

Časopis pro pěstování matematiky

Jan Mařík

Základy teorie integrálu v Euklidových prostorech. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 1, 1–51

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117016>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1952

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Ústřední ústav matematický

SVAZEK 77 • PRAHA, 30. IV. 1952 • ČÍSLO 1

REFERÁTY A ČLÁNKY

ZÁKLADY THEORIE INTEGRÁLU V EUKLIDOVÝCH PROSTORECH

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo 1. srpna 1951.)

517.3

519.5

I. Úvod.

Tato část má čtenáři hlavně ukázat názorný význam množinové funkce a její derivace. Je zde také pojednáno o vztahu mezi integrály podle různých definic a o vztahu mezi teorií míry a teorií integrálu.

Úkolem tohoto článku je vyložit elementárním způsobem základy teorie integrálu v Euklidových prostorech. Budeme předpokládat jen znalost základních vlastností reálných čísel, vlastně jen větu o supremu a znalost pojmu limity posloupnosti. Budeme ovšem také mluvit o množinách; postavíme se (což se zpravidla výslovně nebo dokonce mlčky činí) na t. zv. „naivní stanovisko“, budeme totiž předpokládat, že víme, „co jsou to množiny“. K porozumění tomuto článku postačí tedy znát JARNÍKŮV „Úvod do diferenciálního počtu“, v podstatě vlastně jen jeho první dvě kapitoly.

Většina čtenářů však zná z matematiky jistě značně víc než první dvě kapitoly Jarníkovy knihy a bude asi vhodné těmto čtenářům říci několik slov předem. Budeme se totiž převážně zabývat Perronovým integrálem; proč nebudeme „jako obvykle“ vycházet od Riemannova integrálu? Jsou k tomu skutečně dost vážné důvody. Riemannův integrál má sice několik předností; jeho definice — zvláště v jednorozměrném případě — je jednoduchá a dosti „názorná“; ve vícerozměrném případě je pak vhodnou pomůckou při zavádění některých fyzikálních veličin. Je na př. dostatečně zřejmé, co nás vede k definici statického momentu jakožto Riemannova integrálu tvaru $\int x dV$ nebo k definici momentu setrvačnosti jako integrálu $\int r^2 dV$ (dV značí „diferenciál objemu“; předpokládáme, že je hmota rozložena rovnoměrně s hustotou 1).

Dále je možno říci, že většina funkcí, „s nimiž se počítá“, má vlastní nebo nevlastní Riemannův integrál.

Tím jsme však asi u konce s výpočtem dobrých vlastností Riemannova integrálu. Uvažme nyní, co vlastně od teorie integrálu požadujeme.

Tím, že jsme vyslovili nějakou definici (na př. definici Riemannova integrálu), jsme vlastně ještě nic nevykonali; to jsme jen zavedli jisté označení. Aby teorie integrálu „k něčemu byla“, musí dávat nejen definice, nýbrž hlavně věty; zejména věty, které by nám mohly pomoci v konkrétních případech integrál opravdu vypočítat nebo alespoň odhadnout. Byli bychom ovšem rádi, kdyby tyto věty měly pokud možná obecnou platnost, ne příliš komplikovaná znění a konečně, na to je jistě také třeba brát ohled, kdyby je bylo možno jednoduše a pokud možná elementárně odvodit.

Ale těmto požadavkům Riemannův integrál příliš dobře nevyhovuje. Některé věty pro „Riemannův integrál“ (na př. věta o integraci per partes a věta o substituci) se dají dokázat velmi jednoduše, ale za předpokladu, že se omezíme na spojité funkce a užíváme vět o derivaci. K tomu však nepotřebujeme Riemannův integrál. Pracujeme-li opravdu s Riemannovými integrály, narazíme na př. již v důkaze věty o integraci per partes na komplikace. To jsou zatím jen obtíže formální, „důkazové“. Brzy se však setkáme s obtížemi horšími. Abychom to nahlédli, poznamenejme, že pro Perronův integrál, který je zobecněním vlastního i nevlastního*) Riemannova integrálu, platí tato věta:

(1) Buďte φ , ψ , f_n ($n = 1, 2, \dots$) funkce definované v intervalu K (může to být vícerozměrný interval); necht tyto funkce mají v K (konečný) Perronův integrál; necht platí pro každé $x \in K$ a každé n

$$\varphi(x) \leq f_n(x) \leq \psi(x);$$

necht platí pro každé x $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Pak platí:

1. Funkce f má Perronův integrál v K ,
2. posloupnost integrálů funkcí f_n konverguje a má za limitu integrál funkce f ; stručně

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n.$$

Aplikujme tuto větu na Riemannovy integrály, t. j. nahradme všude v předpokladech věty slova „Perronův integrál“ slovy „Riemannův integrál“. Předpoklady věty jsou pak splněny tím spíše, platí tedy i tvrzení věty. Ale tvrzení „funkce f má Perronův integrál“ nemůžeme behužel nahradit slovy, že f má Riemannův integrál. Chceme-li tedy dostat z věty (1) větu o Riemannovu integrálu, nebývá nám nic jiného,

*) Protože ve vícerozměrném případě není terminologie ustálena, budeme o nevlastních Riemannových integrálech mluvit jen v případě jednorozměrném.

než vyslovit dodatečný předpoklad, že funkce f má Riemannův integrál. Je patrné, že je tento předpoklad v jistém smyslu nepodstatný; nikoho přece nezajímá, zda funkce, ke které dojdeme limitním přechodem, má integrál zrovna podle nějaké naší — patrně nevhodné — definice. Zajímá nás jen, zda tato funkce má nějaký „rozumný“ integrál, s kterým dovedeme pracovat. A uvidíme, že s Perronovým integrálem se dá pracovat nejen tak dobře jako s Riemannovým integrálem, nýbrž dokonce mnohem lépe. S podobnými obtížemi jako ve větě (1), které opět odpadnou vhodnější definicí integrálu, se ovšem setkáme i při jiných příležitostech.

Nyní je třeba se zmínit ještě o jedné definici integrálu, kterou určitě zná každý, kdo čte tento článek, přes to, že je tato definice málokde uvedena. Je to integrál „podle primitivní funkce“; budeme mu říkat integrál Newtonův. Přesněji: řekneme, že funkce f má v intervalu $\langle a, b \rangle$ Newtonův integrál, existuje-li v tomto intervalu funkce F tak, že pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $F'(x) = f(x)$ (máme na mysli jen vlastní derivaci, v krajních bodech ovšem jednostrannou); Newtonovým integrálem — značka $N \int_a^b f(x) dx$ — pak rozumíme číslo $F(b) - F(a)$. (Víme sice, že funkce F není funkcí f určena jednoznačně, je však určena „jednoznačně až na aditivní konstantu“, takže číslo $F(b) - F(a)$ je určeno opravdu jednoznačně.) Riemannův integrál budeme obdobně značit $R \int_a^b f(x) dx$.

Je snad dobře si uvědomit, že Newtonův integrál má přímo zásadní význam. Nehledíme-li totiž k přibližným methodám, dává nám tento integrál téměř jedinou možnost hodnotu integrálu opravdu vypočítat.

Vzpomeňme také, jak se v některých učebnicích počítá integrál $\int_0^1 x^2 dx$ podle Riemannovy definice a jak lze tento integrál vypočítat jakožto integrál Newtonův; nebo vzpomeňme na rozdíl v důkazech věty o substituci pro Riemannovy a pro Newtonovy integrály. Uznáme jistě, že má Newtonův integrál před integrálem Riemannovým některé značné přednosti.

Poznamenejme ještě toto: Primitivní funkci se někdy říká „neurčitý integrál“, Riemannovu integrálu „určitý integrál“. Tato terminologie se nám však nehodí. Existuje-li totiž Riemannův integrál $R \int_a^b f(x) dx$, existuje také integrál $R \int_a^t f(x) dx$ pro každé $t \in \langle a, b \rangle$; můžeme tedy v intervalu $\langle a, b \rangle$ definovat funkci

$$F(t) = R \int_a^t f(x) dx$$

a této funkci (event. zvětšené o nějakou konstantu) budeme říkat neurčitý Riemannův integrál. Podobně můžeme mluvit o neurčitém Newtonově integrálu; ten se ovšem přesně shoduje s pojmem primitivní funkce. Uvidíme, že budeme moci mluvit i o neurčitém Perronovu integrálu. „Určitý integrál“ (at Riemannův, Newtonův nebo Perronův) je pak číslo, které je funkční hodnotou příslušného neurčitého integrálu.

Všimněme si nyní souvislosti mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem. Snadno nahlédneme, že funkce může mít Riemannův integrál, aniž má Newtonův integrál; na př. funkce f , pro niž platí $f(x) = 0$ pro $x > 0$, $f(0) = 1$, jistě nemá v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ Newtonův integrál. (K důkazu neexistence stačí použít věty o střední hodnotě pro tento interval.) Může však nastat i opak; existuje funkce G , která má v každém bodě intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ derivaci $G'(x) = g(x)$ tak, že platí dokonce $0 \leq g(x) \leq 1$ a přitom funkce g nemá v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ Riemannův integrál. To je jistě věc dost nepříjemná. Vidíme, že nevystačíme ani se samotným Riemannovým ani se samotným Newtonovým integrálem a žádný není „obsažen“ v druhém. Je tedy jistě sympatickou vlastností Perronova integrálu, že je zobecněním obou zároveň. Odtud plyne zejména, že Riemannův a Newtonův integrál dané funkce dávají touž hodnotu, pokud ovšem existují. Rozumíme-li nyní „integrálem“ prostě Perronův integrál a dokážeme-li nějakou větu pro Newtonovy integrály, máme tím dokázáno (alespoň za speciálních předpokladů) jistou větu o „integrálu“. Tím se vyhneme nepříjemné situaci, do níž se dostávají autoři učebnic integrálu Riemannova. Rozumí-li se totiž „integrálem“ Riemannův integrál a dokáže-li se nějaká věta pro „neurčitý“ (t. j. Newtonův) integrál, není pro „opravdový“ integrál dokázáno vlastně nic — leda za dodatečného předpokladu, že integrály, které se ve větě vyskytují, existují také ve smyslu Riemannově.

Důležitou roli hraje také tato věta:

(2) *Existuje-li (Perronův) integrál funkce f v každém intervalu $\langle a, b - \varepsilon \rangle$, kde ε je libovolné kladné číslo menší než $b - a$, a existuje-li vlastní limita $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, pak existuje též $\int_a^b f(x) dx$ a rovná se této limitě.*

Postup, který nám sloužil k zavedení nevlastních Riemannových integrálů, nám tedy dává kritérium existence pro Perronův integrál. To je značná výhoda. „Vybudujeme-li“ totiž teorii vlastního Riemannova integrálu a zavedeme-li pak nevlastní Riemannův integrál, nevíme ovšem, které věty, dokázané pro vlastní integrály, budou platit také pro integrály nevlastní a musíme vše znovu ověřovat. Nepříjemnost této situace vysvitne snad ještě lépe, uvědomíme-li si toto:

Označme symbolem \mathfrak{R} množinu funkcí, které mají v intervalu (na př.) $\langle 0, 1 \rangle$ vlastní Riemannův integrál; buď \mathfrak{R}_1 množina funkcí, které mají v témže intervalu nevlastní Riemannův integrál. (Každá funkce

z \mathfrak{R}_1 má v daném intervalu nejvýše konečný počet „choulostivých bodů“.) Nyní stejným způsobem, jakým jsme dospěli od systému \mathfrak{R} k systému \mathfrak{R}_1 , můžeme dospět od systému \mathfrak{R}_1 k jakémusi systému \mathfrak{R}_2 , který bude zase větší než \mathfrak{R}_1 . Lze na př. snadno sestrojiti funkci f , která bude mít za „choulostivé body“ čísla $\frac{1}{n}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) tak, aby

existovala $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx$ (míní se nevlátní Riemannův integrál); taková

funkce bude patřit do \mathfrak{R}_2 , ne však do \mathfrak{R}_1 . Dále můžeme sestrojiti systémy $\mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4, \dots$ a pokračovat tak do nekonečna (ba transfinitně; na myšlence takovéto transfinitní konstrukce se zakládá původní definice Denjoyových integrálů, z nichž některé jsou ještě obecnější než Perronův integrál). Z věty (2) je vidět, že množina \mathfrak{F} všech funkcí, které mají v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ Perronův integrál, obsahuje všechny množiny $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots$. Je jistě již patrné, že theorie Perronova integrálu je značně ucelenější a po mnoha stránkách vhodnější než theorie integrálu Riemannova.

Věty (1) a (2) jsou mocnými prostředky k důkazu existence Perronova integrálu dané funkce. Řekli jsme již, že Perronův integrál je zobecněním integrálu Riemannova; platí tedy zejména, že každá spojitá funkce má Perronův integrál. (Při důkazu této věty však nebudeme nikterak užívat vlastností Riemannova integrálu; dokážeme dokonce, že má spojitá funkce Newtonův integrál.) Podaří-li se nám tedy nějakou funkci f „odvoditi“ z množiny spojitých funkcí postupnými limitními přechody, popsanými ve větách (1) a (2), budeme mít dokázáno, že funkce f má Perronův integrál. Je celkem zřejmé, že se to dá provést prakticky vždy, pokud vůbec je možné funkci f nějaký „rozumný“ integrál přisoudit. [„Rozumností“ integrálu zde míníme zejména to, že z existence (konečného) integrálu v daném intervalu plyne existence (konečného) integrálu v každém částečném intervalu. Něco jiného než „rozumný“ integrál je t. zv. Cauchyova hlavní hodnota integrálu. Ta

se definuje jako $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \dots + \int_{c+\varepsilon}^b \dots \right)$, je-li c „choulostivý“ bod funkce,

$a < c < b$. Zřejmě existuje na př. Cauchyova hlavní hodnota integrálu

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$, nikoli však příslušný (nevlátní Riemannův nebo Perronův)

integrál. Podobně nemůže existovat žádný „rozumný“ integrál $\int_{-1}^1 f(x) dx$,

kde $f(x)$ je pro $x \neq 0$ derivací funkce $\sin \frac{1}{x}$ a na př. $f(0) = 0$, pokud

„rozumností“ míníme spojitost neurčitého integrálu. Sama funkce f je

zde vlastně „velmi rozumná“; mimo bod 0 má dokonce všechny derivace.]

Jestliže funkce φ, ψ mají v intervalu na př. $\langle 0, 1 \rangle$ Perronův integrál, je-li $\varphi(x) \leq \psi(x)$ pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a je-li $\int_0^1 \varphi(x) dx < \int_0^1 \psi(x) dx$, lze dokázat, že existuje funkce f , pro niž platí $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ v každém bodě $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a která v tomto intervalu nemá Perronův integrál; jsou však dobré důvody k domněnce, že se nikdy nikomu nepodaří takovou funkci f opravdu udat (zkonstruovat). (Konstrukcí takové funkce by totiž byla zároveň zkonstruována lebesgueovsly neměřitelná množina.) Víme-li tedy o funkcích φ, ψ , že mají Perronův integrál, a je-li konkrétně dána funkce f , pro niž v každém bodě daného intervalu platí $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, je „stopercentně“ jisté, že funkce f má rovněž Perronův integrál. Nikterak však není pravda, jak jsme ukázali na jednoduchých příkladech, že by „prakticky každá“ funkce f měla Perronův integrál; předpoklad o funkcích φ, ψ je tedy podstatný.

Rovněž lze snadno ukázat, že funkce φ, ψ hrají důležitou roli ve větě 1. Abychom to nahlédli, definujeme v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ posloupnost funkcí f_n ($n = 1, 2, \dots$) tímto předpisem:

$$f_n(0) = 0,$$

$$\text{pro } 0 < x < \frac{1}{n} \text{ je } f_n(x) = n,$$

$$\text{pro } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \text{ je } f_n(x) = 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že pro každé x platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ a že pro každé n je $R \int_0^1 f_n(x) dx = 1$; je tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$, ale $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$.

Tím je tedy zhruba naznačeno, jaké výhody má (aspoň v jedno-rozměrném případě) theorie Perronova integrálu, co od ní můžeme očekávat — a také trochu, co od ní nemůžeme očekávat.

Obrátme se nyní opět k širšímu okruhu čtenářů, i k těm, kteří dosud o integrálu nic nestudovali; pokusme se vyložit, co nás vede k tomuto pojmu. Vhodným příkladem jsou k tomu některé fyzikální veličiny. Ukážeme tím zároveň možnost definovat integrály vícerozměrné a výklad bude názornější než pro jeden rozměr. Vezměme si na př. za úkol „vypočítat“, lépe řečeno definovat statický moment obdélníka vzhledem k některé z jeho stran. Předpokládejme napřed, že plošná hustota daného obdélníka je všude stejná a rovna 1. Víme, že statický moment hmotného bodu o hmotě m vzhledem k ose vzdálené o d je dán výrazem md . Umís-

těme daný obdélník do prvního kvadrantu roviny s osami x, y tak, aby jeden vrchol ležel v počátku a strany o délkách a , resp. b ležely na osách x , resp. y . Uvažujme takto:

Rozdělíme obdélník několika řezy, z nichž některé jsou rovnoběžné s osou x a ostatní s osou y , na n malých obdélníků; buď K_i jeden z nich.

Zvolme bod $[x_i, y_i]$ z obdélníka K_i . Hmotu K_i je podle předpokladu rovna ploše K_i ; označme ji $\mu(K_i)$. Protože obdélník K_i je podle předpokladu malý, můžeme ho přibližně pokládat za hmotný bod o souřadnicích $[x_i, y_i]$ a hmotě $\mu(K_i)$; statický moment obdélníka K_i vzhledem k ose y bude tedy přibližně roven číslu $x_i \cdot \mu(K_i)$. Jsou-li tedy K_1, K_2, \dots, K_n obdélníky, na něž jsme rozdělili původní obdélník, a jsou-li body $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$ zvoleny v příslušných obdélnících, je podle této úvahy statický moment celého obdélníka přibližně roven součtu

$\sum_{i=1}^n x_i \mu(K_i)$. Přiblížení ke „správné hodnotě“ bude asi tím lepší, čím jem-

nější bude dělení původního obdélníka na obdélníky K_i . (To ovšem nebyla úvaha matematická; to byla úvaha „heuristická“, která nás měla přivést k definici statického momentu a současně také k definici integrá-

lu.) Lze nyní ukázat, že existuje číslo S , k němuž se součty $\sum_{i=1}^n x_i \mu(K_i)$

neomezeně blíží, jestliže dané dělení „stejněměrně“ zjemňujeme (později ukážeme, jak se dá toto číslo jednoduše vypočítat); pro definici statického momentu daného obdélníka vzhledem k ose y (t. j. k jeho straně o délce b) nemáme tedy jinou „rozumnou možnost“ než právě číslo S .

