Zygmunt Zahorski

Sur les courbes dont la tangente admet sur chaque arc toutes les directions

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 3, 233--235

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109429

SUR LES COURBES DONT LA TANGENTE ADMET SUR CHAQUE ARC TOUTES LES DIRECTIONS.*)

ZYGMUNT ZAHORSKI, Łódź.

Je donne la solution du problème de M. J. KRZYŻ concernant les courbes dont la tangente admet sur chaque arc toutes les directions. Je me sers de deux définitions suivantes: 1° L'axe tangent est la limite de l'axe joignant le point fixe au point variable, le sens étant déterminé par le signe de la différence des valeurs du paramètre. 2° La droite tangente est la limite de la droite sécante, lorsque la différence des valeurs du paramètre tend vers 0. L'existence de la droite tangente constitue une condition plus faible que celle qui exige que le contingent (au sens de M. G. BOULIGAND) de l'arc partiel soit situé sur la droite. Le terme „tangente" tout court signifie l'une ou l'autre de ces deux notions, tandis que le terme „direction" de la tangente dans le cas où il s'agit de „l'axe tangent", doit être remplacé par le terme „sens". Je démontre deux théorèmes.

Théorème I. *Si la courbe* (au sens de PEANO-JORDAN) *possède la tangente partou sauf dans un ensemble de points au plus dénombrable, la tangente ne peut prendre sur chaque arc deux différentes directions fixées.*

Théorème II. *Il existe un arc simple rectifiable, dont l'axe tangent admet sur chacun de ses arcs partiels tous les sens.*

Comme il résulte des travaux de M. G. CHOQUET et des miens,[1]) *la courbe rectifiable possède une représentation paramétrique partout dérivable avec les dérivées bornées.* On obtient du théorème I, que l'arc du théorème II possède sur chacun de ses arcs partiels un ensemble de points de puissance du continu, dans lesquels l'axe tangent n'existe pas. Ainsi, *l'ensemble de valeurs du paramètre, pour lesquelles les premières dérivées de toutes les coordonnées s'annulent simultanément, est dense,* ce qui est d'accord avec le résultat de M. Cz. RYLL-NARDZEWSKI. On peut généraliser les théorèmes I et II aux *courbes dans les espaces aux dimensions quelconques finies.* Je démontre le théorème II en me servant de la transformation continue de l'ensemble de CANTOR en segment et de la courbe de PEANO qui remplit le carré. Nous pouvons construire par des moyens analogues un *arc simple dont l'axe sécant admet sur chacun de ses arcs partiels tous les sens* (réponse à une question posée par M. K. BORSUK). J'ai signalé en 1946[2]) sans le démontrer, l'exemple qui

*) Le texte complet de cette communication doit paraître dans „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky".

[1] G. CHOQUET: *Application des propriétés descriptives de la fonction contigent à la théorie des fonctions de varible réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes,* J. Math. Puv. Appl., **26** (1947—1948), 115—226.

Z. ZAHORSKI: О жоргановых кривых облагающих в кажой точке касательной, Mat. Sbornik, **22** (1948), 3—26.

[2]) Z. ZAHORSKI: *Problèmes de la Théorie des ensembles et des fonctions,* C. R. Acad. Sc. Paris, **223** (1946), 451, III c.

est, en un certain sens, contraire. Il s'agit de *l'arc simple possédant partout un axe tangent dont l'indicatrice sphérique (différente du point), même après la fermeture, est un ensemble 0-dimensionel.* La démonstration a été envoyée en 1947 au „Journal of the Chinese Mathematical Society"; je ne sais pas si elle est parvenue à la rédaction de ce journal.

M. Krzyż a démontré, en employant certains résultats de MM. A. Denjoy et A. Bielecki, le théorème suivant: *la courbe en R_3 qui posséde partout une tangente et telle que sur chacun de ses arcs il existe une tangente parallèle à la corde qui joint les extrémités de l'arc et dont l'indicatrice est de dimension moindre que 2, est plane.* On peut donner facilement l'exemple d'une *courbe en R_3, qui possède partout une tangente continue et dont l'indicatrice (pour chaque arc partiel) a la dimension 2.*

*

Streszczenie. — Résumé.

