 2$) (obě polopřímky nejsou souhlasně rovnoběžné, D_2b).

Nyní již můžeme formulovat řešení dané úlohy:

Řešení. Množina nulových bodů dané funkce je buď K-množina nebo hranice K-množiny s vnitřním bodem (typů D_1—D_4). *Obráceně jest možno každou K-množinu nebo hranici K-množiny, s výjimkou hranic ohraničeného trojstranu a jednosměrně neohraničeného trojstranu, pro něž to nelze nikdy, vyjádřit ve shora uvedeném tvaru.*

Poznámka. Obecně (t. j. platí-li jistá nerovnost) při pevném $n \geqq 1$ je tato množina nulových bodů hranicí K-množiny s vnitřním bodem.

Důkaz. Nejprve odvodíme první část řešení.

Nechť je tedy dána funkce $f \equiv \sum_{r=1}^{n} |a_r x + b_r y + c_r| + ax + by + c$ (připouštíme i $n = 0$, pak Σ odpadá); pak lze psát f v redukovaném tvaru $f \equiv \sum_{k=1}^{\bar{n}} |\bar{a}_k x + \bar{b}_k y + \bar{c}_k| + \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}$, pro který platí:

1. $(\bar{a}_k, \bar{b}_k) \neq 0$ (t. j. není současně $\bar{a}_k = \bar{b}_k = 0$) pro $k = 1, \ldots, \bar{n}$,

2. matice $\left\| \begin{matrix} \bar{a}_i, & \bar{b}_i, & \bar{c}_i \\ \bar{a}_j, & \bar{b}_j, & \bar{c}_j \end{matrix} \right\|$ má hodnost 2 pro $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, \bar{n}$.

Je-li totiž v původním vyjádření pro některý index s: $a_s = b_s = 0$, je $|a_s x + b_s y + c_s| = |c_s|$ a tuto absolutní hodnotu lze sloučit s c. Odtud 1.

Je-li pro některé dva různé indexy i, j v původním tvaru $a_i = \varrho a_j$, $b_i = \varrho b_j$, $c_i = \varrho c_j$, lze psát místo

$$|a_i x + b_i y + c_i| + |a_j x + b_j y + c_j|$$

výraz

$$|(1 + |\varrho|)\, a_j x + (1 + |\varrho|)\, b_j y + (1 + |\varrho|\,)c_j|.$$

Odtud 2.

Označme pro redukovaný tvar výrazy $a_i x + b_i y + c_i$ (píšeme opět bez pruhu) stručně p_i, $ax + by + c$ označme p. Je nyní $p_i = 0$ vždy rovnice přímky a tyto přímky jsou pro různé indexy navzájem různé.

Dokážeme teď tři pomocné věty:

Pomocná věta 1. Nechť P_1, P_2 jsou dva různé body roviny, (P_1, P_2) množina vnitřních bodů (v přímce) úsečky $\overline{P_1 P_2}$, $P \in (P_1, P_2)$ libovolný. Pak platí pro naši funkci f tyto implikace:

1. $f(P_1) < 0$, $f(P_2) \leqq 0 \Rightarrow f(P) < 0$;

2. $f(P_1) = f(P_2) = 0 \Rightarrow f(P)$ buď stále < 0 nebo stále $f(P) = 0$ podle toho, zda alespoň jedna nebo žádná p_i protíná (P_1, P_2) („protíná“ ve smyslu „má společný právě jeden bod“).

Důkaz. Poněvadž $P \in (P_1, P_2)$, existuje λ, $0 < \lambda < 1$, že $P = \lambda P_1 + (1 - \lambda)\, P_2$. Je pak

$$f(P) = \sum_{k=1}^{n} |p_k(\lambda P_1 + (1 - \lambda)\, P_2)| + p(\lambda P_1 + (1 - \lambda)\, P_2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\lambda p_k(P_1) + (1 - \lambda)\, p_k(P_2)| + \lambda p(P_1) + (1 - \lambda)\, p(P_2) \leqq$$

$$\leqq \lambda\{\sum_{k=1}^{n} |p_k(P_1)| + p(P_1)\} + (1 - \lambda)\{\sum_{k=1}^{n} |p_k(P_2)| + p(P_2)\} =$$

$$= \lambda f(P_1) + (1 - \lambda)\, f(P_2).$$

Přitom znaménko rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li pro $i = 1, \ldots, n$, $p_i(P_1) \cdot p_i(P_2) \geqq 0$, t. j. leží-li P_1 i P_2 vždy v téže polorovině dle p_i. Odtud pomocná věta 1.