Obdobně budeme definovat Riemannův integrál z funkce f , definované na obdélníku K . Řekneme, že funkce f má na obdélníku K Riemannův integrál rovný číslu A , jestliže při vhodném rozkladu obdélníka K na obdélníky K_1, K_2, \dots, K_n se bude součet

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \mu(K_i) \quad (3)$$

málo lišit od čísla A , ať zvolíme body $[x_i, y_i]$ jakkoli v obdélnících K_i . (Předpokládáme ovšem, že žádné dva z obdélníků K_1, \dots, K_n se nepřekrývají.) Lze ukázat, že může existovat nejvýš jedno takové číslo A .

Je patrné, že jsme statický moment definovali jako integrál funkce $f(x, y) = x$.

Požadavek kladený na existenci integrálu bychom také mohli zostřit v tom smyslu, že bychom požadovali nejen, aby se při vhodném dělení všechny součty tvaru (3) málo lišily od čísla A , nýbrž dokonce, aby při každém dostatečně jemném dělení se všechny takové součty málo lišily od čísla A .

Ukazuje se, že v našem případě, kdy μ značí plochu, jsou oba požadavky ekvivalentní. Za chvíli však budeme mluvit o Riemann-Stieltjesovu integrálu, kde „hmota“ μ může mít i jiný význam; to odpovídá případu, že hmota není rozložena rovnoměrně. V obecném případě uvedené dva požadavky ekvivalentní být nemusí a je pohodlnější pracovat s prvním (slabším) požadavkem. Silnější požadavek je však splněn, kdykoli je integrovaná funkce spojitá.

Snadno můžeme definovat také integrál přes obecnější množinu Ω než přes obdélník, jen když je množina Ω omezená: Množinu Ω umístíme do jakéhosi obdélníka K a funkci, jejíž integrál přes množinu Ω máme definovat a o níž tedy předpokládáme, že je definována na Ω , doplníme v bodech obdélníka K , které nepatří do Ω , nulovými hodnotami. Definujeme pak integrál funkce f přes množinu Ω jako integrál „doplněné“ funkce přes obdélník K , pokud ovšem tento integrál existuje. Lze ukázat, že tato definice opravdu má smysl, neboli že nezáleží na tom, do kterého obdélníka množinu Ω vnoříme. (Zde je do jisté míry podstatné, že μ značí plochu; v obecném případě Stieltjesova integrálu jsou věci trochu komplikovanější.)

Naší „heuristické“ úvahy, které jsme užili k zavedení statického momentu, se ve fyzice užívá dosti často. Má se spočítat jistá fyzikální veličina, příslušná dané omezené části prostoru; označme ji Ω . Pro jednoduchost se opět omezíme na případ dvou rozměrů. Obyčejně je jasné, že na množině Ω existuje funkce f této vlastnosti: Zvolíme-li v Ω malý obdélník K_i , bude fyzikální veličina $F(K_i)$, příslušná obdélníku K_i , přibližně rovna číslu

$$f(x_i, y_i) \mu(K_i),$$

kde $[x_i, y_i]$ je nějaký bod z obdélníka K_i . (Na př. u momentu setrvačnosti vzhledem k ose, procházející bodem $[0, 0]$ kolmo k dané rovině, bude tato funkce rovna $x^2 + y^2$; při potenciálu, vytvořeném v bodě $[0, 0]$, bude $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ atd.). Vezměme opět obdélník K , obsa-

hující množinu Ω , a rozdělme ho zase popsáním způsobem na malé obdélníky K_1, K_2, \dots, K_n . Fyzikální veličina $F(\Omega)$, příslušná množině Ω , se pak asi bude přibližně rovnat (α) součtu tvaru (3), kde však se sčítá jen přes ty obdélníky, které jsou obsaženy v Ω ; též je možné se domnívat, že bude $F(\Omega)$ přibližně rovné (β) součtu tvaru (3), kde se sčítá přes obdélníky, které mají s Ω společný aspoň jeden bod.

Lze tušit, že v „rozumných případech“ při dostatečně jemném dělení dostaneme v obou případech přibližně totéž.

Vzpomeňme si nyní, jak jsme definovali integrál funkce f přes množinu Ω . Bylo to číslo opět přibližně rovné součtům tvaru (3), kde však f znamenalo „rozšířenou“ funkci. Ale to jsou zřejmě právě ty součty, o nichž jsme řekli, že aproximují veličinu $F(\Omega)$; sčítanci příslušné

obdélíčkům K_i , které nemají s Ω žádný bod společný, určitě vypadnou, protože se příslušná hodnota $f(x_i, y_i)$ rovná nule (f je zde „rozšířená funkce“); sčítance příslušné obdélíčkům K_i , obsaženým v Ω , se nezmění; u ostatních obdélíků pak můžeme vhodnou volbou bodu $[x_i, y_i]$ dosáhnout toho, že „integrální“ součet (3) přejde buď v součet (α) nebo v součet (β) podle toho, volíme-li bod $[x_i, y_i]$ mimo Ω nebo v Ω .

Je opět patrné, že pro veličinu $F(\Omega)$ nemáme jinou „rozumnou možnost“ než integrál funkce f přes množinu Ω .

Je-li funkce f nezáporná na obdélíčku K , pak každý výraz $f(x_i, y_i) \cdot \mu(K_i)$ značí objem hranolu o podstavě K_i a výšce $f(x_i, y_i)$; součty (3) tedy přibližně vyjadřují objem tělesa, ležícího nad obdélíčkem K , ohraničeného zdola tímto obdélíčkem a shora plochou o rovnici $z = f(x, y)$. Integrálem můžeme tedy definovat také objem těles, vzniklých popsáním způsobem. Je snadno patrné, že lze tuto definici rozšířit i na případ, že místo obdélíčka K vezmeme libovolnou omezenou množinu Ω ; otázka je jen, kdy bude příslušný integrál existovat. Vezmeme-li za f funkci, která na Ω nabývá hodnoty 1 a jinde hodnoty 0, má náš integrál význam objemu válce o podstavě Ω a výšce 1; toto číslo se však rovná obsahu podstavy, t. j. obsahu množiny Ω . Dvourozměrným integrálem můžeme tedy definovat jednak objem trojrozměrných množin speciálního tvaru, jednak plošný obsah do jisté míry libovolných množin dvourozměrných.

Položme si nyní otázku, proč jsme se vlastně zabývali jen případem, že μ znamená objem. Součty tvaru $\sum x_i \mu(K_i)$ nebo $\sum f(x_i, y_i) \mu(K_i)$ můžeme přece utvořit, ať je „hmota“ μ rozložena jakkoli, jen když známe „její rozložení“ neboli když známe čísla $\mu(K_i)$ pro každý obdélíček K_i . A ukazuje se, že důvod našeho omezení není nikterak příliš hluboký; na příkladě statického momentu vidíme, že je někdy docela přirozenější vyšetřovat případ „obecného rozložení“. To nás vede, jak jsme poznáménali, k t. zv. Stieltjesovu integrálu (zatím Riemann-Stieltjesovu). V případě, který jsme dosud probírali, kdy μ znamenalo plochu, mluvíme o „obyčejném“ integrálu. — Je ovšem třeba říci, jak máme matematicky formulovat požadavky o „hmotě“ μ , abychom dostali rozumné výsledky.

Poznamenejme tedy napřed něco o matematickém vyjádření fyzikálních veličin. Někdy se říká, že se veličiny dělí na veličiny, označující množství — kvantitu (t. zv. veličiny extensivní, na př. hmota, teplo, elektrický náboj; k jejich měření potřebujeme jednotku), a na veličiny, označující stav (t. zv. veličiny intenzivní, na př. hustota, teplota, potenciál; k jejich měření potřebujeme stupnici). V matematice bohužel nedovedeme pracovat přímo s teplem nebo s elektrickým nábojem; musíme určit nějakou „matematickou veličinu“, která by pokud možná dobře odpovídala příslušné „fyzikální veličině“. Vezmeme-li jediný předmět, je po stránce matematické na př. jeho hmota vyjádřena

jistým číslem; právě tak je třeba teplota v daném bodě a čase vyjádřena číslem. Chceme-li tedy po stránce matematické nějak klasifikovat fyzikální veličiny, musíme jít trochu dál. Na samotném čísle již nepoznáme, zda „vzniklo“ jako hmota nějakého předmětu nebo jako teplota v daném bodě; musíme se tedy podívat nejen na dané číslo, nýbrž i na „věc“, které toto číslo bylo přiřazeno. A jakým „věcem“ jsou přiřazena čísla udávající hmotu, teplo, elektrický náboj? Za tyto „věci“ můžeme vždy pokládat části prostoru; je zřejmé, že při volbě (v daném čase) určité části prostoru je určena hmota, teplo, ... všech „předmětů“, které jsou v té části prostoru obsaženy. Fyzikální veličinu „teplo“ můžeme tedy pokládat za předpis, který každé („rozumné“) části prostoru přiřazuje určité číslo. Avšak předpis, který každému prvku nějaké množiny přiřazuje určité číslo, se nazývá funkce (definovaná na té množině; prvky té množiny se nazývají někdy argumenty funkce); „teplo“ můžeme tedy chápat jako funkci, definovanou na množině všech „rozumných“ částí prostoru. Argumenty této funkce jsou tedy opět množiny; takovýmto funkcím se říká *funkce množinové*. Tímto způsobem můžeme matematicky interpretovat zřejmě i objem (t. j. „objemovou velikost“), hmotu, momenty, elektrický náboj a pod. Všecky tyto množinové funkce mají jednu společnou vlastnost: jsou to tak zvané funkce aditivní. Je-li totiž F některá z uvedených množinových funkcí a jsou-li A, B, C „rozumné“ množiny (t. j. takové, že je pro ně definována funkce F), při čemž množiny A, B nemají společných bodů a C je jejich množinové sjednocení, pak platí

$$F(A) + F(B) = F(C).$$

(Na př. součet statických momentů dvou těles, která nemají žádný bod společný, se rovná statickému momentu tělesa, které vznikne tím, že obě tělesa dohromady pokládáme za jedno těleso; podobně triviální význam má tento vztah i v ostatních případech.) Při vyšetřování Peronova integrálu budou hrát důležitou roli množinové funkce; vidíme nyní, že pojem množinové funkce není nic záhadného, co by patřilo jen do „vyšší“ matematiky, nýbrž něco, co má velmi názorný význam a úzký vztah k denní zkušenosti.

Podívejme se ještě s tohoto hlediska na fyzikální veličiny „intenzivní“. Teplota, hustota, potenciál jsou pak čísla, přiřazená ne již částem, nýbrž bodům prostoru. Tyto veličiny lze tedy chápat jako funkce v obvyklém slova smyslu („funkce bodové“).

Zdá se, že jsme poněkud odbočili; vraťme se tedy zpět „na rozcestí“. Naším úmyslem je definovat na př. statický moment i v případě nerovnoměrného rozdělení hmoty; abstraktně formulováno: hledáme nějaké „rozumné“ předpoklady o „hmotě“ μ , za nichž by bylo možné vyšetřovat (alespoň bez velkých komplikací) součty tvaru

$$\sum f(x_i, y_i) \mu(K_i)$$

obdobným způsobem jako v případě, že μ znamenalo plochu (v případě „rovnomměrného rozdělení hmoty“). μ bude zřejmě jakási množinová funkce.

Ukazuje se především, že stačí vzít za systém množin, na němž je tato funkce definována, systém všech obdélníků. (Abychom si zvykli na vícerozměrnou terminologii, budeme místo „obdélník“ říkat (dvourozměrný) interval; pootočený obdélník ovšem pak už nebude intervalem. Trojrozměrný interval má názorný význam kvádry; m -rozměrný interval pro $m > 3$ bohužel už si představit nedovedeme.) Stačí dokonce vzít systém všech uzavřených intervalů, které jsou částmi jistého pevného intervalu. V tomto případě budeme mluvit o funkci intervalu místo o funkci množinové. Ale pak je třeba poněkud změnit definici aditivity. Dva uzavřené intervaly bez společných bodů totiž nikdy nedají dohromady interval. Kdybychom nyní doslova přenesli uvedenou definici aditivity na funkce intervalu, nepožadovali bychom vůbec nic a lze uvěřit, že bychom pak asi nemusili dostat nic rozumného. Pozměníme tedy pro funkce intervalu definici aditivity takto: Řekneme, že funkce intervalu F je aditivní, jestliže platí

$$F(I) + F(J) = F(I + J),$$

kdykoliv I je interval, J je interval, $I + J$ je interval a intervaly I, J se nepřekrývají, t. j. mají společné body jen na svých hranicích. (Hranice intervalu je v rovině totéž co obvod, v prostoru totéž co povrch.) Lze pak ukázat, že můžeme zcela pohodlně vyšetřovat součty tvaru (3), jakmile předpokládáme, že bodová funkce f je omezená a že funkce intervalu μ je nezáporná a aditivní.

Riemann-Stieltjesův integrál funkce f přes interval K vzhledem k funkci μ pak definujeme doslova tak jako při „obyčejném“ Riemannově integrálu. Číslo A , vyskytující se v definici, je opět určeno jednoznačně (pokud existuje); označíme je symbolem

$$\int_K f d\mu.$$

Je patrné, že stačí v příslušné definici dát místo slova „obdélník“ slovo „ m -rozměrný interval“ a funkcí f rozumět funkci m proměnných, abychom dostali definici integrálu v m -rozměrném prostoru.

Zmínili jsme se však o nevhodnosti Riemannovy teorie pro jedno-rozměrný případ a o tom, že Riemannův integrál nahradíme obecnějším integrálem, který bude zároveň zobecněním Newtonova integrálu. Jak tomu bude v případě vícerozměrném?

Uvažme, že při snaze vyjádřit statický moment (resp. nějakou jinou fyzikální veličinu) jsme užili tohoto předpokladu:

Je-li J malý interval, obsahující bod $[x, y]$, pak pro statický moment $S(J)$, příslušný tomuto intervalu (resp. pro příslušnou fyzikální veličinu $F(J)$), bude přibližně platit vztah

$$S(J) = x \cdot \mu(J)$$

$$\text{(resp. } F(J) = f(x, y) \cdot \mu(J)\text{).} \quad (4)$$

Dělením „velkého intervalu“ na „malé intervaly“ a sečtením příslušných přibližných rovností jsme byli přivedeni k Riemannovu integrálu.

Místo vztahů (4) můžeme však, je-li $\mu(J) \neq 0$, napsat, že jsou přibližně splněny vztahy

$$\frac{S(J)}{\mu(J)} = x \quad (4')$$

$$\left(\text{resp. } \frac{F(J)}{\mu(J)} = f(x, y) \right).$$

Předpokládáme zřejmě, že tyto vztahy budou platit tím přesněji, čím menší bude interval J , obsahující bod $[x, y]$.

Předpokládáme tedy vlastně, že platí

$$\lim_{J \rightarrow (x, y)} \frac{S(J)}{\mu(J)} = x$$

$$\text{(resp. } \lim_{J \rightarrow (x, y)} \frac{F(J)}{\mu(J)} = f(x, y)\text{);} \quad (5)$$

je ovšem třeba definovat záhadný symbol Lim , který zde však zřejmě má jakýsi intuitivní význam („interval J se zmenšuje až na bod $[x, y]$ “). Tuto definici odsuneme do dalšího paragrafu. Budou zde jisté komplikace, způsobené tím, že v „obecném případě“ (t. j. není-li μ právě plocha) může být $\mu(J) = 0$.

Můžeme tedy říci, že S (resp. F) je aditivní funkce intervalu, splňující v každém bodě vztah (5). (Nenabývá-li funkce f nekonečných hodnot, je vztahem (5) funkce F (pokud existuje) určena jednoznačně.) To zřejmě připomíná Newtonův jednorozměrný integrál. Všimneme-li si ještě, jak vypadají v jednorozměrném případě aditivní funkce intervalu, uvidíme dokonalou analogii. Buď napřed φ (bodová) funkce, definovaná (na př.) v intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Sestrojíme funkci intervalu φ^* tímto předpisem: Je-li $J = \langle a, b \rangle$, kde $0 \leq a < b$, buď $\varphi^*(J) = \varphi(b) - \varphi(a)$; stručně

$$\varphi^*(\langle a, b \rangle) = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (6)$$

Buďte nyní $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle$ nepřekrývající se intervaly, obsažené v $\langle 0, \infty \rangle$ a takové, že dávají dohromady opět jakýsi interval. To zřejmě není možné jinak, než že buď $b = c$ nebo $a = d$. Necht tedy na př. $b = c$; pak „složením“ obou intervalů vznikne interval $\langle a, d \rangle$ a platí

$$\varphi^*(\langle a, d \rangle) = \varphi(d) - \varphi(a) = (\varphi(d) - \varphi(c)) + (\varphi(c) - \varphi(a)) = \varphi^*(\langle c, d \rangle) + \varphi^*(\langle a, b \rangle).$$

Vidíme, že funkce φ^* je aditivní. Máme tedy příklad, jak sestavit aditivní funkci intervalu. Snadno však nahlédneme, že je to příklad obojný neboli že tímto způsobem dostaneme každou aditivní funkci intervalu. Buď tedy Φ taková funkce, definovaná na př. pro všechny uzavřené intervaly, obsažené v $\langle 0, \infty \rangle$. Zvolme nyní libovolné číslo c a definujme v intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ bodovou funkci φ předpisem

$$\varphi(0) = c,$$

$$\text{pro } x > 0 \text{ je } \varphi(x) = c + \Phi(\langle 0, x \rangle).$$

Pro $b > 0$ je tedy

$$\Phi(\langle 0, b \rangle) = \varphi(b) - c = \varphi(b) - \varphi(0);$$

je-li $0 < a < b$, plyne z aditivity funkce Φ vztah

$$\Phi(\langle 0, a \rangle) + \Phi(\langle a, b \rangle) = \Phi(\langle 0, b \rangle),$$

neboli

$$\Phi(\langle a, b \rangle) = \Phi(\langle 0, b \rangle) - \Phi(\langle 0, a \rangle) = (\varphi(b) - c) - (\varphi(a) - c) = \\ = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Vidíme, že funkce Φ je totožná s funkcí φ^* , určenou vztahem (6). Každou aditivní funkci intervalu (na přímce) lze tedy dostat tím, že utvoříme rozdíl funkčních hodnot jisté bodové funkce. Zkoumejme, jak se nám po tomto odhalení projeví v jednorozměrném případě výraz

$$\text{Lim}_{J \rightarrow x} \frac{F(J)}{\mu(J)}. \quad (7)$$

Předpokládejme napřed, že μ je „plocha“, t. j. délka intervalu. Pak je funkce μ vytvořena [ve smyslu (6)] funkcí $f(x) = x$; předpokládejme, že funkce F je vytvořena funkcí φ , t. j. že $F = \varphi^*$.

