O složitém úrokování a počtu důchodovém.

Pro žáky středních škol píše

prof. F. Hoza.

1. Základní výrazy.

Uložíme-li kapitál C_0 na p procent, vynese 100 jednotek peněžných v každé jednotce časové p jednotek peněžných za úroky. Jednotka kapitálu dá v jednotce času $\frac{p}{100}$ úroků a celý kapitál C_0 tedy $C_0 \frac{p}{100}$. Přidáme-li tyto úroky ku kapitálu C_0, pravíme, že úroky kapitalisujeme. Tím vzroste kapitál na

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Označíme-li

$$q = 1 + \frac{p}{100},$$

bude

$$C_1 = C_0 \cdot q.$$

Číslo q slove úročitelem. Za jednotku času klademe čas, po jehož uplynutí se úroky kapitalisují. Tento čas nazveme dobou kapitalisace úroků aneb krátce dobou. C_0 jest kapitál původní, C_1 za jednu dobu odvozený.

Kapitál za jednu dobu odvozený se ustanoví, násobíme-li původní kapitál úročitelem. Opětujeme-li týž výkon po každé uplynulé době, pravíme, že počítáme úroky z úroků čili úroky složité. Jelikož se po každé době kapitál násobí úročitelem, vzroste za t dob na

$$C_t = C_0 \cdot q^t. \qquad (1)$$

Kapitál za t dob odvozený se ustanoví, násobíme-li kapitál původní úročitelem na t zmocněným.

Číslo t budeme nazývati časem zúročení, abychom jej rozeznali od doby kapitalisační, kterou za jednotku časovou pokládáme.

Ze vzorce (1) plynou

$$C_0 = \frac{C_t}{q^t}, \qquad (2)$$

$$q = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}}, \tag{3}$$

a

$$t = \frac{\log C_t - \log C_0}{\log q}. \tag{4}$$

V těchto vzorcích značí t číslo celistvé, množství to dob kapitalisačních.

Je-li však kapitál C_0 uložen po čas $t+\tau$, kdež τ značí zlomek menší než jednotka, tu dlužno kapilál C_t zúročiti ještě po čas τ, avšak úroky jednoduchými. Pročež bude

$$C_{t+\tau} = C_t + C_t \frac{p\,\tau}{100}$$

a tedy

$$C_{t+\tau} = C_0\, q^t \left(1 + \frac{p\,\tau}{100}\right). \tag{5}$$

Chceme-li ustanoviti čas $t+\tau$, určíme část celistvou t ze vzorce (4) a část lomenou τ pomocí (5), dosadíme-li místo t hodnotu dříve vypočtenou.

Pro $t=0$ obdržíme

$$C_\tau = C_0 \left(1 + \frac{p\,\tau}{100}\right). \tag{6}$$

2. Kapitál učiniti n-násobným.

Aby kapitál odvozený byl n-násobným původního, musí

$$C_t = n\,C_0 = C_0\, q^t,$$

z čehož plyne

$$t = \frac{\log n}{\log q}. \tag{7}$$

Z času takto určeného podržíme pouze část celistvou co přibližnou hodnotu. K přesnému ustanovení času poslouží vzorec (5), v němž

$$C_{t+\tau} = n\,C_0 = C_0\, q^t \left(1 + \frac{p\,\tau}{100}\right)$$

a tudíž

$$\tau = \frac{100}{p}\left(\frac{n}{q^t} - 1\right). \tag{8}$$

Čas žádaný jest nápotom $t+\tau$.

3. O převodu kapitálu.

a) Je-li kapitál C splatný na počátku času t, lze jej převésti na konec tohoto času. Jelikož v čase t vzroste na Cq^t, bude jedno, zaplatíme-li C ihned aneb Cq^t po čase t. Součin Cq^t představuje tedy kapital C převedený na konec času t.

b) Je-li však kapitál C splatný na konci času t, má nyní hodnotu $\frac{C}{q^t}$, kterouž nazýváme převedenou hodnotou kapitálu C na počátek času t.

c) Kapitál C splatný na počátku času $t+\tau$, kdež $\tau<1$, převeden na konec tohoto času má hodnotu

$$Cq^t\left(1+\frac{p\tau}{100}\right).$$

d) Je-li konečně kapitál C splatný na konci času $t+\tau$ a převedeme-li jej na počátek, bude míti hodnotu

$$\frac{C}{q^t\left(1+\frac{p\tau}{100}\right)}.$$

4. O srážce úrokové.

Úroková srážka čili diskont (interusurium) slove ona hodnota peněžitá, kterou na kapitálu C splatném po čase t slevíme, když se hotově ihned vyplatí.