Pomocná věta 2. Množina bodů P, pro něž je $f(P) \leqq 0$, je K-množina.

Důkaz provedeme úplnou indukcí přes n.

Pro $n = 0$ je $f \equiv p$, hledaná množina (t. j. $p \leqq 0$) je:

pro $p \equiv c$ (t. j. $a = b = 0$),
$c > 0$ množina prázdná,
$c \leqq 0$ celá rovina,
pro $(a, b) \neq 0$ polorovina,

věta tedy platí.

Předpokládejme, že pomocná věta 2 platí pro všechny redukované tvary s počtem absolutních hodnot menším než přirozené n.

Budiž nyní $f \equiv \sum_{k=1}^{n} |p_k| + p$ redukovaný tvar. Označme množiny $E(f \leqq 0) = F$, $E(f_1 \leqq 0) = F_1$, $E(f_2 \leqq 0) = F_2$, kde

$$f_1 \equiv \sum_{k=1}^{n-1} |p_k| + p_n + p, \; f_2 \equiv \sum_{k=1}^{n-1} |p_k| - p_n + p.$$

Dokážeme, že $F = F_1 \cap F_2$. Především $F_1 \cap F_2 \subset F$. Je-li totiž bod $P \in F_1$, $P \in F_2$, lze předpokládat $p_n(P) \geqq 0$ (jinak zaměníme $p_n \longleftrightarrow -p'_n$ a $F_1 \longleftrightarrow F_2$). Je pak $f(P) = f_1(P) \leqq 0$, $P \in F$. Nechť naopak $P \in F$, pak lze opět předpokládat $p_n(P) \geqq 0$, takže $f_1(P) = f(P) \leqq 0$, $P \in F_1$. Kdyby P non $\in F_2$, bylo by $f_2(P) > 0$, $f_1(P) - f_2(P) < 0$, t. j. $2p_n(P) < 0$, což je spor, $F = F_1 \cap F_2$. Podle indukčního předpokladu (F_1 i F_2 jsou zřejmě také v redukovaném tvaru) jsou F_1 i F_2 K-množiny, tedy také F je K-množina.

Pomocná věta 3. Je-li množina bodů P, pro něž je $f(P) < 0$, neprázdná, pak množina nulových bodů f je právě množina hraničních bodů K-množiny, vytvořené množinou $F = E(f \leqq 0)$.

Důkaz. Budiž P_0 bod, pro nějž je $F(P_0) < 0$, P bod, pro nějž je $f(P) = 0$. Takový bod P vždy existuje, není-li $f \equiv$ const. < 0 (pak je F celá rovina, hranice je prázdná, množina nulových bodů také a věta platí). Neboť potom existuje bod Q, že $f(Q) > 0$, a ze spojitosti f plyne (dokonce na úsečce $\overline{P_0Q}$) existence alespoň jednoho takového bodu P.

Podle 1. pomocné věty jsou všechny body úsečky $\overline{PP_0}$ v F. Kdyby pro nějaký bod $P_1 \neq P$, který je na té polopřímce s počátkem P v přímce P_0P, na níž neleží P_0, bylo $f(P_1) \leqq 0$, pak by bod P byl v (P_0, P_1) a podle 1. pomocné věty by $f(P) < 0$ proti předpokladu. Tedy v každém okolí bodu P jsou i body z $E_2 - F$, t. j. bod P je hraničním bodem F.

Z těchto pomocných vět plyne:

Je-li množina $E(f < 0)$ prázdná, je hledaná množina nulových bodů $E(f = 0)$ K-množina (neboť je rovna množině $E(f \leqq 0)$, pom. věta 2). Je-li množina $E(f < 0)$ neprázdná, je hledaná množina hranicí K-množiny s vnitřním bodem (totiž bod P, pro který je $f(P) < 0$, je vnitřním bodem množiny $E(f \leqq 0)$. Tím je dokázána první část řešení.