Výraz (7), klademe-li $J = \langle u, v \rangle$ přejde v

$$\text{Lim}_{\langle u, v \rangle \rightarrow x} \frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{v - u};$$

v se blíží bodu x zprava, u zleva a je $u < v$.

Tento výraz již zřetelně připomíná derivaci. Až definujeme symbol Lim , ukážeme, že limita Lim existuje, když a jen když existují obě limity

$$\lim_{v \rightarrow x+} \frac{\varphi(v) - \varphi(x)}{v - x}, \quad \lim_{u \rightarrow x-} \frac{\varphi(u) - \varphi(x)}{u - x}$$

a jsou si rovny — neboli když existuje derivace $\varphi'(x)$.

Jestliže tedy definujeme (i pro m rozměrů) derivaci aditivní funkce intervalu F výrazem $\text{Lim}_{J \rightarrow x} \frac{F(J)}{\mu(J)}$ (x značí bod m -rozměrného prostoru),

pokud limita Lim bude existovat a pokud μ bude znamenat (m -rozměrný) objem, budeme mít zobecnění klasické definice derivace; v jednorozměrném případě bude derivace funkce intervalu znamenat totiž totéž jako derivace bodové funkce, již je daná funkce intervalu vytvořena.

Co se nyní stane, vezmeme-li v jednorozměrném případě za μ nějakou obecnější (nezápornou aditivní) funkci intervalu? Je-li $\mu = \varphi^*$ (ve smyslu (6)), máme pro $a < b$

$$0 \leq \mu(\langle a, b \rangle) = \varphi(b) - \varphi(a)$$

neboli $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Vidíme, že funkce φ je neklesající. Naopak zase vztah (6) přiřazuje každé neklesající funkci nezápornou funkci intervalu.

Abychom se nemuseli omezovat na případ, že μ značí objem, zavedeme derivaci libovolné funkce intervalu F podle libovolné nezáporné aditivní funkce intervalu μ výrazem

$$\text{Lim}_{J \rightarrow x} \frac{F(J)}{\mu(J)}, \quad (8)$$

pokud Lim bude existovat. [V jednorozměrném případě se (8) změní v

$$\text{Lim}_{\langle u, v \rangle \rightarrow x} \frac{f(v) - f(u)}{\varphi(v) - \varphi(u)},$$

kde $f^* = F$, $\varphi^* = \mu$. Jestliže budou existovat derivace $f'(x)$ a $\varphi'(x) \neq 0$,

bude tato limita ovšem rovna $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.]

Je tedy zcela přirozené říci, že funkce intervalu F , definovaná pro každý interval, obsažený v pevném intervalu K , je neurčitým Newton-Stieltjesovým integrálem bodové funkce f vzhledem k funkci μ (nebo Stieltjesovou primitivní funkcí f vzhledem k μ), jestliže pro každý bod $x \in K$ platí

$$\text{Lim}_{J \rightarrow x} \frac{F(J)}{\mu(J)} = f(x).$$

(f je tedy funkce m proměnných; má-li bod x souřadnice x_1, x_2, \dots, x_m , značí $f(x)$ totéž, co se dříve značilo symbolem $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Předpokládáme, že funkce f nenabývá nekonečných hodnot.) Funkci F budeme pak značit symbolem

$$N \int f d\mu;$$

symbol $N \int_K f d\mu$ značí pak ovšem číslo $F(K)$.

Podle úvahy, která nás vedla ke vztahům (4), (4') a (5), je právě tak přirozené definovat nějakou fyzikální veličinu integrálem Newtonovým (někdy je to dokonce přirozenější) jako integrálem Riemannovým.

Nyní by již bylo asi vhodné prozradit čtenářům, proč vlastně tolik mluvíme o Newtonově integrálu, když ho nakonec nebudeme probírat. Důvod je jednoduchý. Perronův integrál budeme totiž definovat tak, že bude na první pohled zřejmé, že dostáváme zobecnění integrálu Newtonova. Symbol Lim sice ve skutečnosti přímo definovat nebudeme, budeme však definovat horní a dolní derivaci funkce F podle nezáporné aditivní funkce μ . Věty o horní a dolní derivaci budou naším početním aparátém, pomocí něhož budeme dokazovat věty o Perronovu integrálu. Kdybychom předem nebyli objasnili význam derivace a Newtonova integrálu, zdála by se asi definice Perronova integrálu poněkud záhadnou.

Existuje-li Riemannův integrál $\int_K f d\mu$, existuje též $\int f d\mu$ pro každé $J \subset K$; určuje nám tedy i Riemannův integrál jistou funkci intervalu. Označíme ji ovšem $Rf f d\mu$ a nazveme ji neurčitým Riemann-Stieltjesovým integrálem. Podobně budeme mluvit o neurčitém Perron-Stieltjesovu integrálu.

V jednorozměrném případě máme teď vlastně definován neurčitý integrál jednak jako funkci bodovou, jednak jako funkci intervalu. Ale neurčitý integrál jako funkce intervalu je zde „obvyklým způsobem“ vytvořen neurčitém integrálem jakožto funkcí bodovou, takže nedorozumění nemůže vzniknout.

Bude-li v jednorozměrném případě funkce μ vytvořena bodovou funkcí φ , budeme místo $\int f d\mu$ psát též $\int f d\varphi$, někdy též $\int f(x) d\varphi(x)$. V „obecném případě“ je sice symbol x zbytečný; je-li však některá z funkcí f, φ (nebo obě) dána nějakým jednoduchým početním výrazem, je pohodlnější napsat tento výraz místo příslušného symbolu f nebo φ . Je-li μ délka intervalu, je $\varphi(x) = x$ a píšeme pak ovšem $\int f(x) dx$. Všimněme si ještě, že v jednorozměrném případě nabývají „Riemann-Stieltjesovy součty“ (3) tvaru

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})),$$

kde $K_i = \langle t_{i-1}, t_i \rangle$; očíslování lze tak volit, aby bylo $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$.

Viděli jsme, že neurčitý integrál (ať Riemannův nebo Newtonův) dané bodové funkce definuje jistou aditivní funkci intervalu a všimli jsme si, že některé fyzikální veličiny se dají tímto způsobem vyjádřit (na př. momenty lze vyjádřit jako integrály funkcí $x, x^2 + y^2$ atd.). Zastavme se nyní u problému, zda lze každou „extensivní“ fyzikální veličinu vyjádřit integrálem. Omezíme-li se na veličiny nezáporné a použijeme-li Stieltjesova integrálu, dostaneme odpověď kladnou; každou konečnou nezápornou aditivní funkci intervalu lze totiž psát jako integrál z funkce identicky rovné jedné podle dané funkce samotné. To je

ovšem trivialita. Položme si nyní otázku, zda lze každou funkci intervalu vyjádřit obyčejným integrálem, t. j. integrálem tvaru $\int f d\mu$, kde μ je objem. Víme, že funkce intervalu je Newtonovým integrálem své derivace, pokud tato derivace všude existuje a je konečná. Chceme-li tedy danou funkci intervalu vyjádřit obyčejným integrálem bodové funkce, budeme asi musít za tuto bodovou funkci vzít její obyčejnou derivaci. Představme si opět danou funkci intervalu F jako hmotu při nějakém nepravidelném rozložení. Jaký má názorný význam výraz

$$\lim_{J \rightarrow x} \frac{F(J)}{V(J)},$$

je-li x bod prostoru a značí-li V objem? Je snad dostatečně jasné, že se podobně definuje hustota hmoty v bodě x ; je tedy hustota obyčejnou derivací hmoty, neboli hmota je integrálem hustoty, pokud v každém bodě existuje konečná hustota. (Je patrné, že je v tomto případě přirozenější užít Newtonova než Riemannova integrálu.) Představme si nyní, že je v prostoru jen jeden hmotný bod (na př. v počátku) o hmotě 1. Příslušné „rozložení hmoty“, t. j. funkci F , pak můžeme definovat takto: $F(J) = 1$, resp. $\frac{1}{2}$, resp. $\frac{1}{4}$, resp. $\frac{1}{8}$, resp. 0, leží-li hmotný bod uvnitř J , resp. uvnitř stěny J , resp. uvnitř hrany J , resp. ve vrchole J , resp. mimo J . Příslušná hustota, t. j. derivace funkce F , je pak všude mimo počátek rovna 0; v počátku pak existuje hustota jen v širším smyslu a je rovna $+\infty$. Newtonův integrál této hustoty neexistuje. Uvidíme však, že funkce, která je všude s výjimkou jednoho bodu rovna nule, má integrál (Perronův) přes každý interval vůbec rovný nule, ať je v tom „výjimečném bodě“ definována jakkoli, i třeba hodnotou $+\infty$. Bude patrné, že takovéto funkci nemůžeme přisoudit „rozumně“ žádný jiný integrál nežli nulový, ať vyjdeme z jakékoli definice integrálu. Není tedy možné vyjádřit v tomto případě „hmotu“ jako integrál z „hustoty“ a dá se ukázat, že definovanou funkci intervalu F nelze vyjádřit integrálem žádné funkce.

Pokud nezavedeme Stieltjesův integrál, nemáme při takovémto rozložení hmoty možnost definovat na př. momenty integrálem; zavedeme-li však pojem funkce intervalu a pojem Stieltjesova integrálu, můžeme postupovat stejně jako při rovnoměrném rozložení. (Pokud ovšem lze hmotu vyjádřit jako obyčejný integrál hustoty ρ , lze na př. moment setrvačnosti definovat jako obyčejný integrál funkce $r^2\rho$, kde r je vzdálenost od osy.)

Ve fyzice se však patrně „pro zřehlednění“ vyjadřují obyčejným integrálem i funkce, o nichž je dokázáno, že je integrálem vyjádřit nelze (jako na př. funkce rozložení hmoty při jediném hmotném bodě). Řekne se totiž, že hustota v místě, kde je hmotný bod, je „tak ohromně nekonečná“, že integrál z této funkce se přece jen rovná jedné. Příslušné „hustotě“ se říká Diracova δ -funkce. Naznačili jsme již, jak je možné

pomocí pojmu množinové funkce a Stieltjesova integrálu se této funkci vyhnout. Pro úplnost poznamenejme, že matematikové znají i jiné prostředky, jak tuto „funkci“ vyšetřovat. Velmi obecná metoda, zahrnující i tento případ, je vyložena ve *Schwartzově* knize „Théorie des distributions“.

Všimněme si nyní způsobu, kterým bývá ve starších učebnicích integrálního počtu definován vícerozměrný integrál; mluví se zpravidla jen o obyčejném integrálu. Vezměme pro příklad zase jen dva rozměry. Zpravidla se předpokládá, že obor K , na němž je funkce definována a o němž jsme my předpokládali, že je to interval, je vnitřek jakési jednoduché křivky. Dělení oboru K se pak opět provádí pomocí křivek, takže „malé“ obory K_i , na něž se K rozpadne, jsou opět vnitřky jakýchsi křivek. Tvoří se pak součty tvaru $\sum f(x_i, y_i) \mu(K_i)$, kde (x_i, y_i) leží vždy v K_i a $\mu(K_i)$ znamená plochu příslušného oboru.

Tento postup má však několik vad technického i zásadního rázu. Vady technického rázu jsou jistě jasné každému čtenáři, který jen něco málo slyšel o topologii. Již jen se samotnou definicí pojmu „křivka“ je jakási obtíž. Definujeme-li křivku jako množinu bodů tvaru $[\varphi(t), \psi(t)]$, kde „parametrické funkce“ φ, ψ jsou spojité v některém jednorozměrném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak se může stát, že naše „křivka“ vyplní celý čtverec. Taková křivka má však jistě aspoň trojnásobné body. Omezíme-li se na jednoduché křivky, které se „neprotínají“ [to znamená, že pro $t_1 \neq t_2$ je vždy bod $[\varphi(t_1), \psi(t_1)]$ různý od bodu $[\varphi(t_2), \psi(t_2)]$; připustíme-li výjimku, že bod $[\varphi(a), \psi(a)]$ je totožný s bodem $[\varphi(b), \psi(b)]$, dostaneme definici jednoduché uzavřené křivky a nepřipustíme-li ani tuto výjimku, dostaneme tak zv. jednoduchý oblouk], pak se sice již nemůže stát, že by nám křivka vyplnila celý čtverec, ale může zabrat na př. tři čtvrtiny (nebo devět desetin atd.) plochy celého čtverce. Taková křivka však není „rektifikace schopná“; omezíme-li se na křivky „rektifikace schopné“, pak již má naše křivka najisto nulovou plochu. (Místo „křivka je rektifikace schopná“ budeme říkat „křivka má konečnou délku“.) „Starší autoři“ se také skutečně omezují na práci s křivkami konečné délky; ale situaci tím přesto nezachrání.

Odmysleme si nyní pro jednoduchost obtíže topologického rázu, které vznikají na př. už s „tak jednoduchou“ otázkou, jako je otázka „co je to vnitřek křivky“; předpokládejme, že známe matematiku už tak dobře, že opravdu umíme s křivkami exaktně pracovat, a všimněme si potíží zásadního rázu. První a hlavní z nich tkví v tom, že nedovedeme předem říci, co je to „plocha vnitřku křivky“. Theorie jednorozměrného integrálu nám při tom nepomůže. Dovedeme na př. vypočítat plochu elipsy nebo lemniskáty, ale není každá křivka elipsou nebo lemniskátou. Výpočet plochy dané křivky jednorozměrným integrálem se zakládá na tom, že křivku po částech vyjádříme jako graf funkce. Ukazuje se však, že existují křivky konečné délky, jejichž žádný částečný oblouk

není grafem funkce ani vzhledem k ose x ani vzhledem k ose y . Abychom tedy mohli mluvit o ploše vnitřku dané uzavřené křivky, musíme prostě definovat, co je to „plocha množiny“. A ukazuje se, že námaha, spojená s vyslovením této definice a odvozením základních vlastností „plochy“, je skoro stejná jako vyšetření integrálu způsobem, který jsme naznačili (pomocí intervalů).

Jiná velmi nepříjemná věc je tato. Ve skutečnosti se totiž místo součtů tvaru $\sum f(x_i, y_i) \mu(K_i)$ lépe vyšetřují součty tvaru $\Sigma m_i \mu(K_i)$, resp. $\Sigma M_i \mu(K_i)$, kde m_i resp. M_i je infimum, resp. supremum funkčních hodnot funkce f na množině K_i (t. zv. dolní a horní součty). Je patrné, že každý součet $\sum f(x_i, y_i) \mu(K_i)$ leží mezi příslušným dolním a horním součtem. Je nyní třeba dokázat, že žádný dolní součet není větší než žádný horní součet. Tato věta se obvykle dokazuje tak, že se sestrojí „společné zjemněné rozdělení“. Lze pak snadno ukázat, že při „klasickém“ postupu, kdy dělíme vnitřek křivky na konečný počet oborů, omezených křivkami, nemusí společné zjemněné rozdělení vůbec existovat — a při důkaze věty je nakonec třeba přece jen přejít k intervalům. (Zvolme na př. v rovině obdélník o vrcholech $[0; -1]$, $[1; -1]$, $[1; 1]$, $[0; 1]$. Rozdělme tento obdélník jednak „křivkou“ $y = 0$, jednak křivkou $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$; lze ukázat, že obě tyto křivky mají konečnou délku. Obě tyto křivky dohromady nám však daný obdélník rozdělí již na nekonečně mnoho oborů, omezených jednoduchými uzavřenými křivkami — což není dělení podle naší definice.)

Naznačili jsme, jaké obtíže vznikají, snažíme-li se definovat v rovině Riemannův integrál „pomocí křivek“. Není snad třeba podotýkat, že by se tyto potíže určité nezmenšily, kdybychom přešli k většímu počtu rozměrů. Je však vidět, že potíže tohoto druhu jsou vlastně nepodstatné, způsobujeme si je sami svou neobratností. V podstatě věci, jak bylo naznačeno u postupu „intervalového“, se žádné obtíže tohoto druhu nevyskytují. Zbývalo by jen rozřešit otázku, proč vlastně „starší autoři“ volili tento komplikovaný postup; přirozeným zobeněním „dělení jednorozměrného intervalu na jednorozměrné intervaly“ je přece „dělení m -rozměrného intervalu na m -rozměrné intervaly“.

Není ovšem „bezpodmínečně nutné“ brát při zavádění integrálu v úvahu jen intervaly. Je možný též tento postup: Definuje se „plocha množiny“ v dvourozměrném případě, „objem množiny“ v trojrozměrném případě, obecně „míra množiny“. Míru lze opět definovat různým způsobem a v žádném případě ji nelze rozumně rozšířit na všechny množiny vůbec; vždy zbudou v prostoru některé „neměřitelné“ množiny. Integrál pak lze definovat tak, že se vezme funkce (na př. omezená) na měřitelné množině K , tato množina se rozdělí na konečný počet měřitelných množin K_1, K_2, \dots, K_n , z nichž žádné dvě nemají společných bodů, a opět se vyšetřují součty tvaru na př. $\sum f(x_i) \mu(K_i)$, kde bod x_i leží v K_i a $\mu(K_i)$ značí míru množiny K_i . Při tomto postupu se žádné

větší obtíže nevyskytují — je k němu ovšem třeba napřed znát základní vlastnosti míry.

S tímto postupem pak úzce souvisí t. zv. Lebesgueův integrál, kterého se dnes nejvíce používá v matematické literatuře. Lze jej definovat různými způsoby; obvykle se však při jeho definici vychází z teorie míry.

Uvedeme tedy ještě několik slov o míře. Řekli jsme, že na př. v rovině je míra asi totéž jako plošný obsah (t. j. „plošná velikost“); obsah trojúhelníku, obdélníku, kruhu v „středoškolském“ slova smyslu není tedy nic jiného než dvourozměrná míra množiny všech bodů trojúhelníku atd. V čem spočívá úkol „zavést“, „definovat“ v rovině míru? Na střední škole jsme se sice učili vzorcům pro výpočet obsahů ploch různých obrazců, ale nevěděli jsme, co znamená („obecně“) plošný obsah obrazce. Místo obsah budeme však říkat míra, místo „obrazec“ — (bodová) množina. Zatím budeme mluvit jen o bodových množinách v rovině. Chceme tedy definovat „míru bodové množiny“. To znamená zejména, že chceme pokud možná každé nebo alespoň každé „rozumné“ bodové množině (při čemž otázku, které množiny pokládáme za rozumné, necháme zatím stranou) přiřadit nějakou „míru“; chceme tedy udat předpis, jak každé „rozumné“ množině přiřadit „rozumné“ jakési nezáporné číslo. Co to je „rozumně přiřadit“? To znamená zejména, že míra „všeobecně známých“ množin má souhlasit s jejich všeobecně známým obsahem; také bychom jistě chtěli, aby míra sjednocení dvou „rozumných“ množin, které nemají společných bodů, byla také definována a byla rovna součtu měr obou původních množin. Ukazuje se, že lze míru definovat několika různými způsoby tak, aby byly splněny takovéto základní požadavky. Při různých definicích může, ale nemusí vyjít nakonec totéž. Uvidíme, že různé definice mohou vést k různým systémům „rozumných množin“ (t. j. množin, pro něž je definována míra), že však platí značně obecná věta o jednoznačnosti; jestliže se nám vůbec podaří definovat míru pro nějakou množinu, je to možné za jistých dosti slabých předpokladů jen jedním způsobem.

