Časopis pro pěstování matematiky, roč. 76 (1951)

O JEDNOM VYTVOŘENÍ JONQUIÈRESOVY INVOLUCE PÁTÉHO STUPNĚ

J. BÍLEK, Praha.

(Došlo 13. dubna 1950.)

V článku se sestrojuje rovinná involutorní Cremonova příbuznost s konečným počtem výjimek s pomocí složeného lineárního systému S_4^3 křivek 4. stupně.

Nechť body $A_1, A_2, \ldots, A_9$ tvoří basi svazku kubik S_3^1. Bodem A_1 jako dvojnásobným a ostatními jako jednoduchými je určen komplex kvartik třetí dimense $S_4^3(A_1^2, A_2, \ldots, A_9)$. Komplex S_4^3 vytne na obecné kubice svazku S_3^1 lineární bodovou soustavu g_2^1, neboť g_2^3 a g_2^2 jsou na obecné kubice nemožné. Komplex S_4^3 je tedy složený lineární systém, t. j. všechny kvartiky systému S_4^3 jdoucí nějakým bodem P, jdou nutně ještě dalším bodem P'. Bodová dvojice P, P' je homologickou dvojicí v centrické involuci, kterou na kubice svazku S_3^1 vytne komplex kvartik S_4^3. Zvolíme-li libovolný bod P v rovině, který není totožný s žádným bodem A_i ($i = 1, 2, \ldots, 9$), odpovídá mu jediný bod P' a obráceně. Vzniká tak v rovině involutorní příbuznost jednojednoznačná s konečným počtem výjimek, jak v dalším ukážeme. Patří tedy tato involuce mezi rovinné Cremonovy transformace. Abychom nalezli, co odpovídá bodu A_1, uvažujme bod P soumezný k bodu A_1 ve směru t. Ve svazku S_3^1 jest tím určena jediná kubika mající v bodě A_1 tečnu t a v komplexu kvartik S_4^3 je tím určena síť kvartik, které mají v bodě A_1 společnou tečnu t. V této síti existuje jediná kvartika, která má bod A_1 za trojnásobný a ostatní body za jednoduché. Tato racionální kvartika protne kubiku mající v bodě A_1 tečnu t ještě v jednom bodě, který odpovídá tedy bodu P. Necháme-li nyní směr t nabýti všech možných směrů, dostaneme všechny body, které odpovídají bodu A_1. Vidíme, že bodu A_1 odpovídá racionální kvartika $K_4(A_1^3, A_2, \ldots, A_9)$.

Nechť se nyní bod P blíží k bodu A_2 v libovolném směru t. Ve svazku kubik S_3^1 je tím určena jediná kubika s tečnou t v bodě A_2 a v komplexu kvartik S_4^3 je tím určena síť kvartik, které mají t za společnou tečnu v bodě A_2. V síti kvartik existuje svazek eliptických kvartik, který má druhý dvojnásobný bod base v bodě A_2. Tento svazek eliptických kvartik prochází ještě dalším bodem, neboť body $A_1^2, A_2^2, A_3, \ldots, A_9$ platí za 15 bodů jeho base. Tento 16. bod base je pak bod odpovídající bodu P.

Avšak uvažovaný svazek eliptických křivek se rozpadne na přímku $\overline{A_1A_2}$ a svazek kubik S_3^1. Přímka $\overline{A_1A_2}$ protne kubiku, mající v bodě A_2 tečnu t, ještě v jednom bodě, který tedy odpovídá bodu P. Měníme-li směr t, vidíme, že bodu A_2 odpovídá celá přímka A_1A_2. Podobně je tomu u ostatních bodů $A_3, \dots, A_9$. Snadno nahlédneme, že jiných hlavních bodů není. Abychom stanovili stupeň této involuce, užijeme známého vztahu

$$3(n - 1) = \Sigma\alpha_i,$$

tedy v našem případě

$$3(n - 1) = 12 \text{ a } n = 5.$$

Hledejme nyní křivku samodružných bodů. Samodružné body centrických involucí na kubikách jsou zároveň samodružné body naší involuce. Poněvadž hlavní křivka odpovídající bodu A_1 má v A_1 trojnásobný bod, proto křivka samodružných bodů Δ má bod A_1 rovněž za trojnásobný a tečny hlavní křivky v bodě A_1 jsou zároveň tečnami křivky Δ v bodě A_1. Podobně musí se Δ dotýkati hlavních přímek $\overline{A_1A_i}$ v bodě A_i. Má tedy obecná kubika ze svazku S_3^1 s křivkou Δ celkem 15 průsečíků $(3 + 8 + 4)$. Z toho plyne, že křivka Δ je stupně pátého. Křivka Δ je tedy $\Delta(A_1^3, A_2, \dots, A_9)$.