K důkazu druhé části stačí, abychom ukázali, že jednak každou tam popsanou množinu lze vyjádřit v uvedeném tvaru, jednak, že nelze obě výjimky v tom tvaru napsat.

Budiž tedy dána libovolná K-množina jakožto průnik $\bigcap_{i=r}^{n} R_i$. Celá rovina je popsána identitou $0 = 0$, předpokládejme tedy $n > 0$; nechť poloroviny $R_i = E(p_i \geqq 0)$! Pak je zřejmé, že nulové body funkce $f \equiv \sum_{i=1}^{n} |p_i| - \sum_{i=1}^{n} p_i$ jsou právě body dané K-množiny.

Nyní jde o vyjádření hranic typů D_1—D_4 uvedeným tvarem:

Budiž tedy dána hranice ohraničeného n-stranu, $n > 3$ (pro $n = 3$ dokážeme níže nemožnost vyjádření). Jak jsme uvedli dříve, je to uzavřený n-řetěz, t. j. existují body $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$ tak, že hledaná hranice je sjednocení úseček $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$. Přitom, jak plyne z počátečních úvah o K-množinách a jejich hranicích, body P_j, $j \neq i$, $i + 1$ ($j = 1, \ldots, n$), leží uvnitř právě jedné z polorovin podle přímky P_i, P_{i+1} ($i = 1, \ldots, n$, $P_{n+1} = P_1$). Označíme-li

$$\operatorname{sign} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon,$$

pak je

$$\operatorname{sign} \begin{vmatrix} x_i, & y_i, & 1 \\ x_j, & y_j, & 1 \\ x_k, & y_k, & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon$$

pro $i < j < k$, $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Dále pišme stručně

$$q_i = \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_i, & y_i, & 1 \\ x_{i+1}, & y_{i+1}, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_n, & y_n, & 1 \\ x_i, & y_i, & 1 \\ x_{i+1}, & y_{i+1}, & 1 \end{vmatrix},$$

$$i = 1, \ldots, n-2, \; q = \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_{n-1}, & y_{n-1}, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_n, & y_n, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_{n-1}, & y_{n-1}, & 1 \end{vmatrix}!$$

Přenechávám čtenáři, aby se přesvědčil, že funkce

$$f = |q| + \sum_{k=2}^{n-2} |q_{k-1} - q_k| - q_{n-2} + q - q_1$$

má nulové body právě v bodech úseček $\overline{P_iP_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n$. Tím je nalezeno vyjádření pro hranici množiny typu D_1.

Nechť je za druhé dána hranice jednosměrně neohraničeného n-stranu, $n > 3$ (pro $n = 3$ opět dokážeme nemožnost vyjádření v uvedeném tvaru)! Existují tedy body $P_1, \ldots, P_{n-1}$ a orientovaný směr $\vec{\alpha}$, tak, že ta hranice je složena z úseček $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-2}P_{n-1}}$ a dvou polopřímek s počátky P_1, P_{n-1} a směry $\vec{\alpha}$. Obsahuje-li polopřímka se směrem $\vec{\alpha}$ a počátkem $O(0, 0)$ bod (různý od počátku O) (x_n, y_n) a je-li

$$\operatorname{sign}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon,$$ pak pro $i < j < k$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, platí

$$\operatorname{sign}\begin{vmatrix} x_i, & y_i, & 1 \\ x_j, & y_j, & 1 \\ x_k, & y_k, & \sigma_k \end{vmatrix} = \varepsilon,$$

kde $\sigma_k = 1$ pro $k = 1, \ldots, n - 1$, $\sigma_n = 0$.

Analogicky k předchozímu pišme

$$q_i = \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_i, & y_i, & 1 \\ x_{i+1}, & y_{i+1}, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_n, & y_n, & 0 \\ x_i, & y_i, & 1 \\ x_{i+1}, & y_{i+1}, & 1 \end{vmatrix} \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n - 2,$$

$$q = \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_{n-1}, & y_{n-1}, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_n, & y_n, & 0 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_{n-1}, & y_{n-1}, & 1 \end{vmatrix}.$$

Poněvadž funkce $f = |q| + \sum\limits_{k=2}^{n-2} |q_{k-1} - q_k| - q_{n-2} + q - q_1$ opět vyhovuje požadavkům, je vyřešen případ hranice K-množiny typu D_2a.