A nyní konečně k věci. Jak tedy tu míru definovat? Uvedme příklad. Dejme tomu, že bychom chtěli bez užití čísla π určit obsah kruhu, neboli míru množiny bodů uvnitř a na obvodě dané kružnice. Můžeme postupovat tak, že narýsujeme kružnici na milimetrový papír a spočítáme všechny „čtvereční milimetry“, ležící uvnitř kružnice; tím dostaneme pro obsah kruhu odhad zdola. Spočítáme-li všechny čtverečky, které mají s kruhem společný aspoň jeden bod, dostaneme pro plochu kruhu odhad shora. Je patrné, že bychom mohli dostat odhady libovolně přesné, kdybychom měli možnost zvolit si dost jemně dělený papír. Abychom tedy mohli definovat podle tohoto vzoru míru, myslíme si v rovině posloupnost stále jemnějších čtvercových sítí. První síť volíme

na př. tak, že utvoříme všechny čtverce s celočíselnými souřadnicemi vrcholů o straně délky 1; druhou síť utvoříme tak, že každý z těchto čtverců rozdělíme na čtyři menší čtverce (stejně velké) a tak postupujeme dále. n -tá síť se tedy bude skládat z čtverců, z nichž každý bude mít vrholy o souřadnicích tvaru $\frac{a}{2^{n-1}}$ (a celé) a každý bude mít stranu

o délce $\frac{1}{2^{n-1}}$. Libovolné omezené množině M přisoudíme nyní dvě posloupnosti nezáporných čísel; n -tý člen první posloupnosti bude součet obsahů všech čtverců n -té sítě, které mají s množinou M společný aspoň jeden bod; n -tý člen druhé posloupnosti bude součet obsahů všech čtverců n -té sítě, obsažených v M . (Obsahem čtverce n -té sítě míníme ovšem číslo $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$).

Z názoru je jasné (vzhledem k postupnému dělení čtverců), že první posloupnost neroste, druhá neklesá; obě tedy mají limitu. První limita jistě není menší než druhá; první se nazývá horní, druhá dolní Jordanovou měrou množiny M . Lze ukázat, že pro „všeobecně známé“ obrazce je tato horní a dolní míra stejná a rovná se skutečně příslušnému „všeobecně známému“ obsahu. Množina, jejíž horní a dolní Jordanova míra se shodují, se nazývá množinou jordanovsky měřitelnou. Poznamenejme ještě, že Jordanovu míru omezené množiny M můžeme velmi jednoduše definovat takto:

Pokryjeme množinu M na všechny možné způsoby konečným počtem obdélníků (mohou se i překrývat); při každém pokrytí sečteme obsahy pokrývajících obdélníků a ze všech takto získaných čísel vezmeme infimum; to nazveme horní měrou. Dolní míru definujeme jako supremum množiny součtů obsahů obdélníků, vepsaných do množiny M (ty se ovšem již nesmějí překrývat).

Lze ukázat, že tato definice dává týž výsledek jako definice předcházející, není však účelné přímo z ní vycházet. Použijeme-li totiž druhé definice, dělá obtíž důkaz triviální věty, že míra obdélníka je rovna jeho obsahu (v obvyklém slova smyslu). I k důkazům jiných vět se lépe hodí první definice. — Limitním přechodem lze pak definovat horní a dolní míru i pro množiny neomezené.

Jordanova míra má sice některé zajímavé vlastnosti, ale má několik zásadních vad. Hlavní vada je, že všechny jordanovsky měřitelné množiny jsou „příliš rozumné“, lépe řečeno opačné: mnoho množin, s nimiž se v analýze setkáváme, již mezi tyto „příliš rozumné“ množiny nepatří; to znamená, že horní a dolní míra takové množiny jsou různá čísla. Abychom to nahlédli, zvolme v rovině nějaký čtverec (na př. o straně 1 a celočíselných souřadnicích vrcholů). Pak množina vrcholů všech našich čtvercových sítí (pomocí nichž jsme definovali Jordanovu míru), které leží uvnitř zvoleného čtverce, má zřejmě dolní míru 0,

horní míru 1. Tím se pak téměř ztrácí možnost takovou množinu po stránce míry vyšetřovat. Vada, která to vše způsobuje, tkví v této věci: Jestliže dvě množiny jsou jordanovsky měřitelné, je též jejich sjednocení množina jordanovsky měřitelná; podobná věta ovšem platí pro libovolný konečný počet množin. Máme-li však posloupnost jordanovsky měřitelných množin, nemusí již, jak ukazuje tento příklad, jejich sjednocení být množinou jordanovsky měřitelnou. (Jednobodová množina má totiž zřejmě Jordanovu míru rovnou nule a všech vrcholů našich sítí je jen spočetně mnoho.) Z tohoto důvodu je práce s Jordanovou měrou nepohodlná a v matematické literatuře se dnes používá téměř výhradně jiné míry, t. zv. Lebesgueovy, která je zobecněním Jordanovy míry a která má již tu vlastnost, že s každou posloupností (lebesgueovskými) měřitelných množin je i jejich sjednocení množina měřitelná. Nemají-li nadto žádné dvě různé množiny daného spočetného systému společné body, je míra sjednocení systému rovna součtu řady měr jednotlivých členů. Odtud plyne zejména, že každá spočetná množina má Lebesgueovu míru rovnou nule.

Lebesgueovu míru lze opět zavést několika způsoby. Snadno lze definovat horní Lebesgueovu míru libovolné množiny M takto:

Pokryjeme množinu M na všechny možné způsoby posloupností obdélníků (mohou se i překrývat); při každém pokrytí sečteme obsahy pokrývajících obdélníků a ze všech takto získaných čísel vezmeme infimum; toto infimum nazveme horní Lebesgueovou měrou množiny M .

Je vidět, že se zde již nemusíme „omezovat“ na množiny omezené; posloupností obdélníků můžeme pokrýt třeba i celou rovinu. Všimněme si, že se naše definice horní Lebesgueovy míry liší od druhé definice Jordanovy míry vlastně jen jedním slovem; místo „konečným počtem“ je zde „posloupností“. A přece toto jedno slovo má v historii moderní matematiky nemalý význam; byl to právě Lebesgue, který měl šťastný nápad toto slovo sem umístit.

Označíme-li nyní symbolem $A + B$ množinové sjednocení množin A, B a symbolem $\Gamma(A)$ horní Lebesgueovu míru množiny A , můžeme měřitelné množiny charakterisovat takto: Množinu M nazveme měřitelnou, jestliže platí

$$\Gamma(A) + \Gamma(B) = \Gamma(A + B),$$

kdykoli množina A je částí M a množina B nemá s množinou M společných bodů. [Obecně totiž může platit $\Gamma(A + B) < \Gamma(A) + \Gamma(B)$, i když množiny A, B nemají body společné.] Ukazuje se pak, že systém měřitelných množin má již opravdu dobré vlastnosti. (Pro měřitelnou množinu vezmeme za „míru“ její „horní míru“.) Zejména pak platí, jak jsme poznamenali, že sjednocení každé posloupnosti měřitelných množin je rovněž množina měřitelná. Právě tato okolnost způsobila, že má Lebesgueova míra pro teorii reálných funkcí přímo zásadní význam, kdežto Jordanova míra je celkem bezvýznamná.

Máme-li v rovině zavedenu míru, můžeme definovat, jak bylo uvedeno, dvourozměrný integrál „pomocí dělení“; vhodnou úpravou postupu a použitím Lebesgueovy míry dostáváme t. zv. Lebesgueův integrál. Zmíníme se však ještě o jiném možném, patrně názornějším postupu. Máme-li totiž definovanou míru v rovině, můžeme velmi jednoduše definovat integrál jednorozměrný. Mějme napřed v intervalu $\langle a, b \rangle$ omezenou nezápornou funkci f . Tato funkce určuje v rovině množinu A_f těch bodů, které leží mezi přímkami $x = a$, $x = b$, osou x a grafem funkce f . Můžeme tedy definovat na př. horní nebo dolní „Jordanův“ integrál funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$ jakožto horní nebo dolní Jordanovu míru množiny A_f . Podobně můžeme definovat horní Lebesgueův integrál funkce f , i když je f libovolná nezáporná funkce třeba i v neomezeném intervalu. Je-li množina A_f jordanovsky (lebesgueovsky) měřitelná, řekneme, že má funkce f Jordanův (Lebesgueův) integrál. Mění-li funkce f své znamení, existují zřejmě nezáporné funkce f_1, f_2 tak, že $f = f_1 - f_2$. Jsou-li obě množiny A_{f_1}, A_{f_2} měřitelné a mají-li konečnou míru, definujeme integrál funkce f jako rozdíl integrálů funkcí f_1, f_2 .

Snadno zjistíme, jaký význam má otázka, zda sjednocení posloupnosti měřitelných množin je množina měřitelná, pro teorii integrálu. Mějme na př. v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ neklesající posloupnost nezáporných funkcí f_1, f_2, \dots ($f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$) pro každé přirozené n a pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Posloupnost $f_n(t)$ má pro každé t limitu (aspoň v širším smyslu); předpokládejme pro jednoduchost, že je tato limita v každém bodě konečná. Pak můžeme utvořit funkci f , pro niž platí $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$.

Utvořme ke každé funkci f_n i k funkci f množinu A_n (resp. A) tak, jak bylo naznačeno v předešlém odstavci; přesněji řečeno, buď A_n množina všech $[x, y]$, pro něž platí $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y < f_n(x)$. (Podobně definujeme množinu A .) Snadno se přesvědčíme, že množina A je sjednocením všech množin A_n . Mají-li funkce f_n Jordanův integrál, nemáme ani zde zaručeno, že ho bude mít funkce f . [Lze totiž ukázat, že funkce, která se v konečném počtu bodů intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ rovná 1 a jinde se rovná 0, má Jordanův integrál; ale funkce, rovná 1 ve všech racionálních bodech intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, tento integrál nemá přes to, že je limitou neklesající posloupnosti funkcí, z nichž každá je v „několika prvních“ racionálních bodech (myslíme si tyto body seřazený v posloupnost) rovna 1 a jinde rovna nule.] Z uvedeného je však jasné, že funkce f bude mít Lebesgueův integrál, jakmile ho budou mít funkce f_n (tento integrál však může být nekonečný, nepřidáme-li žádný další předpoklad). Odtud lze pak již snadno dokázat, že pro Lebesgueův integrál platí věta 1 tohoto paragrafu.

Poznamenejme ještě, že Jordanův integrál, o němž byla řeč, se přesně shoduje s integrálem Riemannovým.

Naznačili jsme, jak lze definovat míru v rovině a tím též integrál pro funkce jedné proměnné. Úplně stejně lze postupovat v m -rozměrném prostoru; stačí nahradit obdélníky m -rozměrnými intervaly. Pomocí m -rozměrné míry lze pak snadno definovat $(m - 1)$ -rozměrný integrál. Z Lebesgueovy míry vyjde ovšem Lebesgueův integrál, z Jordanovy míry Riemannův integrál. To je asi nejjednodušší způsob, jak definovat integrál, zejména Lebesgueův; tento způsob má však bohužel zase některé vážné vady. Na př. důkaz věty, že integrál ze součtu se rovná součtu integrálů, není při tomto postupu nijak jednoduchý, a proto se obvykle zavádí integrál jinak; těmito otázkami se však již zdržovat nebudeme. Poznamenejme jen, že při zavádění Lebesgueovy míry je největší obtíž opět v důkaze věty, že míra intervalu je rovna jeho objemu.

Viděli jsme, jak je možno definovat integrál pomocí míry; my však budeme postupovat obráceně a budeme definovat míru pomocí integrálu, a to tímto způsobem: Zvolíme libovolnou (pro jednoduchost omezenou) část M m -rozměrného prostoru a definujeme v tomto prostoru funkci c_M (t. zv. charakteristickou funkci množiny M) tak, že klademe $c_M(x) = 1$ pro $x \in M$ a $c_M(x) = 0$ pro $x \notin M$; míru množiny M pak definujeme jako integrál funkce c_M , pokud tento integrál existuje. Riemannův integrál dá zase Jordanovu míru, Perronův integrál dá Lebesgueovu míru. (Pro intervaly zřejmě bude takto definovaná míra souhlasit s objemem; dá se tedy očekávat, že dostaneme souhlas s jinak definovanou měrou i u ostatních množin.)

„Zkritisujeme“ nyní Lebesgueovu teorii integrálu. Je to theorie přehledná a ucelená; její výhodou je, že se jí dá použít i v abstraktních prostorech, v nichž není řeč třeba ani o topologii. Lze však uvěřit, že se nám takovým příliš obecným postupem nepodaří vniknout dost hluboko do toho, co potřebujeme v Euklidových prostorech. Hlavní vadou theorie Lebesgueova integrálu je to, že zachycuje jen integrály, které konvergují absolutně; není tedy Lebesgueův integrál zobecněním ani nevlastního Riemannova ani Newtonova integrálu. (Na př. derivace

funkce $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$, doplněné v bodě nula příslušnou limitou, nemá v in-

tervalu $\langle -1, 1 \rangle$ Lebesgueův integrál, ač tam má nevlastní Riemannův i Newtonův integrál. Z tohoto příkladu je zároveň vidět, že nikterak pro Lebesgueův integrál neplatí věta 2.) Lze se domnívat, že zvláště pro začátečníky je vhodnější theorie integrálu Perronova než integrálu Lebesgueova. Teorii Perronova integrálu lze totiž vybudovat tak, že se pracuje jen s pojmy limity posloupnosti a vícerozměrného intervalu; ani o míře ani o topologii se přitom nemusí mluvit. Důkazy vět o integrálu vypadají též přirozeněji než u integrálu Lebesgueova a obvykle jsou značně jednodušší.

Vztah mezi Perronovým a Lebesgueovým integrálem je jednoduchý: *Funkce f má v intervalu K Lebesgueův integrál, když a jen když mají obě funkce f i $|f|$ Perronův integrál.*

Vidíme, že Perronův integrál je zobecněním Lebesgueova integrálu, a to takovým, že Lebesgueova teorie zachycuje právě ty Perronovy integrály, které konvergují absolutně. Pro nezáporné funkce jsou tedy obě definice ekvivalentní.

Srovnáme-li Lebesgueův integrál s vlastním Riemannovým integrálem, vidíme ohromný rozdíl. Již tak jednoduchá funkce jako charakteristická funkce množiny racionálních čísel nemá Riemannův integrál; naproti tomu omezenou funkci, která by neměla Lebesgueův integrál (v omezeném intervalu), asi nikdo nikdy nesestrojí. Lebesgueova teorie velmi podstatně omezila „neexistenci integrálů“, která spočívala v přílišné nespojitosti dané funkce. Ale příklad derivace

funkce $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ ukazuje, že se zato objevil jiný důvod neexistence integrálu, a to ten, že funkce „příliš střídá znamení“. Perronovi se však podařilo geniálním a dodnes nedoceněným nápadem radikálně omezit oba „důvody neexistence“ zároveň.

Nakonec se ještě na chvíli vrátíme k integrálu Stieltjesovu. Mluvili jsme pro jednoduchost jen o „obyčejné“ míře, t. j. míře, vytvořené objemem intervalu. Zcela obdobně lze vyšetřovat libovolnou nezápornou aditivní funkci intervalu; výsledky jsou také zcela obdobné. Jen v jednom bodě se projevuje podstatnější rozdíl. Obyčejnou míru se nám podařilo rozšířit z intervalů na obecnější množiny. „Obecná“ funkce intervalu μ nám rovněž definuje jakousi funkci $\tilde{\mu}$ na velmi širokém systému množin; funkce $\tilde{\mu}$ však nemusí být vždy rozšířením funkce μ . Pro některý interval K může totiž platit $\tilde{\mu}(K) \neq \mu(K)$. Na př. v jednorozměrném případě, kdy je funkce μ vytvořena neklesající funkcí φ (definované třeba na celé přímce), je $\mu(\langle a, b \rangle) = \varphi(b) - \varphi(a)$, kdežto

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(\langle a, b \rangle) &= \varphi(b+) - \varphi(a-), \\ \tilde{\mu}([a, b)) &= \varphi(b-) - \varphi(a+); \end{aligned}$$

$\tilde{\mu}$ pro jednobodovou množinu $\{b\}$ je rovno $\varphi(b+) - \varphi(b-)$. ($\varphi(b+)$ značí $\lim_{x \rightarrow b+} \varphi(x)$ atd.) Je-li tedy funkce φ spojitá, „nepříjemnost“ zmizí.

Víme však, že v mnohých případech, na př. v počtu pravděpodobnosti, má velký význam Stieltjesův integrál i podle funkce nespojitě.

Není nezbytně nutné předpokládat o funkci μ , podle které se integruje, že je nezáporná. Velká většina vět, které odvodíme, má smysl a zachová platnost, i když je μ funkce „s konečnou variací“, t. j. když lze funkci μ vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných aditivních funkcí. Na tento případ však přeneseme (jednoduchým způsobem) teprve vý-

sledky; kdybychom v důkazech připustili kladné i záporné hodnoty funkce μ , vše by se velmi zkomplikovalo.

Nakonec ještě něco o označení. Viděli jsme, že Riemannův integrál $\int f(x) d\varphi(x)$ je číslo, které lze v jistém smyslu libovolně dobře aproximovat součty tvaru $\sum f(x_i) (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))$; integrál je jakousi „limitou“ takovýchto součtů. Lze tušit, že znamení Σ přešlo ve znamení \int a místo čísel $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$, „diferencí“ funkčních hodnot funkce φ , nastoupilo znamení „ $d\varphi(x)$ “, „diferenciál“ funkce φ . Že jsme o diferenciálu nemluvili, není nedopatření, nýbrž úmysl; tento pojem nebudeme definovat, protože bychom ho nemohli k ničemu použít. Kdybychom probírali jen obyčejný integrál, pak bychom vůbec žádný „diferenciál“ nepotřebovali; stačilo by psát $\int_a^b f$ nebo $\int_K f$. Protože však máme Stieltjesův integrál, musíme umět naznačit, podle které funkce integrujeme. Okolnost, že integrujeme podle funkce μ , event. v jednorozměrném případě podle bodové funkce φ , naznačíme tedy tím, že za integrovanou funkci napíšeme „ $d\mu$ “ nebo „ $d\varphi(x)$ “. Hlubší význam těmto symbolům dávat nebudeme.