O krzywych, których styczna przyjmuje na każdym łuku wszystkie kierunki.*)

ZYGMUNT ZAHORSKI, Łódź.

Rozwiązuję zagadnienie P. J. Krzyża dotyczące istnienia krzywych o własnościach wymienionych w tytule. Przyjmuję dwie definicje: 1) osi stycznej, która jest granicą osi łączącej punkt stały z sąsiednim punktem zmiennym (zwrot osi określony jest przez znak różnicy wartości parametru), 2) prostej stycznej, która jest granicą prostej siecznej przy różnicy wartości parametru dążącej do 0. Istnienie prostej stycznej jest warunkiem słabszym niż warunek, aby kontyngent (w sensie P. Bouligand'a) łuku częściowego leżał na prostej. Termin „styczna" oznacza tu jedno lub drugie z tych pojęć, zaś termin „kierunek", gdy mowa o osi stycznej, powinien być zastąpiony przez termin „zwrot". Udowadniam dwa twierdzenia.

Twierdzenie I. *Jeśli krzywa* (w sensie Peano-Jordana) *ma styczną wszędzie za wyjątkiem najwyżej przeliczalnego zbioru punktów, styczna nie może przyjmować na każdym łuku 2 różnych kierunków stałych.*

Twierdzenie II. *Istnieje łuk zwykły prostowalny, którego oś styczna przyjmuje wszystkie zwroty na każdym jego łuku częściowym.*

Jak wynika z prac P. Choquet'a i moich, *krzywa prostowalna posiada przedstawienie parametryczne wszędzie różniczkowalne z pochodnymi ograniczonymi.* Z twierdzenia I wynika, że łuk o którym mowa w twierdzeniu II ma na każdym łuku zbiór mocy kontinuum takich punktów, w których oś styczna nie istnieje. *Wobec tego zbiór wartości parametru dla których znikają jednocześnie pierwsze pochodne wszystkich współrzędnych jest gęsty*, co zgadza się z wynikiem P. Cz. Ryll-Nardzewskiego.

*) Pełny tekst tej pracy ma się ukazać w „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky".

Twierdzenia I i II można uogólnić na przestrzenie o dowolnym wymiarze skończonym $\geqq 2$. Dowodzę tw. II posługując się odwzorowaniem ciągłym zbioru CANTORA na odcinek i krzywą PEANY pokrywającą kwadrat. Przy pomocy analogicznych środków można skonstruować *łuk zwykły, którego oś sieczna przyjmuje wszystkie zwroty na każdym jego łuku częściowym.* (Odpowiedź na pewne pytanie P. K. BORSUKA). Przykład w pewnym sensie przeciwny, mianowicie *łuku zwykłego, mającego wszędzie oś styczną, której indykatrysa sferyczna (różna od punktu) nawet po domknięciu, jest zbiorem 0-wymiarowym,* podałem bez dowodu w r. 1946 w C. R. Acad. Paris. Dowód został wysłany w r. 1947 do „Journal of the Chinese Mathematical Society" i nie wiadomo nawet czy doszedł do redakcji tego czasopisma.

P. KRZYŻ dowiódł, korzystając z pewnych wyników PP. A. DENJOY i A. BIELECKIEGO następującego twierdzenia: *krzywa w R_3, mająca indykatrysę o wymiarze < 2, taka, że styczna istnieje wszędzie, a na każdym jej łuku częściowym styczna przyjmuje kierunek cięciwy łączącej końce tego łuku, jest płaska.* Można łatwo podać przykład *krzywej w R_3, mającej wszędzie styczną ciągłą i której indykatrysa dla każdego łuku częściowego ma wymiar 2.*