Nechť je za třetí dána hranice n-stranu ($n \geq 2$) typu D_2b, t. j. úplný n-řetěz, splňující podmínky konvexity jedné z částí, na něž dělí rovinu! Existuje tedy $n - 1$ bodů $P_1, \ldots, P_{n-1}$ a orientované směry $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ tak, že ta hranice se skládá z úseček (pro $n = 2$ tato část odpadá) $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_{n-2}P_{n-1}}$ a dvou polopřímek s počátky P_1 resp. P_{n-1} a směry $\vec{\alpha}$ resp. $\vec{\beta}$.

Jsou-li opět směry $\vec{\alpha}$ resp. $\vec{\beta}$ dány body (x_0, y_0) resp. (x_n, y_n), různými od $O(0, 0)$ na polopřímkách s počátkem v $O(0, 0)$ a směry $\vec{\alpha}$ resp. $\vec{\beta}$, pak platí, definujeme-li $\sigma_0 = \sigma_n = 0$, $\sigma_k = 1$ pro $k = 1, \ldots, n - 1$ a $\varepsilon = -\operatorname{sign}\begin{vmatrix} x_0, & y_0 \\ x_n, & y_n \end{vmatrix}$:

$$\operatorname{sign}\begin{vmatrix} x_i, & y_i, & \sigma_i \\ x_j, & y_j, & 1 \\ x_k, & y_k, & \sigma_k \end{vmatrix} = \varepsilon \text{ pro } i < j < k,$$

$i, j, k = 0, 1, \ldots, n - 1, n$.

Budiž $(\bar{x}, \bar{y})$ libovolný pevný bod, pro nějž

$$\bar{x} = \lambda x_0 + (1 - \lambda)\, x_n, \ \bar{y} = \lambda y_0 + (1 - \lambda)\, y_n, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Označíme-li

$$q_i = \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_i, & y_i, & \sigma_i \\ x_{i+1}, & y_{i+1}, & \sigma_{i+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{x}, & \bar{y}, & 0 \\ x_i, & y_i, & \sigma_i \\ x_{i+1}, & y_{i+1}, & \sigma_{i+1} \end{vmatrix}, i = 0, \ldots, n-1,$$

pak se lze opět snadno přesvědčit, že funkce

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} |q_{i-1} - q_i| - q_0 - q_{n-1}$$

vyhovuje podmínkám.

Zbývají případy hranic K-množin typů D_3 a D_4:

Hranicí typu D_3 jsou dvě rovnoběžky; nechť jejich rovnice jsou $p_1 \equiv ax + by + c_1 = 0$, $p_2 \equiv ax + by + c_2 = 0$, $c_1 < c_2$! Pak funkce

$$f = \left| ax + by + \frac{c_1 + c_2}{2} \right| + \frac{c_1 - c_2}{2}$$

se anuluje právě na obou přímkách p_1, p_2. Případ hranice typu D_4, t. j. poloroviny, je triviální ($f = p$, kde p je rovnice hraniční přímky).

Aby byl důkaz řešení úplný, nutno ještě dokázat: Hranici trojstranů typů D_1 a D_2a nelze vyjádřit nulovými body funkce

$$f = \sum_{r=1}^{n} |p_i| + p.$$

Trojstrany typů D_1 a D_2a mají totiž vlastnost: Prochází-li přímka jejich vnitřním bodem, musí protnout aspoň jednu stranu v jejím vnitřním bodě (totiž trojřetěz v bodě různém od P_1, P_2 resp. P_3).

Předpokládejme na okamžik, že existuje vyjádření hranice trojstranu F nulovými body funkce $f = \sum_{i=1}^{n} |p_r| + p$, která budiž v redukovaném tvaru. Pak žádná přímka p_i nemůže procházet vnitřním bodem F, neboť pak by p_i protala některou stranu, obsahující i body P_1, P_2, v bodě P, že $P \in (P_1, P_2)$. Avšak z pomocné věty 1 plyne ($f(P_1) = f(P_2) = f(P) = 0$), že celá ta strana leží v p_i a tedy p_i nemůže obsahovat vnitřní bod F ve sporu s předpokladem.