II. Definice integrálu a jeho základní vlastnosti.

V této části jsou dokázány základní věty o vícerozměrném *Perron-Stieltjesovu integrálu*, zejména věta o záměně limity a integrálu, *Fubiniova věta* o převodu $m + n$ -rozměrného integrálu na m -rozměrný integrál z n -rozměrného integrálu a věta o převodu *Stieltjesova integrálu* na objemový (ve speciálním tvaru). Pro jednorozměrné integrály je pak dokázána zejména 2. věta o střední hodnotě, věta o integraci per partes a věta o substituci (ve speciálním tvaru).

1. Čtenář jistě ví, co je důkaz úplnou indukcí. Je to jisté použití tohoto axiomu: *Nechť množina M obsahuje číslo 1 a nechť má tu vlastnost, že do ní patří číslo $n + 1$, jakmile do ní patří číslo n . Pak množina M obsahuje všechna přirozená čísla.*

Čtenář nechť si rozmyslí, jak se tohoto axiomu při důkaze úplnou indukcí používá.

Něco jiného je však definice úplnou indukcí. Při definici úplnou indukcí je udán předpis, který prvkům a_1, a_2, \dots, a_n přiřazuje prvek a_{n+1} . (Nejčastěji se v tomto předpise efektivně vyskytuje z prvků a_1, \dots, a_n jen poslední prvek; budeme však probírat hned obecný případ.) Tímto předpisem se pak konstruuje (nekonečná) posloupnost a_1, a_2, a_3, \dots . Všimněme si však, že z uvedeného axiomu, z něhož bezprostředně plyne možnost důkazu úplnou indukcí, neplyne tak snadno, že takováto posloupnost a_1, a_2, a_3, \dots vůbec existuje; to nyní dokážeme. Nebudeme se omezovat na posloupnosti čísel; budeme totiž sestřojovat

také na př. posloupnosti intervalů, a proto důkaz provedeme hned pro posloupnosti prvků z libovolné množiny. Platí tedy věta:

2. Budiž M neprázdná množina; nechť $a \in M$. Mějme předpis P , který každé konečné posloupnosti b_1, b_2, \dots, b_n prvků z M přiřazuje opět jistý prvek z M ; ten označme $P(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Pak existuje právě jedna (nekonečná) posloupnost a_1, a_2, a_3, \dots prvků z M taková, že platí

$$(V) \quad \begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = P(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ pro } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Důkaz: I. Napřed dokážeme, že ke každému přirozenému n existuje právě jedna konečná posloupnost a_1, a_2, \dots, a_n taková, že platí

$$(V_n) \quad \begin{cases} a_1 = a, \\ a_{k+1} = P(a_1, \dots, a_k) \text{ pro každé přirozené } k < n. \end{cases}$$

To zřejmě platí pro $n = 1$; nechť to platí pro jisté n . To znamená, že existuje právě jedna (konečná) posloupnost a_1, \dots, a_n , která splňuje (V_n) . Volíme-li $a_{n+1} = P(a_1, \dots, a_n)$, pak zřejmě posloupnost a_1, \dots, a_n, a_{n+1} splňuje (V_{n+1}) . Jestliže nyní b_1, \dots, b_n, b_{n+1} také splňuje (V_{n+1}) , pak b_1, \dots, b_n splňuje (V_n) a tedy podle indukčního předpokladu o jednoznačnosti je $b_1 = a_1, \dots, b_n = a_n$ a podle (V_{n+1}) je $b_{n+1} = P(b_1, \dots, b_n) = P(a_1, \dots, a_n) = a_{n+1}$. Tím je proveden indukční krok a tvrzení I. je dokázáno.

II. Podle I. můžeme tedy každému přirozenému n přiřadit právě jednu konečnou posloupnost

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$$

o vlastnosti (V_n) . Je-li $m > n$, pak pro příslušnou posloupnost $a_1^{(m)}, \dots, a_2^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}, \dots, a_m^{(m)}$ platí podle I.

$$a_1^{(m)} = a_1^{(n)}, a_2^{(m)} = a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(m)} = a_n^{(n)}.$$

Vidíme tedy, že je horní index zbytečný a že můžeme psát

$$a_n^{(m)} = a_n^{(n)} = a_n.$$

Čtenář nyní snadno ověří, že takto sestavená nekonečná posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

splňuje (V) a že je to jediná taková posloupnost.

Poznámka. Často se definice úplnou indukcí vyslovuje v poněkud jiné formě; bývá totiž udán předpis P , který přiřazuje ne všem, nýbrž jen některým konečným posloupnostem a_1, \dots, a_n prvků z M prvek $a_{n+1} = P(a_1, \dots, a_n)$. Věty 2 se však i zde dá snadno použít. Přidáme k množině M nějaký prvek ω , který v M neleží; vzniklou množinu označíme M_1 . Předpis P doplníme tak, že každé posloupnosti b_1, \dots, b_n prvků z M_1 , které nebylo původně nic přiřazeno, přiřadíme prvek ω .

Pak je třeba úplnou indukcí dokázat, že v sestrojené nekonečné posloupnosti prvků z M_1 se prvek ω nikde nevyskytne. (To ovšem nemusí vždy platit; záleží to na předpise P .) Podobně lze postupovat při důkaze, že neexistuje posloupnost prvků z M jisté vlastnosti; tu se naopak dokazuje, že se v sestrojené posloupnosti prvek ω vyskytuje od jistého indexu stále.

Někdy není přímo udán předpis, který prvkům a_1, \dots, a_n přiřazuje prvek a_{n+1} , nýbrž se jen zjistí, že ke každé konečné posloupnosti a_1, a_2, \dots, a_n existuje prvek a_{n+1} jisté vlastnosti. I zde můžeme použít věty 2; myslíme si prostě, že z množiny všech takových prvků, příslušných k posloupnosti a_1, a_2, \dots, a_n , vždy jeden prvek vybereme a označíme $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

V konkrétních případech budeme definici indukce pro stručnost jen naznačovat; čtenář necht' si rozmyslí, jak se na př. při důkaze věty 11 používá věty 2.

3. Buďte A, B neprázdné množiny. Zobrazením množiny A do množiny B rozumíme předpis, který každému prvku z A přiřazuje právě jeden prvek z B . Každé zobrazení určuje tedy jistou množinu Z dvojic $[a, b]$, kde $a \in A, b \in B$ a kde b je prvek, přiřazený daným předpisem prvku a ; přitom se každý prvek $a \in A$ vyskytuje právě v jedné dvojici $[a, b] \in Z$. Naopak snadno nahlédneme, že každá množina Z uvedených vlastností definuje zobrazení A do B ; stačí prvku $a \in A$ přiřadit ten prvek $b \in B$, pro nějž $[a, b] \in Z$.

Zobrazení značíme často symboly f, g, φ, F a pod. Prvek, přiřazený zobrazením f prvku a , značíme pak $f(a)$.

Všimněme si, že n -členná posloupnost a_1, a_2, \dots, a_n prvků z libovolné množiny M je vlastně zobrazení množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ do M ; nekonečná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z M je zobrazení množiny všech přirozených čísel do M . Obecně nazveme souborem prvků z M zobrazení nějaké neprázdné množiny N do množiny M ; symbol $\{a_\nu\}_{\nu \in N}$ značí, že prvku $\nu \in N$ je přiřazen prvek $a_\nu \in M$.

Symbolem $\{a, b, c, \dots\}$ se obyčejně rozumí množina, která obsahuje prvky a, b, c, \dots ; zejména tedy $\{a\}$ značí množinu, která obsahuje jediný prvek a . Podobně se někdy symbolem $\{a_\nu\}_{\nu \in N}$ značí též množina všech a_ν , kde $\nu \in N$; nedorozumění jistě nevznikne.

4. Je-li $\{A_\nu\}_{\nu \in N}$ soubor množin (t. j. zobrazení množiny N do nějakého systému množin), pak sjednocením tohoto souboru nazveme množinu ΣA_ν , všech prvků, které patří aspoň do jedné z množin A_ν ; průnikem

tohoto souboru nazveme množinu ΠA_ν , všech prvků, které patří zároveň

do všech A_ν . Je-li $N = \{1, 2, \dots, n\}$, píšeme též $\sum_{\nu=1}^n A_\nu$ nebo $A_1 + \dots + A_n$,

resp. $\prod_{i=1}^n A_i$, nebo $A_1 \dots A_n$; obdobně pro případ $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát též ΣA_i , ΠA_i , a pod.

Jsou-li A, B množiny, pak $A - B$ značí množinu všech prvků z A , které nepatří k B . Množinu prázdnou značíme symbolem \emptyset .

Čtenář snadno dokáže formule

$$\begin{aligned} A \Sigma B_i &= \Sigma AB_i, & A + \Pi B_i &= \Pi(A + B_i), \\ A(B - C) &= AB - AC, \\ A - \Sigma B_i &= \Pi(A - B_i), \\ A - \Pi B_i &= \Sigma(A - B_i). \end{aligned}$$

Je-li každý prvek množiny A zároveň prvkem množiny B , píšeme $A \subset B$ a říkáme, že A je částí (podmnožinou) množiny B . Znamení \subset tedy nevylučuje rovnost. Místo $A \subset B$ píšeme též $B \supset A$.

Je-li $AB = \emptyset$, říkáme, že množiny A, B jsou disjunktní.

Jestliže existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která obsahuje všechny prvky množiny A (to znamená, že platí $A \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), řekneme, že množina A je spočetná, nebo že obsahuje spočetně mnoho prvků a pod. Je-li $A_i \subset C \subset \{a_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ pro $i = 1, 2, 3, \dots$, pak posloupnost

$$a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, a_2^{(3)}, a_3^{(2)}, a_3^{(1)}, a_1^{(4)}, a_2^{(3)}, \dots$$

obsahuje všechny prvky množiny $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Vidíme, že sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je opět množina spočetná. (Není ovšem každá množina spočetná; viz cvič. 14.)

5. Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_m množiny, pak jejich kartézským součinem nazveme množinu $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ všech m -tic $[a_1, a_2, \dots, a_m]$,¹⁾ kde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_m \in A_m$. Množina A je prázdná, když a jen když je aspoň jedna z množin A_1, A_2, \dots, A_m prázdná. Obdobně lze definovat kartézský součin libovolného souboru množin.

6. Buď $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m, B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$. Pak platí:

- $AB = A_1 B_1 \times A_2 B_2 \times \dots \times A_m B_m$;
- je-li $\emptyset \neq A \subset B$, je $A_i \subset B_i$ pro $i = 1, 2, \dots, m$;
- je-li $A \neq C \neq B, A + B = C = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_m$, pak existuje j tak, že platí

$$A_j \neq C_j \neq B_j, A_j + B_j = C_j$$

a pro $i \neq j$ je

$$A_i = B_i = C_i.$$

¹⁾ „ m -tice“ znamená ovšem „ m -členná posloupnost“, nikoli snad „množina m prvků“.

Důkaz: a) i b) dokáže čtenář snadno sám; dokážeme jen c). V tomto případě je $A \neq \emptyset$ (jinak by bylo $B = C$), tedy podle b) platí $A_i \subset C_i$ a podobně $B_i \subset C_i$ pro $i = 1, 2, \dots, m$. Protože však $A \neq C$, existuje j tak, že $A_j \neq C_j$. Kdyby nyní pro některé $k \neq j$ platilo $B_k \neq C_k$, mohli bychom volit $c_j \in C_j - A_j$, $c_k \in C_k - B_k$ a pro $i \neq j$, $i \neq k$ libovolně $c_i \in C_i$; prvek $[c_1, c_2, \dots, c_m]$ by pak ležel v C , ale neležel by v A ani v B ve sporu se vztahem $A + B = C$. Je tedy $B_i = C_i$ pro každé $i \neq j$; protože však $B \neq C$, je $B_j \neq C_j$. Stejnou úvahou nyní zjistíme, že také $A_i = C_i$ pro každé $i \neq j$. Protože vztah $A_j + B_j = C_j$ je zřejmý, je věta dokázána.

7. E_1 bude značit množinu reálných čísel (jednorozměrný Euklidův prostor); E_m (m -rozměrný Euklidův prostor) značí množinu

$$\underbrace{E_1 \times E_1 \times \dots \times E_1}_{m\text{-krát.}}$$

8. E_1^* bude značit množinu \bar{E}_1 , zvětšenou o prvky ∞ a $-\infty$. Význam symbolů $<$, \leq , $>$, \geq pro množinu E_1^* je jistě zřejmý. Dále klademe

$$a + \infty = \infty + a = \infty + \infty = \infty, \quad a - \infty = -\infty + a = -\infty - \infty = -\infty$$

pro každé $a \in E_1$. O symbolech $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$ řekneme, že nemají smysl.

Podobně definujeme součet více sčítanců. Pokud má takový součet smysl, můžeme jej zřejmě libovolným způsobem „uzávorkovat“ a závorky sečíst v libovolném pořádku.

Dále definujeme

$$|\infty| = |-\infty| = \infty = -(-\infty), \\ a \cdot \infty = \infty, \text{ resp. } = 0, \text{ resp. } = -\infty$$

podle toho, je-li $a > 0$, resp. $a = 0$, resp. $a < 0$, a klademe

$$a \cdot (-\infty) = (-a) \cdot \infty.$$

Pro $0 < |b| < \infty$ značí ovšem $\frac{a}{b}$ totéž jako $a \cdot \frac{1}{b}$; význam symbolu $\frac{a}{b}$

však rozšíříme předpisem

$$\frac{a}{0} = \infty \text{ pro } a > 0, \quad \frac{a}{0} = -\infty \text{ pro } a < 0.$$

Symbolům $\frac{0}{0}$, $\frac{a}{\infty}$ nebudeme připisovat žádný význam.

9. Prvek $c \in E_1^*$ nazveme horním (dolním) odhadem množiny $A \subset E_1^*$, platí-li implikace $a \in A \Rightarrow a \leq c$ ($a \in A \Rightarrow a \geq c$). Množinu A

nazveme shora (zdola) omezenou, existuje-li číslu $c \in E_1$, které je jejím horním (dolním) odhadem. Shora i zdola omezená množina se nazývá množinou omezenou. Je-li $A \subset E_1^*$, má množina všech horních odhadů množiny A vždy nejmenší prvek; ten značíme $\sup A$ (supremum množiny A). (Je-li $AE_1 \neq \emptyset$, A shora omezená,²⁾ shoduje se $\sup A$ s obvyklým významem suprema množiny AE_1 v množině E_1 ; není-li A shora omezená, je ovšem $\sup A = \infty$; protože každý prvek je horním odhadem prázdné množiny, je $\sup \emptyset = -\infty$ a ovšem také $\sup\{-\infty\} = -\infty$.) Supremum množiny A je tedy jejím „nejlepším“ horním odhadem. Podobně $\inf A$ značí největší („nejlepší“) dolní odhad množiny A . Pro $A \neq \emptyset$ je vždy $\sup A \geq \inf A$; pro $A = \emptyset$ je však $\sup A = -\infty$, $\inf A = \infty$.

Supremem (infimem) souboru $\{a_\nu\}_{\nu \in N}$ rozumíme ovšem supremum (infimum) množiny všech a_ν ; místo $\sup\{a_\nu\}_{\nu \in N}$ píšeme obyčejně $\sup_{\nu \in N} a_\nu$ nebo „ $\sup a_\nu$ “, kde $\nu \in N$ “ a pod.

10. Význam symbolu $a_n \rightarrow a$ neboli $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ v množině E_1^* je jistě zřejmý. Neklesající posloupnost má v E_1^* vždy limitu; ta se rovná jejímu supremu. Podobně je tomu pro posloupnost nerostoucí. Platí-li $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, píšeme $a_n \nearrow a$; podobný význam má $a_n \searrow a$. Je-li $c \in E_1$, $a_n \rightarrow a$, pak též $ca_n \rightarrow ca$. (Pro $|c| = \infty$ to nemusí platit.)

Pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ prvků z E_1^* definujeme

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} a_k), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} a_k).$$

Zřejmě existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, když a jen když $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Má-li množina $A \subset E_1^*$ největší prvek a , je zřejmě $a = \sup A$; v tomto případě píšeme též $a = \max A$; podobně pro soubor a pro infimum.

Dále zavádíme označení

$$\max(a, 0) = a_+, \quad \min(a, 0) = a_-^3)$$

pro libovolné $a \in E_1^*$. Platí pak

$$a = a_+ + a_-, \quad |a| = a_+ - a_-.$$

Čtenář snadno dokáže tato tvrzení:

a) $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b \Rightarrow \max(a_n, b_n) \rightarrow \max(a, b)$, $\min(a_n, b_n) \rightarrow \min(a, b)$.

²⁾ Pro shora omezenou množinu A znamená podmínka $AE_1 \neq \emptyset$, že není ani $A = \emptyset$ ani $A = \{-\infty\}$.

³⁾ Vlastně bychom měli psát $\max\{a, 0\}$ atd.

$$b) 0 \leq c < \infty \Rightarrow \sup\{ca_\nu\}_{\nu \in N} = c \sup\{a_\nu\}_{\nu \in N}; \sup\{-a_\nu\}_{\nu \in N} = \\ = -\inf\{a_\nu\}_{\nu \in N}.$$

c) Necht $c \leq a_\nu + b_\mu$ pro každé $\nu \in N, \mu \in M$. Pak platí

$$c \leq \inf_{\nu} a_\nu + \inf_{\mu} b_\mu,$$

jakmile má poslední součet smysl.

11. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z E_1^* . Pak existuje posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tak, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Důkaz: Je-li $\overline{\lim} a_n = -\infty$, volíme $a_{k_n} = a_n$. Je-li $\overline{\lim} a_n = a > > -\infty$, existují $c_n < a$ tak, že $c_n \nearrow a$. (Je-li $a = \infty$, volíme $c_n = n$; jinak volíme $c_n = a - \frac{1}{n}$.) Kdyby k některému n existoval jen konečný počet indexů i takových, že $a_i > c_n$, bylo by pro dostatečně velká m $a_m \leq c_n$ a tedy $a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \leq c_n < a$, což není pravda. Ke každému n je tedy pro nekonečně mnoho i $a_i > c_n$. Můžeme tedy volit k_1 tak, aby $a_{k_1} > > c_1$, dále $k_2 > k_1$, aby $a_{k_2} > c_2$ atd. Zřejmě

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

tedy $a_{k_n} \rightarrow a$ pro $n \rightarrow \infty$.

