František Josef Studnička

O nových poučkách Fermatovských

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 4, 257--261

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109412

O nových poučkách Fermatovských.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Fermatovskou poučkou nazývám číselnou relaci tvaru

$$F(n) = \pm 1, \pmod n$$

kdež značí n číslo řady přirozené, a znaménko $+$ nebo $-$ řídí se jakostí funkce $F(n)$.

Takovou jest na př. samozřejmá relace

$$(n-1)^a \equiv (-1)^a, \pmod n$$

představuje-li a číslo téže řady; nebo speciální *poučka Fermatova* *)

$$a^{n-1} \equiv 1, \pmod n$$

jest-li n číslo *kmenné*, a pak číslo celistvé, *nesoudělné* s tímto n; anebo souvislá s ní tak zvaná poučka *Wilsonova* **)

$$(n-1)! \equiv -1, \pmod n$$

kdež n jest taktéž číslo kmenné.

Nové poučky tohoto druhu poskytují koëfficienty jak řady tangentní, tak sekantní, jakož plyne z následujících úvah:

Jestli v případě prvém

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{1}$$

a v případě druhém podobně

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} E_{2k} \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{2}$$

*) Viz: *Studnička* „Základové nauky o číslech“, Praha, 1875, pag. 92. a pak „O determinantech mocninných a sestavných“, Praha, 1897, pag. 58.

**) Ibid. pag. 96.

obdržíme z identičnosti patrné

$$\operatorname{tg} x = \sin x \,.\, \sec x,$$

dosadíme-li sem známé řady, porovnáním koëfficientů stejně vysokých mocnin veličiny x napřed *rekurrentní* vzorec

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= (2n+1)_1 E_{2n} - (2n+1)_3 E_{2n-2} \\ &+ (2n+1)_5 E_{2n-4} - \ldots \pm 1, \end{aligned} \tag{3}$$

a z něho pak obratem známým vzorec *independentní*

$$E_{2n} = 3^{\frac{1}{2|n}} \begin{vmatrix} A_3+1, & -3_2, & 0, & \ldots, & 0 \\ A_5-1, & 5_2, & -5_4, & \ldots, & 0 \\ A_7+1, & -7_2, & 7_4, & \ldots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ A_{2n+1}\pm 1, & \mp(2n+1)_2, & \pm(2n+1)_4, & \ldots, & (2n+1)_3 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

kdež užito Krampova označení fakultního

$$3^{n|2} = 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2n+1).$$

A ze vzorce tohoto, vyjadřujícího čísla E pomocí čísel A, poznáváme přímo, jelikož obojí jsou číslo *celistvá*, že tu platí

$$A_p \equiv (i)^{p-1}, \quad (\mathrm{mod}\ p) \tag{5}$$

značí-li p číslo *kmenné* a i jednotku *imaginární*, což možná i rozvésti v relace k dělitelnosti se táhnoucí

$$Z\left(\frac{A_p-1}{p}\right) = 0\,*),$$

jestli p tvaru $4k+1$, a

$$Z\left(\frac{A_p+1}{p}\right) = 0,$$

jestli p tvaru $4k+3$.

Podobně zjednáme si z identičnosti odvozené

$$\frac{d \sec x}{dx} = \sin x \,.\, \frac{d \operatorname{tg} x}{dx}$$

---

*) Ibid. pag. 60.

napřed vzorec *rekurrentní*

$$\begin{aligned} E_{2n} = (2n-1)_1 A_{2n-1} - (2n-1)_3 A_{2n-3} \\ + (2n-1)_5 A_{2n-5} - \ldots \pm 1, \end{aligned} \tag{6}$$

a z něho pak obratem známým vzorec *independentní*

$$A_{2n-1} = \frac{1}{3^{2n-1} \mid 2} \begin{vmatrix} E_4 + 1, & -3_2, & 0, & \ldots, & 0 \\ E_6 - 1, & 5_2, & -5_4, & \ldots, & 0 \\ E_8 + 1, & -7_2, & 7_4, & \ldots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ E_{2n} \pm 1, & \mp (2n-1)_2, & \pm (2n-1)_4, & \ldots, & (2n-1)_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

A o těchto číslech E platí Fermatovská relace

$$E_{p+1} \equiv i^{p-1}, \pmod p \tag{8}$$

značí-li p opět číslo kmenné, jakož z determinantu posledního přímo jde na jevo.