Nechť nyní P_1, P_2 jsou dva vnitřní body z různých stran F. Pak žádná p_i neprotne (P_1, P_2), je $f(P_1) = f(P_2) = 0$, takže pro každý bod $P \in (P_1, P_2)$ je podle 1. pomocné věty $f(P) = 0$. To je však spor s předpokladem, že množina nulových bodů f je hranicí F. Tím je dokázáno celé řešení.

Závěrem odůvodníme poznámku za řešením.

Budiž dána funkce

$$f = \sum_{r=1}^{n} |a_r x + b_r y + c_r| + a_0 x + b_0 y + c_0, \; n \geq 1.$$

Potom platí:

1. Nechť $n = 1$. Je-li $\begin{vmatrix} a_0, & a_1 \\ b_0, & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, nulové body f tvoří hranici dvojstranu (typu D_2b).

2. Nechť $n > 1$; definujeme součiny*)

$$V_1 = \prod_{\substack{i,j,k=0 \\ i<j<k}}^{n} \begin{vmatrix} a_i, & a_j, & a_k \\ b_i, & b_j, & b_k \\ c_i, & c_j, & c_k \end{vmatrix}$$

$$V_2 = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j,\ \varepsilon_k^2=1 \\ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}}^{n} \begin{vmatrix} a_i, & a_j, & \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k + a_0 \\ b_i, & b_j, & \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k b_k + b_0 \\ c_i, & c_j, & \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k c_k + c_0 \end{vmatrix},$$

$$V_3 = \prod_{\substack{(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n') \\ (\varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_n'') \neq (\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n')}} \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k' a_k + a_0, & \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k'' a_k + a_0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k' b_k + b_0, & \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k'' b_k + b_0 \end{vmatrix},$$

kde ve V_1 nutno násobit přes všechny tříprvkové kombinace $0, 1, \ldots, n$, ve V_2 jednak přes všechny dvojprvkové kombinace $1, \ldots, n$, jednak přes všechny možné n-tice $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, kde ε_k nabývá hodnot $1, -1$, $k = 1, \ldots, n$; ve V_3 přes všechny možné dvojice n-tic $(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n')$, $(\varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_n'')$, kde $\varepsilon_k', \varepsilon_k'' = \pm 1$, $k = 1, \ldots, n$, pro něž $(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n') \neq (\varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_n'')$.

Je-li součin $V_1 V_2 V_3 \neq 0$, pak množina nulových bodů f je buď prázdná (a lze ji považovat za hranici K-množiny typu D_5), nebo je to hranice K-množiny typu D_1 nebo D_2b.

Důkaz. 1. Budiž $n = 1$, $\begin{vmatrix} a_0, & a_1 \\ b_0, & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, $f \equiv |p_1| + p_0$.

Snadno se ukáže, že $f = 0$ je hranicí průniku polorovin $p_1 - p_0 \geqq 0$ a $-p_1 - p_0 \geqq 0$, což jest K-množina typu D_2b (dvojstran).

2. Budiž $n > 1$, $V_1 V_2 V_3 \neq 0$. Dokážeme především: Je-li množina nulových bodů f $E(f = 0)$ neprázdná, je i množina bodů $E(f < 0)$ neprázdná. Předpokládejme opak: Nechť existuje bod P, $f(P) = 0$, nechť však stále $f \geqq 0$.

*) Pro $n = 2$ obsahuje ovšem V_1 jen jeden člen.

Jsou myslitelné tyto možnosti*):

1. bodem P neprochází žádná z p_i,
2. bodem P prochází jediná p_i,
3. bodem P procházejí právě dvě p_i, p_j,
4. bodem P procházejí alespoň tři z p_i, $i, j = 1, \ldots, n$.

Postupně vyloučíme všechny čtyři případy:

1. pro tento případ je určeno $\operatorname{sign} p_i(P) = \varepsilon_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, n$ a bod P leží uvnitř K-množiny $\varepsilon_i p_i \geqq 0$, $i = 1, \ldots, n$, kterou nazveme F. Nulové body f v F jsou právě ty body, pro něž je $q = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k p_k + p_0 = 0$. Toto je rovnice přímky; kdyby to totiž byla identita (vyhovuje jí totiž bod P), pak by faktor ve V_2

$$\begin{vmatrix} a_i, & a_j, & \Sigma\varepsilon_k a_k + a_0 \\ b_i, & b_j, & \Sigma\varepsilon_k b_k + b_0 \\ c_i, & c_j, & \Sigma\varepsilon_k c_k + c_0 \end{vmatrix}$$

byl roven nule, což není. Přímka $q = 0$ prochází bodem P, jehož celé okolí je v F. Existuje tedy v F bod Q, pro který je $q(Q) < 0$ (lineární nekonstantní funkce nenabývá minima ve vnitřním bodě oblasti), a tedy i $f(Q) = q(Q) < 0$ proti předpokladu.