Poznámka: Z posloupnosti $\{a_n\}$ ovšem nelze vybrat posloupnost s limitou větší než $\overline{\lim} a_n$; číslo $\overline{\lim} a_n$ lze tedy podle předešlé věty charakterisovat jako největší možnou limitu posloupnosti, vybrané z $\{a_n\}$. — Posloupnostem, které mají limitu v E_1 , budeme říkat posloupnosti konvergentní. Z předešlé věty pak plyne jako snadný důsledek: Z každé omezené posloupnosti $\{a_n\}$, $b \leq a_n \leq c$ pro $n = 1, 2, \dots$, lze vybrat posloupnost konvergentní $\{a_{k_n}\}$ (kde ovšem $b \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} \leq c$).

12. Intervalem m -rozměrným budeme vždy rozumět kartézský součin m omezených uzavřených intervalů. Množina A je tedy m -rozměrným intervalem, když a jen když platí

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m,$$

kde

$$A_i = \langle a_i, b_i \rangle, \quad -\infty < a_i < b_i < \infty \text{ pro } i = 1, 2, \dots, m.$$

Připustíme-li zde za A_i také jednobodové části E_1 a předpokládáme-li, že aspoň jedna z množin A_i je jednobodová, dostáváme definici degenerovaného intervalu.

Množinám A_1, A_2, \dots, A_m říkáme též hrany intervalu. — Je-li A interval, pak jeho vnitřkem nazveme množinu A° , která je kartézským součinem příslušných otevřených intervalů, t. j. vnitřků hran intervalu A .

Středem intervalu $\langle a, b \rangle$ nazveme bod $\frac{a+b}{2}$. Středem intervalu $K = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ nazveme bod $[s_1, s_2, \dots, s_m]$, kde s_i je střed A_i pro $i = 1, 2, \dots, m$.

Délkou intervalu $\langle a, b \rangle$ rozumíme číslo $b - a$. Intervalu (m -rozměrnému), jehož všechny hrany mají stejnou délku, říkáme (m -rozměrná) krychle.

13. Jsou-li $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ prvky E_m , položme

$$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_m - y_m|).$$

Vztah $\rho(x, y) = 0$ zřejmě platí, když a jen když $x = y$.

Je-li

$$\emptyset \neq M \subset E_m, a \in E_m,$$

budiž

$$\rho(a, M) = \inf \rho(a, x), \text{ kde } x \in M,$$

$$d(M) = \sup \rho(x, y), \text{ kde } x, y \in M.$$

Je-li I interval, je ovšem $d(I)$ největší z délek hran intervalu I .

Jestliže $x_n, x \in E_m$ a jestliže $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, řekneme, že posloupnost bodů x_n konverguje k bodu x a píšeme $x_n \rightarrow x$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$; říkáme též, že bod x je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

Je-li $\rho(a, A - \{a\}) = 0$ ($A - \{a\}$ značí ovšem množinu A , z níž byl event. odstraněn bod a), řekneme, že bod a je hromadným bodem množiny A . To nastane, když a jen když existují $a_n \in A$, $a_n \neq a$, $a_n \rightarrow a$. Každý bod intervalu A je hromadným bodem vnitřku A° intervalu A .

Jestliže $x_n = [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}]$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]$, pak platí $x_n \rightarrow x$, když a jen když $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$ pro $i = 1, 2, \dots, m$, jak se čtenář snadno přesvědčí; každá posloupnost bodů prostoru E_m má tedy nejvýš jednu limitu.

Je-li K m -rozměrný interval a je-li $x_n \in K$ pro $n = 1, 2, \dots$, $x_n = [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}]$, můžeme podle 11 vybrat takovou posloupnost $\{x_{k_n}\}$, aby posloupnost prvních souřadnic $\{x_1^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$ byla konvergentní. Odtud můžeme dále vybrat takovou posloupnost, aby konvergovala posloupnost druhých souřadnic; tím se konvergence prvních souřadnic neporuší. Tak postupujeme dále. Po m krocích dostaneme posloupnost $\{x_n\}$; vybranou z $\{x_n\}$ a takovou, že konvergují posloupnosti všech jejích souřadnic, která je tedy sama také konvergentní. Jestliže $x' \rightarrow x$, je ovšem $x \in K$.

14. Buď nyní $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ posloupnost intervalů taková, že $d(I_n) \rightarrow 0$. Je-li

$$I_n = A_1^{(n)} \times A_2^{(n)} \times \dots \times A_m^{(n)},$$

je při pevném i pro $A_i^{(n)} = \langle a_i^{(n)}, b_i^{(n)} \rangle$

$$b_i^{(n)} - a_i^{(n)} \rightarrow 0.$$

Protože také $A_i^{(1)} \supset A_i^{(2)} \supset \dots$, je

$$a_i^{(1)} \leq a_i^{(2)} \leq \dots, \quad b_i^{(1)} \geq b_i^{(2)} \geq \dots,$$

tedy průnik $\prod_{n=1}^{\infty} A_i^{(n)}$ obsahuje právě jeden bod, a to číslo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_i^{(n)} = c_i.$$

Bod $[c_1, c_2, \dots, c_m]$ je pak společným bodem všech I_n , a to jediným, protože $d(I_n) \rightarrow 0$.

15. Funkcí na množině $M \neq \emptyset$ rozumíme zobrazení množiny M do množiny E_1^* . Jsou-li f, g funkce na množině M a platí-li pro každé $x \in M$ vztah $f(x) \leq g(x)$, píšeme $f \leq g$. Podobný význam má $f_n \rightarrow f$ (to znamená, že platí $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pro každé $x \in M$), $f_n \nearrow f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, $\sup_n f_n$ atd.

Rovněž je jisté jasné, co značí $\max(f, g)$, f_+ , $|f|$ a pod. Je-li $f(x) \in E_1$ pro každé $x \in M$, řekneme, že funkce f je konečná. Je-li soubor $\{f(x)\}_{x \in M}$ dokonce omezený, řekneme, že funkce f je omezená. Součet dvou funkcí nemusí ovšem mít vždy smysl. Konstantní funkci značíme zpravidla příslušnou funkční hodnotou; na př. 0 bude někdy značit také funkci f , splňující vztah $f(x) = 0$ pro každé $x \in M$.

16. Nechť $A \subset B \subset E_m$ a nechť a je hromadným bodem množiny A ; buď f funkce na množině B . Utvořme pomocné funkce φ, ψ , definované pro každé $\delta > 0$ předpisem

$$\varphi(\delta) = \sup f(x), \text{ kde } 0 < \rho(x, a) < \delta, x \in A,$$

$$\psi(\delta) = \inf f(x), \text{ kde } 0 < \rho(x, a) < \delta, x \in A.$$

φ, ψ jsou zřejmě funkce monotónní;⁴⁾ můžeme tedy definovat

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \varphi(\delta), \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \psi(\delta).$$

Protože podle předpokladu je $\rho(a, A - \{a\}) = 0$, existuje ke každému $\delta > 0$ bod $x \in A$, pro nějž platí $0 < \rho(x, a) < \delta$; pak je $\varphi(\delta) \geq f(x) \geq \psi(\delta)$, tedy též $\overline{\lim} \dots \geq \underline{\lim} \dots$. Je-li $\overline{\lim} \dots = \underline{\lim} \dots$, píšeme ovšem $\overline{\lim} \dots = \underline{\lim} \dots = \lim \dots$.

⁴⁾ Je-li φ neklesající v $(0, 1)$, je zřejmě $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = \inf \varphi(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1-} \varphi(x) = \sup \varphi(x)$ pro $x \in (0, 1)$; u funkce nerostoucí je tomu naopak.

Snadno se zjistí, že platí $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = c \in E_1$, když a jen když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé $x \in A$, pro něž $0 < \rho(x, a) < \delta$, platí $|f(x) - c| < \varepsilon$. Podobná věta platí i pro $c = \infty$ a $c = -\infty$.

Je-li množina A rovna otevřenému intervalu (a, b) , píšeme $\overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} f(x)$ místo $\overline{\lim}_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$, $\underline{\lim}_{x \rightarrow b^-} f(x)$ místo $\underline{\lim}_{x \rightarrow b, x \in A} f(x)$. Pro $y \in (a, b)$ můžeme ovšem psát prostě $\lim_{x \rightarrow y} f(x)$. Podobného označení užíváme i pro symbol $\overline{\lim} \dots$.

Čtenář rovněž bez obtíží dokáže větu, obdobnou větě 11, že totiž $\overline{\lim}_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ je největší z limit tvaru $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$, kde $a_n \in A$, $a_n \neq a$, $a_n \rightarrow a$. Existuje tedy $\lim \dots = c$, když a jen když platí implikace

$$a \neq a_n \in A, a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow c.$$

17. Je-li f funkce na množině $B \supset A$ a je-li $a \in A$, řekneme, že f je spojitá v bodě a vzhledem k množině A , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé $x \in A$, pro něž platí $\rho(x, a) < \delta$, platí též $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Je-li a zároveň hromadným bodem A , vidíme ze 16, že funkce f je spojitá v bodě a vzhledem k A , když a jen když platí implikace

$$a_n \in A, a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a) \in E_1.$$

Snadno však nahlédneme, že tato implikace charakterizuje funkci, spojitou v bodě a vzhledem k A , i když a není hromadným bodem A (pak je vše triviální).

Je-li funkce f spojitá v každém bodě množiny A vzhledem k A , řekneme, že je f spojitá funkce na množině A (event. v intervalu A a pod.). Jestliže dokonce ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, kdykoli $x, y \in A$, $\rho(x, y) < \delta$, řekneme, že f je na A stejnoměrně spojitá.

18. Buď funkce f spojitá v intervalu K . Pak je f na K stejnoměrně spojitá a nabývá tam svého maxima a minima.

Důkaz: Předpokládejme, že f není na K stejnoměrně spojitá. Pak pro jisté $\varepsilon > 0$ již neexistuje požadované δ ; existují tedy dvojice $x_n,$

$y_n \in K$ tak, že sice $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, ale $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Vyberme konvergentní posloupnost $x_{k_n} \rightarrow x$. Pak též $y_{k_n} \rightarrow x$, tedy $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x)$, $f(y_{k_n}) \rightarrow f(x)$, tedy $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \rightarrow 0$ — spor.

Buď nyní $s = \sup f(x)$ pro $x \in K$. Zvolme $c_n < s$, $c_n \nearrow s$. Pak existují $x_n \in K$, $s \geq f(x_n) > c_n$, tedy $f(x_n) \rightarrow s$. Vyberme konvergentní posloupnost $x_{k_n} \rightarrow x$; pak $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x)$, $f(x_{k_n}) \rightarrow s$, tedy $s = f(x)$.

Podobně se zjistí, že existuje $y \in K$, kde f nabývá minima.

19. Buďte I, J m -rozměrné intervaly. Řekneme, že se I, J nepřekrývají, jestliže platí $I \circ J^{\circ} = \emptyset$. Jsou-li I, J nepřekrývající se intervaly takové, že $I + J$ je opět interval, pak (a jen v tomto případě) píšeme $I \dot{+} J$ místo $I + J$.

V jednorozměrném případě $I \dot{+} J = \langle a, b \rangle$ znamená, že existuje číslo $c \in (a, b)$ tak, že jeden z intervalů I, J se rovná $\langle a, c \rangle$ a druhý $\langle c, b \rangle$.

Nechť nyní $I \dot{+} J = K$ v případě m -rozměrném. Protože se I, J nepřekrývají, je $I \neq K \neq J$. Klademe-li ve větě 6 I místo A , I_i místo A_i , J místo B atd., zjistíme, že pro jisté j platí

$$I_j + J_j = K_j$$

a pro $i \neq j$ je

$$I_i = J_i = K_i.$$

Kdyby se I_j, J_j překrývaly, překrývaly by se také I, J ; platí tedy dokonce

$$I_j \dot{+} J_j = K_j.$$

Čtenář si nyní snadno představí, co znamená $I \dot{+} J = K$ v případě dvou a tří rozměrů.

20. Mějme intervaly $K, I \dot{+} J = L$. Pak nastane jeden z těchto tří případů:

a) Platí $IK \dot{+} JK = LK$.

b) LK je interval, jedna z množin IK, JK se mu rovná a druhá není interval. (To znamená, že je degenerovaným intervalem nebo prázdnou množinou.)

c) Žádná z množin IK, JK, LK není interval.

Důkaz: Jsou-li obě množiny IK, JK intervaly, platí zřejmě a). Není-li LK interval, platí c). Nechť nyní LK je interval, ale na př. IK nikoli; máme dokázat, že platí b) neboli že $JK = LK$. Předpokládejme tedy, že $JK \neq LK$ a odvodíme spor. Protože zřejmě $IK \neq LK$, můžeme použít věty 6, kde klademe $IK = A, JK = B, LK = C$. Protože A není interval a pro $i \neq j$ platí $A_i = C_i$, obsahuje množina A_j nejvýš jeden bod a ze vztahu $A_j + B_j = C_j$ plyne $B_j = C_j$, tedy $B = C$ proti předpokladu.

21. Funkce F se nazývá superaditivní v intervalu K , je-li definována na množině všech intervalů $I \subset K$ a platí-li

$$F(I) + F(J) \leq F(I \dot{+} J),$$

pokud má součet nalevo smysl a pokud $I \dot{+} J \subset K$. Nahradíme-li znamení \leq znaménem \geq (resp. $=$), dostáváme definici funkce subaditivní (resp. aditivní).

22. Buď F superaditivní v $K_1 \subset K$, kde K, K_1 jsou intervaly. Položme pro $I \subset K$

$$\tilde{F}(I) = F(IK_1) \text{ resp. } \tilde{F}(I) = 0$$

podle toho, je-li IK_1 interval či ne.

Pak je \tilde{F} superaditivní v K .

Důkaz: Plyne snadno z 20.

23. Necht funkce F_1, F_2 jsou superaditivní v K a nenabývají nikde hodnoty $-\infty$. Pak je $F_1 + F_2$ superaditivní v K .

(Zřejmé.)

Poznámka: Snadno se dokáže věta poněkud obecnější, že totiž funkce $F_1 + F_2$ je superaditivní v K , jsou-li F_1, F_2 superaditivní v K a má-li ovšem smysl součet $F_1(I) + F_2(I)$ pro každý interval $I \subset K$.

24. Buď F superaditivní v K , $0 \leq c \leq \infty$. Pak je cF superaditivní, $-F$ subaditivní v K .

(Zřejmé.)

25. Řekneme, že posloupnost intervalů I_n konverguje k bodu x a píšeme $I_n \rightarrow x$, jestliže platí $x \in I_n$ pro $n = 1, 2, \dots$ a jestliže $d(I_n) \rightarrow 0$.

Poznámka: Slovy „ F je funkce intervalu v K “ budeme vždy rozumět, že K je interval a že funkce F je definována na množině všech intervalů, obsažených v K .

Místo $\frac{a}{b}$ budeme z technických důvodů psát též $a : b$; místo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ budeme psát obyčejně jen $\lim a_n$.

26. Buďte F, G funkce intervalu v K , G buď konečná; necht $x \in K$. Horní (dolní) derivací funkce F podle funkce G v bodě x vzhledem k intervalu K (značka $\overline{F}(G, x, K)$, $\underline{F}(G, x, K)$) nazveme supremum (infimum) množiny všech $t \in E_1^*$ tvaru

$$t = \lim(F(I_n) : G(I_n)), \text{ kde } I_n \rightarrow x, I_n \subset K.$$

Jestliže je vždy od jistého indexu $F(I_n) = G(I_n) = 0$, kdykoli $I_n \rightarrow x, I_n \subset K$, je množina takovýchto t prázdná a podle naší definice je

$$\overline{F}(G, x, K) = \sup \emptyset = -\infty, \underline{F}(G, x, K) = \infty.$$

Jakmile však existují $I_n \subset K, I_n \rightarrow x$ tak, že pro nekonečně mnoho n platí na př. $F(I_n) \neq 0$, plyne snadno z věty 11, že takové t aspoň jedno existuje (podle 8 má totiž smysl $a : 0$ pro $a \neq 0$); potom je

$$\underline{F}(G, x, K) \leq \overline{F}(G, x, K).$$

Jestliže množina takových t není prázdná, je její supremum, jak čtenář snadno zjistí, dokonce jejím maximem. Je-li zejména $\underline{F}(G, x, K) < \infty$, pak existují $I_n \subset K$, $I_n \rightarrow x$ tak, že

$$F(I_n) : G(I_n) \rightarrow \underline{F}(G, x, K).$$

Je-li $c \in E_1^*$, pak symbolem

$$c \sim F'(G, x, K)$$

budeme rozumět, že platí buď

$$\underline{F}(G, x, K) = \overline{F}(G, x, K) = c \in E_1$$

nebo

$$\overline{F}(\dots) = -\infty, \underline{F}(\dots) = \infty.$$

27. Buďte F, G funkce intervalu v K , G buď konečná nezáporná. Necht $I_n \subset K$, $I_n \rightarrow x$, $c < \underline{F}(G, x, K)$. Pak platí od jistého indexu

$$cG(I_n) \leq F(I_n).$$

Důkaz: Necht pro jisté n platí

$$cG(I_n) > F(I_n). \quad (\alpha)$$

Je-li $G(I_n) = 0$, je $F(I_n) < 0$, tedy $F(I_n) : G(I_n) = -\infty$, tedy platí

$$c \geq F(I_n) : G(I_n); \quad (\beta)$$

tento vztah platí také, je-li $F(I_n) = -\infty$. Je-li však $G(I_n) > 0$, $F(I_n) > -\infty$, jsou všechna čísla $c, G(I_n), 1 : G(I_n), F(I_n)$ konečná a (β) plyne z (α) .

Kdyby nyní platilo (β) pro nekonečně mnoho n , mohli bychom vybrat posloupnost $I_{k_n} = I'_n$ tak, aby $\lim(F(I'_n) : G(I'_n)) = c' \leq c$, což by odporovalo vztahu $c < \underline{F}(G, x, K)$. Tím je věta dokázána.

Poznámka: Je-li naopak $c > \underline{F}(G, x, K)$, G konečná nezáporná, existují $I_n \rightarrow x$ tak, že platí $I_n \subset K$, $\lim(F(I_n) : G(I_n)) < c$; pak je pro velká n $F(I_n) : G(I_n) < c$, tedy $F(I_n) < cG(I_n)$ (i když $c = \infty$ nebo $G(I_n) = 0$). Jestliže tedy zjistíme, že ke každé posloupnosti $I_n \rightarrow x$, kde $I_n \subset K$, existuje takové N , že pro $n > N$ platí $F(I_n) \geq cG(I_n)$, je též $\underline{F}(G, x, K) \geq c$.

