Časopis pro pěstování matematiky

Vlastimil Pták

Důkaz jedné věty Wardovy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 3, 217--224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117013

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 76 (1951)

DŮKAZ JEDNÉ VĚTY WARDOVY

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

(Došlo 15. května 1951.)

Článek obsahuje jednoduchý důkaz věty o derivabilitě additivní funkce intervalu v m-rozměrném euklidovském prostoru.

Budiž dán pevně euklidovský prostor E_m.

Když $a = (a_1, \ldots, a_m) \in E_m$ a $b = (b_1, \ldots, b_m) \in E_m$ jsou dva body takové, že $a_i < b_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$, potom nazveme intervalem vytvořeným body a, b a označíme $J[a_i, b_i]$ množinu těch $(x_1, \ldots, x_m) \in E_m$, pro něž platí $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$.

Množinu $R \subset E_m$ nazveme figurou, existuje-li konečně mnoho intervalů $J_1, \ldots, J_n$ tak, že $R = J_1 + \ldots + J_n$. Jsou-li $A_1 \subset E_m$, $A_2 \subset E_m$ dvě libovolné množiny, potom řekneme, že A_1 a A_2 se nepřekrývají, jestliže množina A_1A_2 nemá vnitřní bod.

Funkcí intervalu nazýváme zobrazení množiny všech intervalů do množiny všech čísel reálných. Funkci intervalu $F(J)$ nazveme additivní, jestliže platí $F(J_1 + J_2) = F(J_1) + F(J_2)$ pro každou dvojici nepřekrývajících se intervalů J_1, J_2, pro něž $J_1 + J_2$ je zase interval. Snadno se dokáže, že každá additivní funkce intervalu může býti rozšířena na všechny figury právě jedním způsobem tak, že platí $F(R_1 + R_2) = F(R_1) + F(R_2)$ pro každé dvě figury R_1, R_2, které se nepřekrývají.

Je-li dána libovolná množina $M \subset E_m$, pak $|M|$ bude značit její horní Lebesgueovu míru, $\delta(M)$ bude značit její průměr. Bod $x \in E_m$ budeme nazývati bodem silné horní hustoty množiny M, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ tak, že platí $|MJ| > (1 - \varepsilon)|J|$ pro každý interval J, pro nějž $x \in J$ a $\delta(J) < \delta(\varepsilon)$. Platí potom věta: Je-li M libovolná množina $M \subset E_m$, pak skoro všechny $x \in M$ jsou body silné horní hustoty množiny M.

Je-li $J = [a_i, b_i]$ a označíme-li $l_i = b_i - a_i$, $l = \max\{l_i\}_{i=1}^m$, potom číslo $\prod_{i=1}^m \frac{l_i}{l}$ nazveme parametrem regularity intervalu J a budeme je značiti $r(J)$. Budiž dále dána pevně additivní funkce intervalu $F(J)$. Pro každé $x \in E_m$ a každé $\alpha \in (0, 1\rangle$ definujeme

$$\underline{F}_{(\alpha)}(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{\substack{x \in J \\ \delta(J)<\varepsilon \\ r(J)\geqq\alpha}} \frac{F(J)}{|J|}$$

$$\overline{F}_{(\alpha)}(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\substack{x \in J \\ \delta(J)<\nu \\ r(J)\geqq\alpha}} \frac{F(J)}{|J|}$$

$$\underline{F}(x) = \inf_{1\geqq\alpha>0} \underline{F}_{(\alpha)}(x),$$

$$\overline{F}(x) = \sup_{1\geqq\alpha>0} \overline{F}_{(\alpha)}(x).$$

Zřejmě pro každý $x \in E_m$ a každé $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí

$$\underline{F}(x) \leqq \underline{F}_{(\alpha)}(x) \leqq \overline{F}_{(\alpha)}(x) \leqq \overline{F}(x).$$

Řekneme, že F má derivaci v bodě x, když platí $\underline{F}(x) = \overline{F}(x)$.