2. Nechť $p_i(P) = 0$; definujeme $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_k = \operatorname{sign} p_k(P)$ pro $k \neq i$, $k = 1, \ldots, n$. Budiž opět F K-množina $\varepsilon_k p_k \geqq 0$, $k = 1, \ldots, n$, takže množina nulových bodů f v F vyhovuje rovnici $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k p_k + p_0 = 0$; to opět není identita, nýbrž rovnice přímky $q = 0$, jež prochází bodem P, který leží uvnitř strany, jež omezuje F.

Je-li přímka q různá od p_i, existuje bod $Q \in q = 0$ (tedy i $f(Q) = 0$) tak, že Q je vnitřním bodem F. Tím by nastal už vyloučený případ 1. Je tedy q totožna s p_i, pak je však determinant ve V_2

---

*) Formulace p_i prochází bodem P je oprávněná: $p_i = 0$ je pro $i = 1, 2, \ldots, n$ rovnice přímky, neboť $(a_i, b_i) \neq 0$; kdyby totiž na př. $a_1 = b_1 = 0$, pak n-tice $(\varepsilon') = (1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ je různá od n-tice $(\varepsilon'') = (-1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, takže ve V_3 se vyskytuje faktor

$$\begin{vmatrix} a_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k + a_0, & -a_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k + a_0 \\ b_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k b_k + b_0, & -b_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k b_k + b_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2a_1, & -a_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k + a_0 \\ 2b_1, & -b_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k b_k + b_0 \end{vmatrix} = 0, \text{ ve sporu s } V_1 V_2 V_3 \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} a_i, & a_j, & \Sigma\varepsilon_k a_k + a_0 \\ b_i, & b_j, & \Sigma\varepsilon_k b_k + b_0 \\ c_i, & c_j, & \Sigma\varepsilon_k c_k + c_0 \end{vmatrix}$$

roven nule, což je spor.

3. Nechť $i \neq j$, $p_i(P) = p_j(P) = 0$. Definujeme-li opět $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$, $\varepsilon_k = \operatorname{sign} p_k(P)$ pro ostatní indexy, pak je $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k p_k(P) + p_0(P) = 0$. Potom však determinant ve V_2

$$\begin{vmatrix} a_i, & a_j, & \Sigma\varepsilon_k a_k + a_0 \\ b_i, & b_j, & \Sigma\varepsilon_k b_k + b_0 \\ c_i, & c_j, & \Sigma\varepsilon_k c_k + c_0 \end{vmatrix} = 0$$

proti předpokladu.

4. Čtvrtý případ je ihned vyloučen tím, že kdyby p_i, p_j, p_k, $i \neq j \neq k \neq i$, procházely bodem P, pak ve V_1 by faktor

$$\begin{vmatrix} a_i, & a_j, & a_k \\ b_i, & b_j, & b_k \\ c_i, & c_j, & c_k \end{vmatrix} \text{ byl roven nule.}$$

Poněvadž tedy $E(f < 0)$ je neprázdné, plyne z pomocné věty 3, že $E(f = 0)$ je hranicí množiny F s vnitřním bodem. Kdyby F byla typu D_2a, bylo by $V_3 = 0$, neboť determinant, odpovídající dvojici n-tic, jež patří oběma rovnoběžným polopřímkám, by byl roven nule. Totéž platí pro případ F typu D_3, zatím co F typu D_4 je vyloučena, neboť $n > 1$ a

$$\begin{vmatrix} a_i, & a_j, & a_k \\ b_i, & b_j, & b_k \\ c\ , & c_j, & c_k \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zbývají tedy případy: F typu D_1, F typu D_2b a množina nulových bodů f prázdná, což lze považovat za hranici F typu D_5.

Pracováno v Ústředním ústavě matematickém v Praze.