28. Buďte F, G funkce intervalu v K , G buď konečná funkce; interval K_1 buď částí K . Pak platí

$$\underline{F}(G, x, K) \leq \underline{F}(G, x, K_1), \overline{F}(G, x, K_1) \leq \overline{F}(G, x, K).$$

(Zřejmé.)

29. Necht $I + J = K$. Buďte F, G funkce intervalu v K ; F buď superaditivní, G konečná nezáporná aditivní. Zvolme $x \in IJ$. Buď $A = \underline{F}(G, x, I)$, $B = \underline{F}(G, x, J)$, $C = \underline{F}(G, x, K)$. Pak platí

$$C = \min(A, B).$$

Důkaz: Podle 28 je $C \leq A$, $C \leq B$, tedy $C \leq \min(A, B)$. Předpokládejme, že je $C < \min(A, B)$ a odvodíme spor. Zvolme $I_n \rightarrow x$, $I_n \subset K$, $F(I_n) : G(I_n) \rightarrow C$; dále zvolme C' , $C < C' < \min(A, B)$. Je-li na př. II_n degenerovaný interval nebo prázdná množina, je podle 20 $JI_n = I_n$ neboli $I_n \subset J$; protože však $\lim(F(I_n) : G(I_n)) < B$, může to nastat jen pro konečný počet indexů. Podobně zjistíme, že jen pro konečný počet indexů může být JI_n degenerovaný interval. Pro dostatečně velká n tedy platí podle 27

$$C'G(II_n) \leq F(II_n),$$

$$C'G(JI_n) \leq F(JI_n),$$

tedy též

$$C'G(I_n) = C'G(II_n + JI_n) = C'(G(II_n) + G(JI_n)) \leq F(II_n) + \quad (\alpha) \\ + F(JI_n) \leq F(I_n).$$

Protože $F(I_n) : G(I_n) \rightarrow C$, mají podíly $F(I_n) : G(I_n)$ smysl; z (α) tedy plyne $C' \leq F(I_n) : G(I_n)$ (i když $G(I_n) = 0$). Odtud však plyne $C' \leq \lim(F(I_n) : G(I_n)) = C < C'$, což je spor.

30. Buď $K = \langle a, b \rangle$. Zvolme přirozené číslo n a body

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

(připouštíme též případ $n = 1$, tedy $a = t_0 < t_1 = b$). Pak systém intervalů K_1, \dots, K_n , kde $K_i = \langle t_{i-1}, t_i \rangle$, nazveme dělením intervalu K . Body t_1, \dots, t_{n-1} , pokud existují, nazveme dělicími body tohoto dělení; počet dělicích bodů je tedy číslo $n - 1$.

Buď nyní K m -rozměrný interval, $K = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$. Utvořme dělení ϑ_i každého z intervalů A_i . (ϑ_i je tedy několik intervalů, které dávají dohromady vždy interval A_i .) Potom systém ϑ všech intervalů tvaru

$$B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m,$$

kde $B_i \in \vartheta_i$ pro $i = 1, 2, \dots, m$, nazveme dělením intervalu K .

Dělicími body ϑ rozumíme ovšem dělicí body všech ϑ_i ; má-li dělení ϑ_i q_i dělicích bodů, řekneme, že má ϑ $q_1 + q_2 + \dots + q_m$ dělicích bodů.

31. Buď ϑ dělení intervalu K . Je-li F superaditivní v K , platí

$$\sum_{I \in \vartheta} F(I) \leq F(K),^5$$

jakmile má součet nalevo smysl.

Důkaz: Je-li počet dělicích bodů dělení ϑ roven 1, obsahuje ϑ právě dva intervaly I, J , pro něž platí $I + J = K$; v tomto případě věta zřejmá platí.

⁵⁾ Je-li $\vartheta = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$, značí $\sum_{I \in \vartheta} F(I)$ ovšem $\sum_{k=1}^n F(I_k)$.

Předpokládejme nyní, že věta platí pro libovolný interval K a libovolnou superaditivní funkci F v K , kdykoli je počet dělicích bodů ϑ nejvýš roven n , a mějme dělení ϑ intervalu K , které má $n + 1$ dělicích bodů. Buď c dělicí bod ϑ . Tímto bodem se rozdělí příslušná hrana a tedy i interval K na dva nepřekrývající se intervaly; označme je K' , K'' . Systém ϑ pak zřejmě můžeme rozdělit na disjunktní systémy ϑ' , ϑ'' , kde ϑ' je dělení K' , ϑ'' je dělení K'' a počet dělicích bodů každého z dělení ϑ' , ϑ'' je nejvýš roven n . Má-li součet $\sum_{I \in \vartheta} F(I)$ smysl, mají smysl i součty $\sum_{I \in \vartheta'} F(I)$, $\sum_{I \in \vartheta''} F(I)$ a podle indukčního předpokladu platí

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \vartheta'} F(I) &\leq F(K'), \\ \sum_{I \in \vartheta''} F(I) &\leq F(K'') \end{aligned}$$

a tedy

$$\sum_{I \in \vartheta} F(I) = \sum_{I \in \vartheta'} \dots + \sum_{I \in \vartheta''} \dots = F(K') + F(K'') \leq F(K' + K'') = F(K).$$

Tím je proveden indukční krok a věta je dokázána.

Poznámka: Pro funkce subaditivní (resp. aditivní) platí ovšem věta 31 se znaméním \geq (resp. $=$).

32. Buďte F , G funkce intervalu v K , G buď konečná nezáporná, F superaditivní. Buď $\underline{F}(G, x, K) > -\infty$ (resp. $\underline{F}(G, x, K) > 0$) pro každé $x \in K$. Pak je

$$F(I) > -\infty \text{ (resp. } F(I) \geq 0 \text{)}$$

pro každý interval $I \subset K$.

Důkaz: Předpokládejme, že pro některý interval $I \subset K$ je $F(I) = -\infty$. Označme $I = I_1$. Utvořme nyní dělení ϑ intervalu I_1 tak, že každou jeho hranu rozpůlíme. Pro některé $I' \in \vartheta$ musí pak podle 31 platit $F(I') = -\infty$; označme $I' = I_2$ a tak postupujme dále. Takto sestrojená posloupnost intervalů pak podle 14 konverguje k jistému bodu $x \in I$ a platí $\lim(F(I_n) : G(I_n)) = -\infty$ proti předpokladu. — Důkaz pro $F(I) \geq 0$ je obdobný.

Poznámka: Ze vztahu $\underline{F}(G, x, K) > 0$ pro každé $x \in K$ neplyne $F(I) > 0$ pro každé $I \subset K$; volíme-li na př. $F(I) = G(I) = 0$ pro každé $I \subset K$, je dokonce $\underline{F}(G, x, K) = \infty$ pro každé $x \in K$.

33. Buďte F_1, F_2, G funkce intervalu v K ; G buď konečná nezáporná. Necht má smysl $F_1(I) + F_2(I)$ pro každý interval $I \subset K$. Buď $c > 0$, $c < \infty$; píšme $\underline{F}_1(x)$ místo $\underline{F}_1(G, x, K)$ a pod. Pak platí

$$a) (c\underline{F}_1)(x) = c\underline{F}_1(x),$$

$$b) \overline{(-F_1)}(x) = -\overline{F_1}(x)$$

pro každé $x \in K$ a dále

$$c) \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) \leq \overline{(F_1 + F_2)}(x),$$

kdekoli má součet nalevo smysl.

Důkaz: a) a b) je zřejmé; dokážeme jen c). Můžeme předpokládat, že je $F_i(x) > -\infty$ pro $i = 1, 2$. Zvolme $I_n \rightarrow x$, $I_n \subset K$; zvolme dále $c_i < \overline{F_i}(x)$ ($i = 1, 2$). Podle 27 platí pro dostatečně velká n

$$c_i G(I_n) \leq F_i(I_n) \quad (i = 1, 2),$$

tedy též

$$(c_1 + c_2) G(I_n) \leq (F_1 + F_2)(I_n).$$

Podle poznámky k 27 platí též

$$c_1 + c_2 \leq \overline{(F_1 + F_2)}(x).$$

Protože c_i můžeme volit libovolně blízko k $\overline{F_i}(x)$, platí také c).

34. Buď G konečná funkce intervalu v K . Je-li $x \in K$, platí buď $\underline{G}(G, x, K) = 1$ nebo $\underline{G}(G, x, K) = \infty$.

(Zřejmé.)

35. Buďte funkce F, G superaditivní v intervalu K , G konečná nezáporná. Necht $\underline{F}(G, x, K) \geq 0$ pro každé $x \in K$. Pak pro každý interval $I \subset K$ platí

$$F(I) \geq 0.$$

Důkaz: Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a utvořme funkci $F_1 = F + \varepsilon G$. Pro libovolné $x \in K$ pak platí, značí-li $F(x)$ opět $\underline{F}(G, x, K)$ a pod., $\underline{F_1}(x) \geq \underline{F}(x) + (\varepsilon G)(x) \geq \underline{F}(x) + \varepsilon > 0$. Podle 32 je pro libovolný interval $I \subset K$

$$F_1(I) = F(I) + \varepsilon G(I) \geq 0.$$

Protože však ε může být libovolně malé, platí též $F(I) \geq 0$.

36. Buď F superaditivní v intervalu K ; necht $F(K) < \infty$ a necht $F(I) > -\infty$ pro každý interval $I \subset K$. Pak je

$$F(I) < \infty$$

pro každý interval $I \subset K$.

Důkaz: Zvolme $I \subset K$. Snadno náhlédneme, že existuje dělení \mathcal{I} intervalu K , jehož prvkem je I . Věta 36 nyní plyne z věty 31.

37. Buď F superaditivní nezáporná v intervalu K . Pak pro každý interval $I \subset K$ platí

$$F(I) \leq F(K).$$

(Důkaz jako u věty 36.)

38. Dosud jsme nezkoumali souvislost mezi funkcemi intervalu a „obyčejnými“ funkcemi, t. j. funkcemi, definovanými na nějaké množině bodů prostoru E_m ; takovýmito funkcím budeme říkat funkce bodové. Ukazuje se, že zejména v jednorozměrném případě je souvislost velmi těsná a že naše definice derivace je zobecněním klasického pojmu derivace.

39. Buď g konečná bodová funkce v $\langle a, b \rangle$. Definujeme-li v $\langle a, b \rangle$ funkci intervalu g^* předpisem

$$g^*(I) = g(y) - g(x), \text{ kde } I = \langle x, y \rangle \subset \langle a, b \rangle,$$

je g^* aditivní v $\langle a, b \rangle$. Funkce intervalu g^* je nezáporná, když a jen když je g funkce neklesající. Vztah $g_1^* = g_2^*$ platí, když a jen když se funkce g_1, g_2 liší jen o aditivní konstantu.

Je-li naopak G konečná aditivní funkce (intervalu) v $\langle a, b \rangle$, existuje v $\langle a, b \rangle$ konečná bodová funkce g tak, že $g^* = G$; funkce g je určena až na aditivní konstantu jednoznačně.

(Důkaz všech tvrzení je zcela snadný.)

40. Buď f konečná bodová funkce v $K = \langle a, b \rangle$, $g(x) = x$ pro $x \in K$, $F = f^*$, $G = g^*$. Pak

$$\underline{F}(G, a, K) = \underline{f}^+(a), \underline{F}(G, x, K) = \underline{f}(x) \text{ pro } x \in (a, b);$$

podobně pro horní derivace a derivace zleva v bodě b .

Důkaz: Číslo $\underline{F}(G, a, K)$ je definováno jako nejmenší z limit tvaru $\lim \{ \underline{F}(I_n) : G(I_n) \}$,⁶⁾ kde $I_n \subset K$, $I_n \rightarrow a$. Zde platí $I_n = \langle a, a + h_n \rangle$, kde $h_n > 0$, $h_n \rightarrow 0$; $\underline{F}(G, a, K)$ je tedy nejmenší z limit tvaru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ (f(a + h_n) - f(a)) : ((a + h_n) - a) \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (f(a + h_n) - f(a)) : h_n \},$$

kde $h_n > 0$, $h_n \rightarrow 0$.

Stejně však lze podle 16 definovat $\lim_{h \rightarrow 0^+} \{ (f(a + h) - f(a)) : h \} = \underline{f}^+(a)$.

Pro derivaci zleva je postup obdobný; věta pro oboustrannou derivaci plyne nyní snadno z věty 29.

41. Buď G konečná nezáporná superaditivní v intervalu K ; f buď bodová funkce v K . Funkci M nazveme majorantou funkce f vzhledem k funkci G v intervalu K , jestliže

a) M je v K superaditivní,

b) $-\infty \neq \underline{M}(G, x, K) \geq f(x)$ pro každé $x \in K$.

Funkci m nazveme minorantou funkce f vzhledem k funkci G v intervalu K , jestliže je $(-m)$ majorantou k $(-f)$, jestliže tedy

⁶⁾ Zde (a v podobných výrazech) ovšem nemají závorky $\{ \dots \}$ „množinový“ význam.

a') m je v K subaditivní,

b') $\infty \neq \overline{m}(G, x, K) \leq f(x)$ pro každé $x \in K$.

Horním (Perron-Stieltjesovým) integrálem funkce f vzhledem k funkci G v intervalu K nazveme

$$\int_K f dG = \inf M(K),$$

kde M je majoranta k f (vzhledem ke G v K).

Dolním integrálem funkce f (vzhledem k ...) nazveme

$$-\int_K (-f) dG$$

neboli

$$\int_K f dG = \sup m(K),$$

kde m je minoranta k f (vzhledem k ...).

42. Symbolům G, K dáme nyní pevný význam; G bude stále konečná nezáporná superaditivní (později pak aditivní) funkce v intervalu K . Slova „vzhledem k funkci G a intervalu K “ a pod. budeme zpravidla vynechávat; také budeme psát $\underline{F}(x)$ místo $\underline{F}(G, x, K)$, podobně $c \sim F'(x)$,

$\int_K f$ atd.

43. Pro libovolnou bodovou funkci f v K platí

$$\int_K f \leq \overline{\int_K f}.$$

Důkaz: Stačí dokázat, že platí

$$m(K) \leq M(K), \quad (\alpha)$$

kdykoli je m minorantou, M majorantou funkce f . Podle 32 je $M(K) > -\infty$ a podobně je $m(K) < \infty$. Je-li tedy některé z čísel $m(K), M(K)$ nekonečné, (α) jistě platí. Necht tedy $m(K), M(K) \in E_1$; utvořme superaditivní funkci $M - m$. Rozdíl $\underline{M}(x) - \overline{m}(x)$ má smysl a je ≥ 0 pro každé $x \in K$; podle 33 platí

$$0 \leq \underline{M}(x) - \overline{m}(x) = \underline{M}(x) + \overline{(-m)}(x) \leq \underline{(M - m)}(x).$$

Podle 35 je $\underline{(M - m)}(K) \geq 0$ a tedy opravdu $m(K) \leq M(K)$.

44. Buďte f, g, h bodové funkce v K . Necht platí

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

pro každé $x \in K$, pro něž má smysl součet vpravo (nemá-li tento součet smysl, nepředpokládáme o $f(x)$ nic). Pak platí

$$\int_K f \leq \int_K g + \int_K h \quad (\text{resp. } \int_K g + \int_K h \leq \int_K f),$$

jakmile má součet napravo (resp. nalevo) smysl.

(Důkaz provede čtenář snadno sám; stačí v podstatě zjistit, že $M + N$ je majoranta k f , jsou-li M, N majoranty ke g, h .)

45. Jsou-li f, g bodové funkce v K , $f \leq g$, pak platí

$$\int_{\bar{K}} f \leq \int_{\bar{K}} g, \quad \bar{\int}_K f \leq \bar{\int}_K g.$$

(Jasně.)

46. Buď f bodová funkce v K , $0 \leq c < \infty$. Pak platí

$$-\bar{\int}_K f = \int_{\bar{K}}(-f), \quad \bar{\int}_K cf = c\bar{\int}_K f, \quad \int_{\bar{K}} cf = c\int_{\bar{K}} f.$$

Důkaz: První vztah je zřejmý; druhý plyne pro $c > 0$ z 33a). Protože však je nulová funkce intervalem majorantou i minorantou bodové nulové funkce, platí tento vztah i pro $c = 0$. Třetí vztah plyne z prvního a druhého.

47. Řekneme, že funkce f má integrál (nebo že existuje integrál funkce f) vzhledem k funkci G v intervalu K , platí-li

$$\int_{\bar{K}} f dG = \bar{\int}_K f dG \in E_1.$$

Pak píšeme

$$\int_{\bar{K}} f dG = \bar{\int}_K f dG = \int_{\bar{K}} f dG;$$

množinu všech takovýchto funkcí označíme $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(G, K)$.

48. Necht $a, b \in E_1$, $g, h \in \mathfrak{P}$. Buď f bodová funkce v K taková, že platí

$$f(x) = ag(x) + bh(x),$$

kdekoli má poslední součet smysl. Pak je $f \in \mathfrak{P}$,

$$\int_{\bar{K}} f = a\int_{\bar{K}} g + b\int_{\bar{K}} h.$$

(Plyne ihned z 44, 46.)

49. Je-li M majorantou funkce f v intervalu K , je M též majorantou funkce f v každém intervalu $I \subset K$; zejména tedy platí

$$\bar{\int}_I f \leq M(I)$$

pro každý interval $I \subset K$.

(Plyne z 28.)

50. Necht $\bar{\int}_K f < \infty$. Pak je

$$\bar{\int}_I f < \infty$$

pro každý interval $I \subset K$.

Důkaz: Existuje majoranta M , pro niž platí $M(K) < \infty$; podle 36 a 49 je $\int_I \bar{f} \leq M(I) < \infty$.

51. Necht existuje $\int_K f$. Pak existuje $\int_I f$ pro každý interval $I \subset K$.

Důkaz: Zvolme $\varepsilon > 0$. Necht pro majorantu M a minorantu m platí $(M - m)(K) < \varepsilon$. Zvolíme-li interval $I \subset K$, platí nyní

$$m(I) \leq \int_I f \leq \int_I \bar{f} \leq M(I),$$

kde podle 37 platí $M(I) - m(I) = (M - m)(I) \leq (M - m)(K) < \varepsilon$; je tedy $\int_I \bar{f} - \int_I f < \varepsilon$. Odtud věta snadno plyne.

Poznámka: Všude dále budeme o funkci G , vzhledem k níž se počítá derivace a integrál, předpokládat, že je aditivní (a stále ovšem konečná a nezáporná).

52. Buď f libovolná bodová funkce v K . Definujme v K funkci intervalu P předpisem

$$P(I) = \int_I \bar{f} dG.$$

Pak je P aditivní v K .