V roce 1937 dokázal A. J. Ward*) tuto větu: *Nechť F je additivní funkce intervalu v E_m a nechť D znamená množinu těch $x \in E_m$, pro něž buď $\underline{F}(x) > -\infty$ nebo $\overline{F}(x) < +\infty$. Potom skoro všude v D má funkce F derivaci konečnou.*

Úkolem tohoto článku jest ukázati, že je možno důkaz věty Wardovy zjednodušiti zavedením jednoho speciálního druhu derivace. Zároveň lemmata, z nichž se důkaz skládá, nabudou samostatného smyslu. Zavedeme proto některé další pojmy. Pro každé přirozené k nechť $\mathfrak{S}_k$ znamená systém všech krychlí tvaru $\left[\frac{p_i}{2^k}, \frac{p_i+1}{2^k}\right]$, kdež p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ jsou libovolná čísla celá. Takové krychle budeme někdy nazývati síťovými krychlemi. Pro každé $x \in E_m$ a každé přirozené n položme

$$\underline{d}_n(x) = \inf_{x \in K \in \mathfrak{S}_n} \frac{F(K)}{|K|}$$

$$\overline{d}_n(x) = \sup_{x \in K \in \mathfrak{S}_n} \frac{F(K)}{|K|}$$

$$\underline{\underline{F}}(x) = \liminf \underline{d}_n(x),$$

$$\overline{\overline{F}}(x) = \limsup \overline{d}_n(x).$$

Řekneme, že F má síťovou derivaci v bodě x, když platí

$$\underline{\underline{F}}(x) = \overline{\overline{F}}(x).$$

*) Fund. Math. (1937).

Naznačíme postup důkazu, který se v podstatě skládá ze dvou částí. V první části dokážeme pro síťové derivace větu, obdobnou větě Wardově. Důkaz je založen na lemmatu (1,1) o pokrytí, které v podstatě pochází od WARDA. V druhé části hraje podstatnou úlohu geometrické lemma (2,1), které nám umožní převésti vyšetřování derivace $\underline{F}$ na vyšetřování jednodušší derivace $\underline{\underline{F}}$.

(1,1). *Mějme $Q \in \mathfrak{S}_k$ a množinu $E \subset Q$.*

Nechť $|E| > (1 - \varrho) |Q|$, $0 < \varrho < (\frac{1}{2})^m$.

Nechť $\mathfrak{K}$ je systém síťových krychlí $K \subset Q$ takových, že ke každému $x \in E$ existují $K \in \mathfrak{K}$, pro něž $x \in K$. Pak existuje rozklad $Q = K_1 + \ldots + K_r + B_1 + \ldots + B_s$ s nepřekrývajícími se sčítanci tak, že $K_i \in \mathfrak{K}$ a B_j jsou síťové krychle, pro něž $B_j E \neq 0$, $|\Sigma B_j| < 2^m \varrho |Q|$.

Důkaz. Označme $\mathfrak{K}_n = \underset{K}{E}[K \in \mathfrak{K} \cap \sum_{i \leq n} \mathfrak{S}_i,\ KE \neq 0]$, $E_n = E \cap \sum_{K \in \mathfrak{K}_n} K$.

Protože $E_n \subset E_{n+1}$, $\Sigma E_n = E$, můžeme voliti tak veliké n, že $|E_n| > (1 - \varrho) |Q|$. Označme $R = \sum_{K \in \mathfrak{K}_n} K$. Vezmeme nyní všechny krychle $K \subset Q$, $K \in \sum_{i \leq n} \mathfrak{S}_i$. Takovou krychli $K \in \mathfrak{S}_i$ nazveme prvního druhu, je-li $K \in \mathfrak{K}_n$, nazveme ji krychlí druhého druhu, jestliže zároveň

(1) K se překrývá s figurou R,

(2) aspoň jedna z 2^m krychlí síta $\mathfrak{S}_{i+1}$ v ní obsažených se nepřekrývá s figurou R.

Snadno se dokáže, že každý bod krychle Q patří aspoň do jedné krychle prvního nebo druhého druhu. Skutečně, když $x \in Q$ nepatří do R, vezmeme libovolnou krychli K_n síta $\mathfrak{S}_n$, která ho obsahuje. Ta se nepřekryje s R. Nechť pro $i \leq n$ K_i znamená onu krychli síta $\mathfrak{S}_i$, pro niž $K_i \supset K_n$. Jest $Q = K_k \supset K_{k+1} \supset \ldots \supset K_n$.

První člen této posloupnosti se překrývá s R, poslední člen se nepřekrývá s R. Existuje tedy index j ($k \leq j < n$) tak, že K_j se překrývá s R, ale K_{j+1} se nepřekrývá s R. Potom zřejmě K_j je krychle druhého druhu, obsahující x.

