Josef Novák

O uspořádaných prostorech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 3, 228--229

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117015

REFERÁTY O PŘEDNÁŠKÁCH V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

O USPOŘÁDANÝCH PROSTORECH

(Referát o přednášce *J. Nováka* proslovené 26. II. 1951.)

Označme písmenem Q lexikograficky uspořádanou množinu, jejíž prvky jsou nespočetné transfinitní posloupnosti $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots$ nul a jedniček ($x_\lambda = 0$ nebo $= 1$) typu ω_1, při čemž každé dvě sousední posloupnosti pokládáme za jediný prvek v Q. Po této identifikaci budeme mluvit zvlášť o prvku x a zvláště o jeho rozvoji $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots$ Řekneme, že prvek $x \in Q$ s rozvojem $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots$ ($\lambda < \omega_1$) má vlastnost (c), (d), (e), (f), (g) s nejmenším ordinálním číslem α, jestliže v případě

(c): existují dvě obyčejné vzrůstající posloupnosti indexů $\lambda_n \to \alpha$, $\mu_n \to \alpha$ takové, že $x_{\lambda_n} = 0$, $x_{\mu_n} = 1$ pro všecka $n = 1, 2, \dots i$;

(d): existuje-li nejmenší ordinální číslo β takové, že $i_\lambda = 1$ pro $\beta \leqq \lambda < \alpha = \beta + \omega$, při čemž β je buď limitní číslo nebo 0;

(e): totéž jako (d) až na požadavek $i_\lambda = 0$ pro $\beta \leqq \lambda < \alpha = \beta + \omega$;

(f): totéž jako (d) až na požadavek, že β je isolované ordinální číslo;

(g): totéž jako (d) až na požadavky uvedené v (e) a (f).

Pomocí některých kombinací těchto vlastností dají se sestrojiti uspořádaná kontinua $\mathfrak{P}_k$, $k = 1, 2, \dots, 6$, z nichž každé má tolik prvků jako množina reálných čísel, v nichž však není žádná spočetná množina hustá (jejich separabilita je $\aleph_1$). Každé z uvedených kontinuí má řadu zajímavých vlastností. Tak na př.: Z každého nespočetného disjunktního systému intervalů v $\mathfrak{P}_k$ dá se vybrat nespočetný podsystém intervalů, jejichž levé krajní body tvoří buď vzrůstající nebo klesající bodovou posloupnost. Kontinuum $\mathfrak{P}_7$ o podobných vlastnostech sestrojil na můj podnět L. Mišík. Tak je sestrojeno 7 základních typů uspořádaných kontinuí o mohutnosti $2^{\aleph_0}$ a separabilitě $\aleph_1$. Zda existuje osmý typ $\mathfrak{P}_8$ — tak zvané Suslinovo kontinuum, jež má podobné vlastnosti jako $\mathfrak{P}_k$ až na to, že každý jeho bod má charakter c_{00} (t. j. jest průnikem spočetného systému intervalů) — je dodnes jedním z nejtěžších matematických problémů. Dá se dokázat, že Suslinovo kontinuum, existuje-li, nedá se vnořit do žádného z uvedených kontinuí $\mathfrak{P}_k$. Všechna kontinua byla dosud neznáma, až na kontinuum $\mathfrak{P}_3$, o němž M. NOVOTNÝ dokázal, že má stejnou strukturu jako Bernsteinovo ultrakontinuum.

Pro hlubší studium uspořádaných kontinuí je vhodná methoda postupného dělení intervalů. Axiomaticky můžeme definovat takto: Systém $\mathfrak{T}$ uzavřených intervalů uspořádaného kontinua C je (dyadické) dělení, jsou-li splněny tyto 4 podmínky: 1) $X \in \mathfrak{T}$, $Y \in \mathfrak{T} \Rightarrow X \cap Y = X$ nebo $= Y$ nebo $X \cap Y$ není interval 2) $C \in \mathfrak{T}$, 3) $X \in \mathfrak{T} \Rightarrow$ ex $X_1 \in \mathfrak{T}$, $X_2 \in \mathfrak{T}$ s vlastností $X = X_1 \cup X_2$ tak, že $X_1 \cap X_2$ obsahuje jediný bod; 4) je-li $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}$ monotonní podsystém, pak $\cap \mathfrak{T}' \in \mathfrak{T}$ nebo $\cap \mathfrak{T}'$ obsahuje jeden bod. Pomocí methody postupného dělení dá se dokázat, že neexistuje uspořádané kontinuum $\mathfrak{P}_9$ s podobnými vlastnostmi jako ostatní $\mathfrak{P}_k$ avšak bez bodů s charakterem c_{00}.

NELINEÁRNÍ VYNUCENÉ OSCILACE

(Referát o přednášce *M. Zlámala* proslovené 16. IV. 1951.)

Přednášející se zabýval nelineární diferenciální rovnicí 2. řádu

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x) = p(t), \qquad (1)$$

kde tečka značí derivaci podle času t a $p(t)$ je periodická funkce času s periodou L. Periodická řešení této rovnice jsou nazývána vynucené oscilace. Byl podán přehled nejnovějších výsledků o těchto oscilacích. Nejdříve byl probrán problém existence vynucených oscilací a bylo uvedeno několik method. Všechny tyto methody se zakládají na transformační methodě v theorii diferenciálních rovnic prvně použité POINCAREM. K difer. rovnici (1) je totiž přidružena jistá topologická transformace T roviny do sebe a periodickému řešení odpovídá pevný bod této transformace. Podrobněji byla probrána pouze methoda CARTWRIGHTOVÉ (viz Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, str. 149 až 190). Pak se přednášející zmínil o dalších vlastnostech transformace T tak, jak jsou vyloženy v LEVINSONOVĚ práci *Transformation Theory of Nonlinear Differential Equations of the Second Order* (Annals of Math., 45 (1944), str. 23 až 737). Nakonec byly uvedeny některé výsledky LEVINSONA, CARTWRIGHTOVÉ a LITTLEWOODA týkající se problému stability. Bylo uvedeno, že rovnice

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + x = p(t),$$

kde $f(x) > 0$ a $\int^{\infty} f(x)\,dx = \infty$, má jedno periodické řešení a k tomuto všechna ostatní řešení konvergují při $t \to \infty$. Totéž platí pro obecnější rovnici

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = p(t),$$

jestliže $f(x) \geqq m_1 > 0$, $g(0) = 0$, $g'(x) \geqq m_2 > 0$ a $|g''(x)|$ je dostatečně malá. Jestliže $f(x)$ mění znaménko, nejsou zatím známy žádné obecné výsledky.