Důkaz: Necht $I_1 + I_2 = I_3 \subset K$. Máme dokázat, že $P(I_1) + P(I_2) = P(I_3)$, má-li součet nalevo smysl. Je-li na př. $P(I_1) = \infty$, je podle 50 (kde klademe I_1 místo I , I_3 místo K) také $P(I_3) = \infty$; můžeme se tedy omezit na případ $P(I_i) < \infty$ ($i = 1, 2$). Je-li M majoranta k f na I_3 , je též majorantou k f na I_1, I_2 , takže

$$P(I_1) + P(I_2) \leq M(I_1) + M(I_2) \leq M(I_3);$$

odtud plyne

$$P(I_1) + P(I_2) \leq P(I_3). \quad (\alpha)$$

Buď nyní M_i majoranta k f na I_i ($i = 1, 2$). Rozšířme podle 22 (kde klademe I_i místo K_1 , I_3 místo K) funkci M_i na superaditivní funkci \tilde{M}_i v intervalu I_3 . Snadno zjistíme s použitím věty 29, že funkce $M = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_2$ je majorantou k f na I_3 , takže

$$P(I_3) \leq M(I_3) = \tilde{M}_1(I_3) + \tilde{M}_2(I_3) = M_1(I_1) + M_2(I_2).$$

Odtud dostáváme

$$P(I_3) \leq P(I_1) + P(I_2). \quad (\beta)$$

Z (α) , (β) věta ihned plyne.

53. Necht ϑ je dělení intervalu K ; buď f bodová funkce v K . Pak platí

$$\sum_{I \in \vartheta} \bar{f}f \, dG = \bar{f}f \, dG,$$

má-li součet nalevo smysl.

Důkaz: Plyne z věty 52 a z poznámky k větě 31.

Poznámka: Jestliže existuje $\int_I f$ pro každé $I \in \vartheta$, existuje též $\int_K f$; je-li $P(I) = \bar{f}f$, $Q(I) = \int_I f = -\int_I (-f)$, platí totiž podle 53

$$Q(K) = \sum_{I \in \vartheta} Q(I) = \sum_{I \in \vartheta} P(I) = P(K) \in E_1.$$

54. Je-li f bodová funkce v intervalu K , pak funkci intervalu P , určené pro $I \subset K$ vztahem

$$P(I) = \int_I \bar{f}f \, dG,$$

říkáme neurčitý horní integrál funkce f a píšeme

$$P = \bar{f}f \, dG = \bar{f}f.$$

Podobně definujeme neurčitý dolní integrál a neurčitý integrál. Podle 52 jsou to vždy aditivní funkce. Další jejich důležitou vlastnost udává tato věta:

55. Buď f bodová funkce v intervalu K . Necht $|\int_K \bar{f}f| < \infty$. Pak je

$$|\int_I \bar{f}f| < \infty$$

pro každý interval $I \subset K$.

Důkaz: Podle 50 je $\int_I \bar{f}f < \infty$ pro každé I . Protože $-\bar{f}f$ je superaditivní (dokonce aditivní) funkce, protože je $-\int_K \bar{f}f < \infty$ a protože pro každé I platí $-\int_I \bar{f}f > -\infty$, plyne z věty 36, že je $-\int_I \bar{f}f < \infty$ neboli $\int_I \bar{f}f > -\infty$ pro každé I .

56. Řekneme, že funkce f má Newtonův (Newton-Stieltjesův) integrál vzhledem k funkci G v intervalu K , jestliže existuje funkce F , která je v K zároveň majorantou i minorantou funkce f . Funkce F je pak zřejmě neurčitým (Perron-Stieltjesovým) integrálem funkce f ; říkáme též, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f . Snadno nahlédneme, že aditivní funkce F je primitivní funkcí k funkci f (vzhledem k funkci G a intervalu K), když a jen když pro každé $x \in K$ platí

$$f(x) \sim F'(x).$$

57. Pro $c \in E_1$ platí $\int c \, dG = cG$. Dále je $\int \infty \, dG = \bar{\int} \infty \, dG = \infty G$; podobně pro $-\infty$.

Důkaz: Snadno nahlédneme, že funkce G je Newtonovým integrálem funkce $f = 1$. Pro $c \neq 1$, $c \in E_1$, nyní plyne věta 57 z věty 46. — Je-li $G(I) = 0$, je $\underline{G}(G, x, I) = \infty$, tedy $0 \leq \int_I \infty \, dG \leq \bar{\int}_I \infty \, dG \leq G(I) = 0$. Jinak je $\bar{\int}_I \infty \, dG \geq \int_I \infty \, dG \geq \int_I n \, dG = nG(I)$ pro $n = 1, 2, \dots$, tedy $\bar{\int}_I \dots = \int_I \dots = \infty$.

58. Buď f bodová funkce v K , která je v bodě $b \in K$ spojitá (vzhledem ke K); buď $P = \int f$. Pak platí

$$f(b) \sim P'(b).$$

Důkaz: Necht' $I_n \rightarrow b$, $I_n \subset K$, $\{P(I_n) : G(I_n)\} \rightarrow c$. Buď

$$h_n = \sup f(x) \text{ pro } x \in I_n,$$

$$k_n = \inf f(x) \text{ pro } x \in I_n.$$

Pak platí

$$k_n G(I_n) = \int_I k_n \leq \int_I f = P(I_n) \leq \int_I h_n = h_n G(I_n).$$

Kdyby bylo $G(I_n) = 0$, bylo by též $P(I_n) = 0$ a $P(I_n) : G(I_n)$ by nemělo smysl; je tedy $G(I_n) \neq 0$ a platí

$$k_n \leq \{P(I_n) : G(I_n)\} \leq h_n.$$

Ze spojitosti funkce f snadno plyne, že

$$\lim k_n = \lim h_n = f(b),$$

tedy též

$$\lim(P(I_n) : G(I_n)) = f(b).$$

Není-li tedy $\underline{P}(b) = \infty$, $\bar{P}(b) = -\infty$, platí jistě $\underline{P}(b) = \bar{P}(b) = f(b)$.

59. Bodová funkce, spojitá v intervalu K , má v K Newtonův integrál. (Plyne ihned z 58.)

60. Buď f konečná bodová funkce v K . Pro $I \subset K$ položme

$$h(I) = \sup f(x) \text{ pro } x \in I,$$

$$k(I) = \inf f(x) \text{ pro } x \in I.$$

Je-li dále \emptyset dělení K , budiž

$$S(f, \emptyset) = \sum_{I \in \emptyset} h(I) G(I),$$

$$s(f, \emptyset) = \sum_{I \in \emptyset} k(I) G(I).^?)$$

^{?)} Součty mají smysl, protože $h(I) > -\infty$, $k(I) < \infty$.

Horním (resp. dolním) Riemannovým integrálem funkce f (vzhledem k funkci G v intervalu K) pak nazveme

$$R\bar{f}f dG = \inf S(f, \vartheta) \text{ pro všechna dělení } \vartheta$$

$$\text{(resp. } Rff dG = \sup s(f, \vartheta) \text{ pro všechna } \vartheta).$$

Je-li $R\bar{f}f = Rff \in E_1$, řekneme, že funkce f má v K Riemannův integrál.

61. Pro libovolnou konečnou bodovou funkci f v intervalu K platí

$$Rff \leq \int_K f \leq \bar{f}f \leq R\bar{f}f.$$

Důkaz: Zvolme dělení ϑ intervalu K . Definujme na K bodové funkce f_h, f_k předpisem

$$f_h(x) = \min h(I) \text{ pro } x \in I, I \in \vartheta,$$

$$f_k(x) = \max k(I) \text{ pro } x \in I, I \in \vartheta.$$

(Slovy: Je-li dáno x , vezmeme v úvahu všechna $I \in \vartheta$, která obsahují x . „Obyčejně“ bude takové I jen jedno, v m -rozměrném případě jich však může být až 2^m . Z příslušných hodnot $h(I)$, kde $h(I)$ je definováno v 60, vezmeme tu nejmenší. Podobně pro $f_k(x)$.)

Snadno zjistíme, že je $f_k \leq f \leq f_h$; zvolíme-li $I \in \vartheta$, platí pro každé $x \in I$

$$k(I) \leq f_k(x), f_h(x) \leq h(I),$$

tedy na př.

$$\int_I f_h \leq \int_I h(I) = h(I) G(I).$$

Odtud plyne

$$\bar{f}f \leq \bar{f}f_h = \sum_{I \in \vartheta} \int_I \bar{f}f_h \leq \sum_{I \in \vartheta} h(I) G(I) = S(f, \vartheta),^8)$$

tedy $\bar{f}f \leq R\bar{f}f$ a podobně $Rff \leq \int_K f$.

62. Normou dělení ϑ nazveme největší z čísel $d(I)$ ($d(I)$ značí největší z délek hran I) pro $I \in \vartheta$. Čtenář nyní snadno dokáže větu:

Je-li f spojitá v K , pak existuje Rff ; dokonce ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé dělení ϑ s normou menší než δ , $\vartheta = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$, platí

⁸⁾ f_h je zdola omezená, takže má součet $\sum_{I \in \vartheta} \int_I f_h$ smysl.

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) G(I_i) - \int_{\bar{K}} f dG \right| < \varepsilon,$$

ať volíme jakkoli body $\xi_i \in I_i$. (Je třeba použít stejnoměrné spojitosti.)

V jednorozměrném případě, kdy $G = g^*$ a dělení ϑ je určeno body $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, nabývají součty $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) G(I_i)$ tvaru

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) (g(t_i) - g(t_{i-1})), \quad t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i.$$

V našem případě je ovšem g funkce neklesající. Místo $\int_{\bar{K}} f dG$ pak pi-

šeme obyčejně $\int_a^b f dg$ nebo též $\int_a^b f(x) dg(x)$ a pod. Symbol $\int_a^b f(x) dg(x)$ obdobně značí horní (Perron-Stieltjesův) integrál funkce f vzhledem k funkci g^* v intervalu $\langle a, b \rangle$ (říkáme též „od a do b “) atd.

Je-li $g(x) = x$, je g^* zřejmě délka intervalu. V tomto případě mluvíme o obyčejném integrálu (Perronovu, Newtonovu, Riemannovu). Je-li F primitivní funkcí (v klasickém slova smyslu) funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$, je funkce intervalu F^* primitivní funkcí a tedy též obyčejným (neurčitým) Perronovým integrálem funkce f . Protože Perronův integrál je zobecněním jak Riemannova, tak i Newtonova integrálu, dostáváme mimochodem známou větu: Necht funkce F má v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$ vlastní derivaci $F'(x) = f(x)$; necht f má v $\langle a, b \rangle$ Riemannův integrál. Pak platí $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

63. Zavedeme ještě tato označení:

$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(G, K)$ buď množina všech omezených funkcí z \mathfrak{P} ;

\mathfrak{P}_A buď množina těch funkcí $f \in \mathfrak{P}$, pro něž také $|f| \in \mathfrak{P}$;

\mathfrak{P}_R buď množina těch funkcí, pro něž platí

$$\int_{\bar{K}} f dG = \int_{\bar{K}} \bar{f} dG,$$

kde však připouštíme také hodnoty $\pm \infty$.

64. Jestliže $f \in \mathfrak{P}$, pak $f_+, f_-, |f| \in \mathfrak{P}_R$.

Důkaz: Je-li $\int_{\bar{K}} f_+ = \infty$, je jistě $f_+ \in \mathfrak{P}_R$. Buď nyní $\int_{\bar{K}} f_+ < \infty$.

Zvolme $\varepsilon > 0$; buď M majoranta funkce f taková, že platí $M(K) < \int_{\bar{K}} f_+ + \varepsilon$. Utvořme superaditivní funkci $H = \int_{\bar{K}} f_+ + M - f$. Protože

$M \geq f$, je $H \geq \int_{\bar{K}} f_+ \geq 0$; protože $\int_{\bar{K}} f_+ \geq \int_{\bar{K}} f$, je $H \geq M$. Je tedy $\underline{H}(x) \geq 0$, $\underline{H}(x) \geq \underline{M}(x) \geq f(x)$, tedy

$$\underline{H}(x) \geq (f(x))_+$$

pro každé x ; vidíme, že H je majorantou k f_+ . Odtud plyne

$$\bar{f}_K f_+ \leq H(K) = \int_K f_+ + M(K) - \int_K f < \int_K f_+ + \varepsilon,$$

tedy

$$\bar{f}_K f_+ \leq \int_K f_+, f_+ \in \mathfrak{P}.$$

Podobně zjistíme, že je vždy $f_- \in \mathfrak{P}_R$ a tedy také $|f| = f_+ - f_- \in \mathfrak{P}_R$.

65. Je-li f omezená, nemůže být $\bar{f}_K |f| = \infty$; z věty 64 plyne tedy, že $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_A$. Vidíme, že platí celkem

$$\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_A \subset \mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}_R.$$

66. Necht $g, h \in \mathfrak{P}_A$; buď f funkce v K taková, že platí

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

kdekoli má poslední součet smysl. Pak je $f \in \mathfrak{P}_A$.

Důkaz: Podle 64 stačí dokázat, že je $\bar{f}_K |f| < \infty$. To však plyne z toho, že pro každé x platí $|f(x)| \leq |g(x)| + |h(x)|$ a tedy $\bar{f}_K |f| \leq \bar{f}_K |g| + \bar{f}_K |h|$.

67. Necht $f, g \in \mathfrak{P}_A$. Pak též $\max(f, g) \in \mathfrak{P}_A$, $\min(f, g) \in \mathfrak{P}_A$.

Důkaz: Je-li $f(x) = g(x)$, položme $(f - g)(x) = 0$, i když $f(x) = \pm \infty$. Pak platí

$$\max(f(x), g(x)) = f(x) + ((g - f)(x))_+,$$

kdekoli má součet smysl (stačí rozeznat případy $f(x) \geq g(x)$ a $f(x) < g(x)$); odtud věta snadno plyne.

68. Necht $f \in \mathfrak{P}$, $g \in \mathfrak{P}_A$, $f \geq g$. Pak je $f \in \mathfrak{P}_A$.

Důkaz: Doplňme-li nějak funkci $f - g$ „v bodech neurčitosti“, platí $f(x) = g(x) + (f - g)(x)$, kdekoli má součet smysl.

69. Necht $f, g, h \in \mathfrak{P}$, $g \geq f$, $h \geq f$. Pak $\max(g, h) \in \mathfrak{P}$.

(Důkaz lze provést snadno, použijeme-li vět 67, 68 a jejich důkazů.)

70. Buďte f_n, f bodové funkce v intervalu K ; necht $f_n \nearrow f$. Pak platí buď $\bar{f}_K f_n \rightarrow -\infty$ nebo

$$\bar{f}_K f_n \rightarrow \bar{f}_K f.$$

Důkaz: Budeme vyšetřovat jen případ, že

$$\left| \bar{f}_K f_n \right| < \infty \text{ pro } n = 1, 2, \dots;$$

ostatní případy jsou triviální nebo se na tento případ snadno převedou. Protože zřejmě $\lim \bar{f}_K f_n \leq \bar{f}_K f$, stačí dokázat, že platí $\bar{f}_K f \leq \lim \bar{f}_K f_n$.

Funkce $P_n = \bar{f}f_n$ jsou podle 55 konečné (aditivní) funkce. Zvolme $\varepsilon > 0$ a čísla $\varepsilon_n > 0$, aby $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$. Pak existují majoranty M_n funkcí f_n tak, že platí

$$M_n(K) - P_n(K) < \varepsilon_n. \quad (\alpha)$$

Funkce $R_n = M_n - P_n$ jsou pak konečné nezáporné superaditivní. Položme

$$F_n = M_n + \sum_{i=1}^{n-1} R_i. \quad (\beta)$$

F_n jsou opět majoranty k f_n . Platí $F_{n+1} = M_{n+1} + M_n - P_n + \sum_{i=1}^{n-1} R_i = M_{n+1} - P_n + F_n$. M_{n+1} je majorantou k f_{n+1} , tím spíše k f_n ; je tedy $M_{n+1} - P_n \geq 0$, $F_{n+1} \geq F_n$.

Existuje tedy $F = \lim F_n$; F je ovšem superaditivní. Pro každé x a každé n je $F(x) \geq F_n(x) \geq f_n(x)$, tedy je též $F(x) \geq \lim f_n(x) = f(x)$; vidíme, že je \bar{F} majorantou k f a platí tedy

$$\bar{f}f \leq F(K). \quad (\gamma)$$

Z (α) , (β) plyne, že

$$F_n(K) \leq M_n(K) + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i < P_n(K) + \varepsilon_n + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i = P_n(K) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i,$$

tedy

$$F(K) = \lim F_n(K) \leq \lim P_n(K) + \varepsilon,$$

tedy podle (γ)

$$\bar{f}f \leq \lim \bar{f}f_n + \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, platí též $\bar{f}f \leq \lim \bar{f}f_n$; tím je věta dokázána.

71. Buďte f_n bodové funkce v K ($n = 1, 2, \dots$); necht $\bar{f} \inf_n f_n > -\infty$.

Pak

$$\bar{f} \lim f_n \leq \lim \bar{f}f_n.$$

Důkaz: Necht $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Pak $g_n \leq f_n$, $g_n \nearrow \lim f_n$, tedy platí podle 70

$$\bar{f} \lim f_n = \bar{f} \lim g_n = \lim \bar{f}g_n \leq \lim \bar{f}f_n.$$

72. Necht $g, h, f_n \in \mathfrak{F}$, $g \leq f_n \leq h$ ($n = 1, 2, \dots$), $f_n \rightarrow f$. Pak je $f \in \mathfrak{F}$ a platí

$$\int_K f_n \rightarrow \int_K f.$$

Důkaz: Podle 71 platí

$$\bar{f}f \leq \lim_{\bar{K}} f f_n;$$

podobně se zjistí, že je $\lim_{\bar{K}} f f_n \leq \underline{f}f$, a tedy

$$\underline{f}g \leq \lim_{\bar{K}} f f_n \leq \underline{f}f \leq \bar{f}f \leq \lim_{\bar{K}} f f_n \leq \underline{f}h.$$

Odtud věta ihned plyne.

73. Necht $f_n \in \mathfrak{F}$, $f_n \nearrow f$. Pak $f \in \mathfrak{F}_R$,

$$\underline{f}f = \bar{f}f = \lim_{\bar{K}} f f_n.$$

Důkaz: Zřejmě $\underline{f}f \geq \lim_{\bar{K}} f f_n$; podle 70 tedy platí

$$\lim_{\bar{K}} f f_n \leq \underline{f}f \leq \bar{f}f = \lim_{\bar{K}} f f_n.$$

(Pokračování.)