Existuje tedy rozklad $Q = K_1 + \ldots + K_r + B_1 + \ldots + B_s$ s nepřekrývajícími se sčítanci tak, že $K_i \in \mathfrak{K}$ a B_j jsou krychle druhého druhu. Odhadneme $|\Sigma B_j|$. Každé B_j obsahuje krychli W_j o poloviční straně, nepřekrývající se s R. Odtud

$$|\Sigma B_j| = 2^m |\Sigma W_j| \leq 2^m |Q \ominus R| < 2^m \varrho |Q|.$$

(1,2) *Budiž D množina těch x, kde $\underline{F}(x) < -\infty$.*

Potom skoro všude v D jest $\underline{\underline{F}}(x) = \overline{\overline{F}}(x)$.

Důkaz. Nechť to není pravda. Potom pro vhodné r budou pro funkci $G(J) = F(J) - r|J|$ existovati množina A kladné horní míry a čísla p, q těchto vlastností:

$$x \in A \Rightarrow 0 < \underline{\underline{G}}(x) < p < q < \overline{\overline{G}}(x).$$

Existuje nyní množina $E \subset A$ kladné horní míry a číslo $\sigma > 0$ takové, že pro každou krychli Q z nějakého $\mathfrak{S}_k$, pro niž $\delta(Q) < \sigma$, $QE \neq 0$ platí $G(Q) > 0$. Buď nyní $x_0 \in E$ bod silné horní hustoty množiny E. Vezměme kladné číslo $\varrho = \frac{1}{2^m} \frac{q-p}{q} < \frac{1}{2^m}$. Existuje nyní $\eta > 0$ takové, že pro každý interval J, obsahující x_0 a průměru $< \eta$ platí $|EJ| > (1-\varrho)|J|$. Protože $G(x_0) < p$, můžeme voliti krychli Q z nějakého $\mathfrak{S}_k$ tak, že $x_0 \in Q$, $\delta(Q) < \min(\sigma, \eta)$ a při tom $G(Q) < p|Q|$. Bude potom též $|EQ| > (1-\varrho)|Q|$. Ve všech bodech množiny EQ jest $\overline{\overline{G}}(x) > q$, takže ke každému bodu $x \in EQ$ existují libovolně malé síťové krychle K jej obsahující a splňující $G(K) > q|K|$. Podle lemmatu (1,1) existuje rozklad $Q = K_1 + \ldots + K_r + B_1 + \ldots + B_s = R + S$ na nepřekrývající se síťové krychle, při čemž pro každé K_i platí $G(K_i) > q|K_i|$ a každé B_j se protne s E. Protože $\delta(B_j) \leqq \delta(Q) < \sigma$, jest $G(B_j) > 0$; kromě toho $|S| < 2^m\varrho|Q| = \frac{q-p}{q}|Q|$. Odtud

$$G(Q) = G(R) + G(S) > q|R| > q\left(1 - \frac{q-p}{q}\right)|Q| = p|Q|, \text{ což je spor.}$$

(1,3) *Nechť D je množina těch x, pro něž $\underline{\underline{F}}(x) = +\infty$.*

Potom $|D| = 0$.

Důkaz. Dejme tomu, že $|D| > 0$. Pak existuje $E \subset D$ kladné horní míry a číslo $\sigma > 0$ tak, že pro každou síťovou krychli Q, pro niž $\delta(Q) < \sigma$ a $QE \neq 0$ platí $F(Q) > 0$. Zvolme $x_0 \in E$ bod silné horní hustoty množiny E. Zvolme $\varrho = \frac{1}{2} \frac{1}{2^m}$. Existuje $\eta > 0$ tak, že pro každý interval J, obsahující bod x_0 a průměru $< \eta$ platí $|EJ| > (1-\varrho)|J|$. Zvolme síťovou krychli Q tak, aby $x_0 \in Q$, $\delta(Q) < \min(\sigma, \eta)$, takže bude $|EQ| > (1-\varrho)|Q|$.