Obecné přímce odpovídá racionální kvintika, která má bod A_1 za čtyřnásobný a ostatní body $A_2, \dots, A_9$ za jednoduché. Veďme přímku bodem A_1. Od odpovídající kvintiky odpadne hlavní kvartika odpovídající bodu A_1 a zůstane nám jen přímka. Daná přímka protne hlavní kvartiku ještě v jednom bodě a křivku Δ ještě ve dvou bodech. Proto přímka jí odpovídající jde zase bodem A_1 a těmi dvěma samodružnými body, je tudíž samodružná. Naše involuce v ní indukuje bodovou involuci, která ony dva samodružné body má za své samodružné body. Svazek kubik S_3^1 vytne na samodružné přímce svazku se středem v A_1 lineární soustavu bodovou g_2^1. Dvojice této soustavy tvoří dvojice naší involuce. Můžeme také ovšem říci, že svazek přímek S_1^1 se středem v A_1 vytne na obecné kubice svazku S_3^1 lineární soustavu bodovou g_2^1 a její dvojice jsou dvojice naší involuce. Je tedy možno naši involuci také vytvořiti pomocí svazku přímek S_1^1 a svazku kubik S_3^1, kterážto konstrukce je známější.

Užijme naší involuce ke studiu rovinných kvartik. V komplexu kvartik $S_4^3(A_1^2, A_2, \dots, A_9)$ je obecným bodem roviny určena jediná rozpadající se eliptická kvartika, která má ten zvolený bod za dvojnásobný. Neboť jde-li bodem B, jde také bodem B' a složená kvartika je $k_3^B \,.\, \overline{A_1B}$. Existuje však ∞^1 bodů, kterými jako dvojnásobnými je určen svazek eliptických kvartik. Zvolme bod B na křivce Δ. Tímto bodem v S_4^3 je určena síť kvartik, které se dotýkají kubiky svazku S_3^1 jdoucí bodem B, tedy mají společnou tečnu v bodě B. V této síti však existuje svazek eliptických, obecně se nerozpadajících kvartik. Irreducibilnost snadno nahlédneme. Kvartika se může rozpadnout dvěma způsoby, buď na přímku a kubiku, nebo na dvě kuželosečky, které se případně zase rozpadnou.

Svazek eliptických kvartik S_4^1 určený bodem B obsahuje pouze jedinou kvartiku rozpadlou na přímku a jednoduchou kubiku. Je to kvartika skládající se z kubiky svazku S_3^1 jdoucí bodem B a z přímky jdoucí body A_1, B. Rozpadnutí na dvě kuželosečky je však nemožné. Neboť pak by existovala kuželosečka jdoucí body A_1, B a třeba ještě body A_2, A_3, A_5. Druhá kuželosečka by musila obsahovat A_1, B a A_5, A_6, ..., A_9, t. j. šest bodů base by leželo na kuželosečce, což při obecné volbě bodů $A_1, \ldots, A_8$ je vyloučeno. Tento svazek $S_4^1(A_1^2, A_2, \ldots, A_9, B^2)$ vytíná na křivce Δ lineární bodovou soustavu g_4^1, která má 12 dvojnásobných bodů Z_i. V těchto bodech Z_i se buď kvartika svazku křivky Δ dotýká, nebo tam má dvojnásobný bod. Dotyk však u eliptické křivky je vyloučen, neboť samodružné body na eliptické křivce nemohou splynouti. Tedy v bodech Z_i mají určité kvartiky svazku dvojnásobné body. Existuje proto v každém eliptickém svazku kvartik, který je určen obecným bodem B na Δ, 12 racionálních kvartik. Jedna tato racionální kvartika se rozpadne, totiž kvartika $\overline{A_1B}\,.\,k_3^B$, kde k_3^B značí kubiku svazku S_3^1, jdoucí bodem B.

Na křivce Δ leží také dvojnásobné body racionálních kubik svazku S_3^1. Neboť svazek S_3^1 vytne na Δ lineární bodovou soustavu g_4^1, která má také 12 dvojnásobných bodů, ve kterých ze stejného důvodu jako dříve leží dvojnásobné body nějaké racionální kubiky svazku S_3^1. Označme tyto body Y_i. Volíme-li bod $B \equiv Y_i$, pak svazek kvartik $S_4^1(A_1^2, A_2, \ldots, A_9, B^2)$ se rozpadne na kubiku $k_3^{y_i}$ a svazek přímek o středu A_1. Svazek přímek vytne na Δ lineární bodovou soustavu g_2^1, která má 8 dvojnásobných bodů, které splývají s body $A_2, \ldots, A_9$. Kubika $k_3^{y_i}$ protne křivku Δ ještě ve dvou bodech D_i, D_i'. Když bod $B \equiv D_i$, je tím určen svazek eliptických kvartik. V tomto svazku existuje složená kvartika $\overline{A_1D_i}\,.\,k_3^{y_i}$. Průsečík přímky $\overline{A_1D_i}$ s kubikou $k_3^{y_i}$ je další dvojnásobný bod kvartiky; leží tedy také na Δ. Z toho plyne, že z uvedeného počtu 12 bodů musíme vynechat v tomto případě dva body. V tomto případě existuje ve svazku $S_4^1(A_1^2, A_2, \ldots, A_9, D_i^2)$ 10 racionálních, nerozpadajících se kvartik.