Ze vzorce (5) a (8) vyplývá konečně

$$A_p \,.\, E_{p+1} \equiv 1, \pmod p. \tag{9}$$

Jakož známo*), platí o těchto číslech E a A zvaných relace *rekurrentní*

$$\begin{aligned} A_{2n-1} = (2n-1)_2 A_{2n-3} - (2n-1)_4 A_{2n-5} \\ + (2n-1)_6 A_{2n-7} - \ldots \pm 1, \end{aligned} \tag{10}$$

$$E_n = (2n)_2 E_{2n-2} - (2n)_4 E_{2n-4} + (2n)_6 E_{2n-6} - \ldots \pm 1, \tag{11}$$

z nichž možná induktivně stanoviti zvláštní obdoby Fermatovské relace naší a to

$$A_{2n-1} \equiv (-1)^{n-1}, \pmod 3 \tag{12}$$

$$E_{2n} \equiv (-1)^{n-1}, \pmod 3 \tag{13}$$

---

*) Viz: *Studnička* „Ueber ein Analogon der Euler'schen Zahlen", Sitzb. d. kön. böhm. Ges. d. Wiss. 1900, IX.

kdež platí tedy, spojíme-li oba vzorce,

$$A_{2n-1} \,.\, E_{2n} \equiv 1, \quad (\mathrm{mod}\, 3) \qquad (14)$$

což představuje obdobu vzorce (9), jako předcházející relace (12) a (13) jsou obdobou vzorců (5) a (8).

Znajíce pravidla, podle nichž se spojují číselné kongruence snadno sestavíme z těchto vzorců nové, jako na př.

$$A_{2n-1} + A_{2k+1} \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\, 3), \qquad (15)$$

$$A_{2k-1} \,.\, A_{2k+1} \equiv -1, \quad (\mathrm{mod}\, 3) \qquad (16)$$

což představuje opět nové obdoby relace Fermatovské, k nimž druží se známé

$$E_{2k-2} + E_{2k} \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\, 3) \qquad (17)$$

$$E_{2k-2} \,.\, E_{2k} \equiv -1, \quad (\mathrm{mod}\, 3) \qquad (18)$$

a p. d.

Konečně budiž tu ještě poznamenáno, že koëfficienty E nazval *Scherk**) čísly *Eulerovskými,* aby tím připomenul velkých zásluh, jichž získal si slavný *Euler* i o tento zvláštní obor mathematický vůbec a o funkce goniometrické zvlášť. Prvních 14 hodnot koëfficientů A sestavil jsem v pojednání dříve zde citovaném, kdež i poměr obou druhů těchto čísel vytčen, k němuž ještě možná připojiti relaci *rekurrentní,* podobnou relaci (6),

$$E_{2n} = A_{2n+1} - (2n)_2 A_{2n-1} + (2n)_4 A_{2n-3} - \ldots \pm 1, \qquad (19)$$

a z ní odvozenou *independentní,* relaci (7) podobnou

$$A_{2n+1} = \begin{vmatrix} E_2 + 1, & -1, & 0, & \ldots, & 0 \\ E_4 - 1, & 4_2, & -1, & \ldots, & 0 \\ E_6 + 1, & -6_2, & 6_4, & \ldots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ E_{2n} \pm 1, & \mp (2n)_2, & \pm (2n)_4, & \ldots, & (2n)_2 \end{vmatrix}, \qquad (20)$$

*) Ve spise „Mathem. Abhandlungen“, Berlín, 1825, kdež i prvních 14 hodnot uvádí, při čemž opravuje Eulerem chybně stanovené E_{18}.

plynoucí z identičnosti

$$\sec x = \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} \cos x.$$

A že by tu ještě další podobné relace bylo možná sestaviti, netřeba znalému věci ani zvláště vykládati.

Poznámka. Že vlastnosti těchto čísel možná dobře užiti při vypočítávání jejich velikosti, leží na dlani, jelikož jak vzorec (5) tak (8) zvláštní dělitelnost stanoví, kteráž dovoluje stopovati správnost příslušných výsledků.

Podlé toho jest na př. podlé vzorce (5)

$$Z\left(\frac{A_{19}+1}{19}\right) \equiv Z\left(\frac{290888851128833}{19}\right) = 0,$$

a zcela podobně podle vzorce (8)

$$Z\left(\frac{E_{20}+1}{19}\right) \equiv Z\left(\frac{370371188237526}{19}\right) = 0,$$

užijeme-li místo výrazů kongruenčních symbolů zbytkových.

Věstník literární.

Annuaire pour l'an 1900, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Prix 1 fr. 50 c. Paris, Gauthier-Villars.

Každoroční publikace francouzského úřadu pro vyměřování zeměpisné délky, založeného již r. 1795 a proslaveného mnohými pracemi, přináší letošního roku v čele *kalendářní části* časové prohlášení:

Století XIX. končí dne 31. prosince r. 1900.
Století XX. počíná 1. lednem r. 1901.

Vzhledem k poslednímu ročníku zavedena byla změna tím způsobem, že jsou tentokráte všechna data v tabulkách vyjádřena ve středním čase pařížském počítaném nepřetržitě od 0 h do