Položme

$$q = 2\frac{F(Q)}{|Q|} > 0.$$

Ve všech bodech množiny EQ platí $\underline{\underline{F}}(x) > q$, takže ke každému $x \in EQ$ existují libovolně malé síťové krychle K jej obsahující a splňující $F(K) > q|K|$. Podle lemmatu (1,1) existuje rozklad na síťové krychle $Q = K_1 + \ldots + K_r + B_1 + \ldots + B_s = R + S$ tak, že

$$F(K_i) > q|K_i|, \; B_iE \neq 0, \; |S| < 2^m\varrho|Q| = \tfrac{1}{2}|Q|.$$

Jest potom $F(S) > 0$, takže

$$F(Q) = F(R) + F(S) > F(R) > q|R| > q \cdot \tfrac{1}{2}|Q| = F(Q),$$

což je spor.

(1,4). *Nechť D je množina těch x, pro něž buď $\underline{\underline{F}}(x) > -\infty$ nebo $\overline{\overline{F}}(x) < +\infty$. Potom skoro všude v D má F síťovou derivaci konečnou.*

Důkaz plyne ihned z předešlých dvou výsledků.

(2,1). *Buďtež dána dvě čísla α, λ*

$$0 < \alpha < (\tfrac{1}{2})^m, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Pak existuje kladné číslo $\varrho = \varrho(\alpha, \lambda)$ tak, že pro každý interval J parametru regularity $\geqq \alpha$ existují dva intervaly R_i a R_e takové, že $R_i \subset J \subset R_e$, $|R_i| > (1 - \lambda)\,|J|$, $|R_e| < (1 + \lambda)\,|J|$. Při tom R_i i R_e se skládají z krychlí jistého síta $\mathfrak{S}_k$, jehož krychle mají objem $> \varrho|J|$ a dále obě figury $R_e \ominus J$, $J \ominus R_i$ se rozpadají na konečně mnoho nepřekrývajících se intervalů parametru regularity $\geqq \alpha$ a objemu $> \varrho|J|$.

Důkaz. Zvolme především $\beta > 0$ tak, aby zároveň

$$(1 + \beta)^m < 1 + \lambda, \quad (1 - \beta)^m > 1 - \lambda.$$

Ukážeme, že číslo $\varrho = (\tfrac{1}{11}\alpha \,.\, \beta)^m$ vyhovuje podmínkám lemmatu. Budiž tedy $J = [a_j, b_j]$ libovolný interval parametru regularity $\geqq \alpha$. Bez omezení obecnosti můžeme předpokládati, že čísla $l_j = b_j - a_j$ splňují nerovnost $l_1 \leqq l_2 \leqq \ldots \leqq l_m \leqq 1$. Platí potom $l_m \leqq \dfrac{1}{\alpha} l_1$. Vezměme číslo $l = \frac{1}{5} l_1 \beta < \frac{1}{5} l_1$. Pro $w = -2, -1, 0, +1, +2$ nechť J_w znamená interval $[a_j - wl, b_j + wl]$.

Jest tedy $J_{-2} \subset J_{-1} \subset J_0 = J \subset J_{+1} \subset J_{+2}$

$$\frac{|J_{+2}|}{|J|} = \Pi\left(1 + \frac{4l}{l_j}\right) \leqq \Pi\left(1 + \frac{4l}{l_1}\right) < (1 + \beta)^m < 1 + \lambda,$$

$$\frac{|J_{-2}|}{|J|} = \Pi\left(1 - \frac{4l}{l_j}\right) \geqq \Pi\left(1 - \frac{4l}{l_1}\right) > (1 - \beta)^m > 1 - \lambda.$$

Volme nyní přirozené k tak, aby

$$\frac{1}{2^{k-1}} > l \geqq \frac{1}{2^k}$$

(to je možné, protože $l < \frac{1}{5}$). R_i (R_e) bude součet všech krychlí síta $\mathfrak{S}_k$, které se protnou s J_{-2} (J_{+1}). Vzhledem k volbě k bude $J_{-2} \subset R_i \subset J_{-1} \subset \subset J \subset J_{+1} \subset R_e \subset J_{+2}$, takže jejich poměrné objemy mají žádané vlastnosti. Označíme-li $R_i = [a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$, $R_e = [a_j^{(e)}, b_j^{(e)}]$, pak platí nerovnosti pro každé j