Shrneme-li naše výsledky, můžeme říci:

V komplexu kvartik S_4^3, jehož base splývá s basí svazku kubických křivek, při čemž jeden bod base je pro komplex kvartik dvojnásobný, neexistuje ireducibilní eliptická kvartika s dalším libovolným dvojnásobným bodem B. Zvolíme-li bod B na křivce pátého stupně Δ, je jím jako dvojnásobným určen svazek eliptických kvartik, obecně se nerozpadajících, a v tomto svazku existuje 11 racionálních ireducibilních kvartik, které mají svůj třetí dvojnásobný bod také na křivce Δ. Na křivce Δ existuje 12 bodů Y_i, v nichž leží dvojnásobné body racionálních kubik svazku S_3^1 a jimiž určený svazek eliptických kvartik se skládá z křivek se rozpadajících. Vedle toho, existuje na Δ ještě 24 bodů D_i, D_i', kterými je určen svazek eliptických kvartik obecně se nerozpadajících, ale v těchto svazcích existuje pouze 10 ireducibilních racionálních kvartik.

Uvažujme nyní o degeneraci naší involuce.

Dva hlavní body prvního stupně a jeden čtvrtého stupně leží v jedné přímce. Řekněme, že to jsou body A_1, A_2, A_3. Potom zbývajících šest bodů $A_4, \ldots, A_9$ leží na kuželosečce k_2. Na obecné kubice svazku S_3^1 vytne komplex S_4^3 zase lineární bodovou soustavu g_2^1. Na kuželosečce k_2 vytíná také lineární bodovou soustavu g_2^1, neboť v komplexu S_4^3 existuje svazek kvartik, které mají kuželosečku k_2 za součást. Přímka $\overline{A_1A_2A_3} \equiv p$ neprotíná komplex S_4^3 obecně v žádném dalším bodě. Abychom našli, co odpovídá bodu na přímce p, volme na ní obecný bod P. Tímto bodem určená síť kvartik se rozpadne na přímku p a síť kubik $S_3^2(A_1, A_4, \ldots, A_9)$, která kuželosečku k_2 protíná jen v bodech $A_4, A_5, \ldots, A_9$. Na přímce p vytíná síť kubik S_3^2 lineární bodovou soustavu g_2^1, neboť v S_3^2 existuje jediná složená kubika, obsahující přímku p, a je to $k_2 \,.\, p$. Vezmeme-li jak na k_2, tak na p dvojice involuce g_2^1 za další dvojice naší involuce, dostaneme tak, že každému bodu v rovině, různému od hlavních bodů, odpovídá zase jeden bod. Přímka p je přímkou samodružnou a rovněž kuželosečka k_2 je samodružná. Body A_2, A_3 přestávají býti body hlavní, neboť jim odpovídá jediný bod. Snadno se nahlédne, když spočítáme společné průsečíky, že přímka p je součástí hlavní křivky odpovídající bodu A_1, křivky samodružných bodů Δ a homaloidu. Necháme-li tedy tuto přímku jako součást homaloidu stranou, odpovídá pak přímce již jen křivka čtvrtého stupně. Dostaneme tak involuci čtvrtého stupně o charakteristice 1^3, 6^1. Leží-li tedy dva hlavní body prvního stupně s hlavním bodem čtvrtého stupně v přímce, pak naše involuce degeneruje v involuci stupně o jednotku nižšího.

Nechť nyní leží v přímce p tři hlavní body prvního stupně, třeba A_2, A_3, A_4. Pak $A_1, A_5, \ldots, A_9$ leží na kuželosečce k_2. Na obecné kubice vytne S_4^3 lineární bodovou soustavu g_2^1 jako dříve. Na složené kubice $p \,.\, k_2$ vytne S_4^3 také g_2^1, ale tak, že body z g_1^1 na přímce p odpovídají bodům g_1^1 na kuželosečce k_2. Při této zvláštní poloze degenerace naší involuce nenastane.

Necháme-li další dvojici hlavních bodů A_4,A_5 s A_1 ležet v přímce p_1, dostaneme Jonquièresovu involuci třetího stupně. Při další dvojici stejné polohy dostaneme kvadratickou inversi se středem v A_1 a konečně při další stejné poloze zbývající dvojice bodů, dostaneme centrickou involuci.