$$a_j^{(e)} < a_j < a_j^{(i)} < b_j^{(i)} < b_j < b_j^{(e)},$$

při čemž rozdíl každých dvou po sobě následujících čísel je aspoň roven l. Tímto způsobem se nám obě figury $R_e \ominus J$ i $J \ominus R_i$ rozpadnou na $3^m - 1$ intervalů, jejichž každá strana je $\geqq l$. Každý z těchto intervalů je dále možno rozděliti na intervaly I_r, jejichž každá strana jest $\geqq l$ a $< 2l$. Takový interval má potom parametr regularity $\geqq (\frac{1}{2})^m > \alpha$. Zbývá odhadnouti objemy intervalů I a krychlí $K \in \mathfrak{S}_k$. Jest $|I_r| \geqq l^m$, $|K| = \left(\frac{1}{2^k}\right)^m > \left(\frac{l}{2}\right)^m$. Stačí tedy dokázati, že $(\frac{1}{2}l)^m > \varrho|J|$. Jest však

$$\left(\frac{l}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{10}l_1\beta\right)^m > \left(\frac{\alpha}{11}\beta\right)^m\left(\frac{1}{\alpha}l_1\right)^m \geqq \varrho|J|.$$

Poznámka, které užijeme později

$$\frac{l_i}{2} + 2l \leqq \frac{l_i}{2}(1 + \tfrac{4}{5}\beta) < \frac{l_i}{2}(1 + \beta) < \frac{l_i}{2}\sqrt[m]{2}.$$

(2,2). *Budiž $0 < \alpha < (\frac{1}{2})^m$. Nechť D znamená množinu těch x, pro něž $-\infty < \underline{F}_{(\alpha)}(x)$. Potom skoro všude v D platí $\underline{F}_{(\alpha)}(x) = \underline{\underline{F}}(x)$.*

Důkaz. Nechť ta věta neplatí. Potom pro vhodné r budou pro funkci $G(J) = F(J) - r|J|$ existovati množina A kladné horní míry a dvě čísla p, q tak, že platí $x \in A \Rightarrow 0 < \underline{G}_{(\alpha)}(x) < p < q < \underline{\underline{G}}(x)$. Existuje nyní $E \subset A$ kladné horní míry a číslo $\sigma > 0$ takové, že platí obě implikace

$$JE \neq 0,\ r(J) \geqq \alpha,\ \delta(J) < \sigma \Rightarrow G(J) > 0,$$
$$KE \neq 0,\ K \in \mathfrak{S}_k,\ \delta(K) < \sigma \Rightarrow G(K) > q|K|.$$

Buď nyní $x_0 \in E$ bod silné horní hustoty množiny E. Vezměme v lemmatu (2,1) za $\lambda = \dfrac{q-p}{q}$ a příslušné $\varrho = \varrho(\alpha, \lambda)$. Existuje $\eta > 0$ tak, že každý interval J, který obsahuje bod x_0 a má průměr menší než η, splňuje

$$|EJ| > (1 - \varrho)\,|J|.$$

Protože $G_{(\alpha)}(x_0) < p$, existuje interval J těchto vlastností:

$$x_0 \in J,\ r(J) \geqq \alpha,\ \delta(J) < \min(\sigma, \eta),\ G(J) < p|J|$$

z hořeního potom plyne ještě $|EJ| > (1 - \varrho)\,|J|$. Podle předešlého lemmatu (2,1) existuje rozklad $J = K_1 + \ldots + K_r + J_1 + \ldots + J_s$ s nepřekrývajícími se sčítanci. Při tom K_i jsou síťové krychle, J_j mají parametry regularity $\geqq \alpha$ a objem každého z těch sčítanců jest $> \varrho|J|$, z čehož plyne, že každý ten sčítanec se protne s E.

Protože $\delta(J) < \sigma$, platí to tím spíše pro každý ten sčítanec a tedy, označíme-li $R = \Sigma K_i$, $S = \Sigma J_j$, bude $G(S) > 0$ a zároveň $|S| < \dfrac{q-p}{q}\,.\,|J|$. Potom

$$G(J) = G(R) + G(S) > G(R) > q|R| > p|J|,$$

což je spor.

Definice. Je-li $J = [a_i, b_i]$ interval o středu $s = (s_1 \dots s_m)$ a stranách $l_i = b_i - a_i$, potom nechť $2J$ znamená interval $\left[s_i - \sqrt[m]{2}\,\frac{l_i}{2},\ s_i + \sqrt[m]{2}\,\frac{l_i}{2}\right]$. Jest $|2J| = 2|J|$.

Poznámka. Podle poznámky k lemmatu (2,1) platí vždy $J_{+2} \subset 2J$.

(2,3). *Budiž D množina těch x, pro něž $-\infty < \underline{F}(x)$ a zároveň $\overline{F}(x) = +\infty$. Potom* $|D| = 0$.

Důkaz. Podle theorému (1,2) a lemmatu (2,2) existuje nulová N_1 tak, že na $D - N_1$ jest $-\infty < \underline{F}(x) = \underline{\underline{F}}(x) = \overline{\overline{F}}(x)$, $\overline{F}(x) = +\infty$. Podle lemmatu (1,3) existuje nulová N_2 tak, že na $H = D - N_1 - N_2$ platí $-\infty < \underline{F}(x) = \underline{\underline{F}}(x) = \overline{\overline{F}}(x) < +\infty$, $\overline{F}(x) = +\infty$. Stačí tedy dokázati $|H| \overline{=} 0$.

Dejme tomu, že $|H| > 0$. Potom pro vhodné r pro funkci $G(J) = F(J) - r|J|$ existuje množina $B \subset H$ kladné horní míry a číslo p tak, že platí $x \in B \Rightarrow 0 < \underline{G}(x) = \underline{\underline{G}}(x) = \overline{\overline{G}}(x) < p$, $\overline{G}(x) = +\infty$. Volme $q = 2p$. Existuje podmnožina $C \subset B$ kladné horní míry a číslo $\alpha < \frac{1}{2^m}$ tak, že $x \in C \Rightarrow \overline{G}_{(\alpha)} > q$. Protože na množině C platí $\underline{G}_{(\alpha)} > 0$, $\overline{\overline{G}} < p$, existuje množina $E \subset C$ kladné horní míry a číslo $\sigma > 0$ tak, že

$$\delta(J) < \sigma,\ r(J) \geqq \alpha,\ JE \neq 0 \Rightarrow G(J) > 0,$$

$$\delta(K) < \sigma,\ K \in \mathfrak{S}_k,\ KE \neq 0 \Rightarrow G(K) < p|K|.$$

Volme dále $0 < \lambda < 1$ a vezměme příslušné $\varrho = \sigma(\alpha, \lambda)$. Budiž $x_0 \in E$ bod silné horní hustoty množiny E. Existuje $\eta > 0$ tak, že $x_0 \in J$, $\delta(J) < \eta \Rightarrow |EJ| > (1 - \frac{1}{2}\varrho)\,|J|$. Protože $\overline{G}_{(\alpha)}(x_0) > q$, existuje interval J tak, že

$$x_0 \in J,\ r(J) \geqq \alpha,\ \delta(2J) < \min(\sigma, \eta),\ G(J) > q|J|.$$

Nyní každý interval $I \subset 2J$, jehož objem je větší než $\varrho|J|$ protne E, neboť $\varrho|J| = \frac{1}{2}\varrho|2J|$. Podle našeho lemmatu (2,1) existuje $R_e \supset J$ tak, že se skládá ze síťových krychlí objemu $> \varrho|J|$. Podle předešlé poznámky jest $R_e \subset 2J$, takže

$$G(R_e) < p|R_e| \leqq 2p|J| = q|J|.$$

Zároveň $R_e \ominus J$ se rozpadá na několik intervalů parametru regularity $\geqq \alpha$ a objemu $> \varrho|J|$, je tedy $G(R_e \ominus J) > 0$. Odtud $G(R_e) > G(J) > q|J|$, což je spor.

(2,4). (Věta Wardova.) *Nechť D znamená množinu těch x, pro něž buď $\underline{F}(x) > -\infty$ nebo $\overline{F}(x) < +\infty$. Potom skoro všude v D má F derivaci konečnou.*

Důkaz.

$$D = \mathop{E}_{x}[-\infty < \underline{F}(x),\ \overline{F}(x) < +\infty] + \mathop{E}_{x}[-\infty < \underline{F}(x),$$
$$\overline{F}(x) = +\infty] + \mathop{E}_{x}[-\infty = \underline{F}(x),\ \overline{F}(x) < +\infty] = D_1 + D_2 + D_3.$$

Podle předešlého lemmatu (2,3) a lemmatu k němu symetrického, obě poslední množiny jsou nulové. V první množině skoro všude jest $\underline{F}(x) = \underline{\underline{F}}(x)$, $\overline{F}(x) = \overline{\overline{F}}(x)$ podle (2,2) a lemmatu symetrického a konečně podle (1,4) jest v D_1 skoro všude $\underline{\underline{F}}(x) = \overline{\overline{F}}(x)$.