Úroková srážka d není nic jiného, než rozdíl mezi kapitálem C a hodnotou jeho převedenou na počátek času t, t. j.

$$d=C-Cq^{-t}=C\frac{q^t-1}{q^t}. \tag{9}$$

Kdybychom byli celý kapitál C ihned složili, nesl by v každé z následujících dob úrok $C\frac{p}{100}$.

Tyto úroky převedeme na počátek času t, čímž obdržíme

$$C\frac{q-1}{q},\quad C\frac{q-1}{q^2},\ldots C\frac{q-1}{q^t}.$$

Součet všech bude

$$J=C\frac{q-1}{q^t}(1+q+q^2+\ldots+q^{t-1})$$

a tedy

$$J = C\frac{q^t - 1}{q^t} = d.$$

Součet všech z dlužného kapitálu vzešlých úroků převedených na počátek času zúročení roveň srážce úrokové. Je-li kapitál C splatný po čase $t + \tau$, obdržíme srážku úrokovou

$$d = C\frac{q^t\left(1 + \frac{p\,\tau}{100}\right) - 1}{q^t\left(1 + \frac{p\,\tau}{100}\right)}. \tag{10}$$

5. Redukce splátek částečných.

Částečnými splátkami rozumíme hodnoty peněžné, jež máme v určitých lhůtách buď skládati aneb obdržeti.

Částečné splátky C_1, C_2, C_3, ... C_n
jsou splatny po t_1, t_2, t_3, ... t_n uplynulých dobách od společného počátku počítaných.

Místo splátek částečných má se složiti najednou kapitál C po t dobách od téhož počátku počítaných. Převedeme-li veškeré hodnoty peněžné na počátek, musí

$$\frac{C}{q^t} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{C_k}{q^{t_k}},$$

čili

$$C = \sum_{k=1}^{k=n} C_k\, q^{t-t_k}. \tag{11}$$

Skládá-li se kapitál C ihned, jest $t = 0$ a tudíž

$$C = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{C_k}{q^{t_k}}. \tag{12}$$

Jsou-li splátky stejné a po stejném občasí τ vždy na jeho počátku placené, dosadíme do (11) hodnoty

$$C_k = C_1 \quad \text{a} \quad t_k = (k-1)\,\tau,$$

načež obdržíme

$$C = C_1\, q^{t-(n-1)\tau}\left[1 + q^\tau + q^{2\tau} + \ldots + q^{(n-1)\tau}\right]$$

a

$$C = C_1\,\frac{q^{n\tau} - 1}{q^\tau - 1}\, q^{t-(n-1)\tau}. \tag{13}$$

Kdyby $t=0$, obdrželi bychom

$$C=C_1\frac{q^{n\tau}-1}{(q^\tau-1)\,q^{(n-1)\tau}}\,. \tag{14}$$

Avšak pro $t=n\tau$ bude

$$C=C_1\frac{q^{(n+1)\tau}-q^\tau}{q^\tau-1}\,. \tag{15}$$

Učiňme ve vzorci (11) splátky stejné; avšak na konci stejného občasí τ vždy splatné, t. j. ať

$$C_k=C_1 \quad \text{a} \quad t_k=k\,.\,\tau\,.$$

Nápotom přejde onen vzorec v následující

$$C=C_1\,q^t\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{q^{k\tau}}=C_1\,q^{t-n\tau}\,[1+q^\tau+q^{2\tau}+\ldots+q^{(n-1)\tau}]\,,$$

z něhož plyne

$$C=C_1\frac{q^{n\tau}-1}{q^\tau-1}\,q^{t-n\tau}\,. \tag{16}$$

Kdyby $t=0$, obdrželi bychom

$$C=C_1\,.\frac{q^{n\tau}-1}{(q^\tau-1)\,q^{n\tau}}\,. \tag{17}$$

Nechať konečně $t=n\tau$, tu vznikne

$$C=C_1\frac{q^{n\tau}-1}{q^\tau-1}\,. \tag{18}$$

Ve vzorcích právě odvozených předpokládáme, že t a τ obsahují pouze celistvá množství dob. Co do praktické ceny vynikají jmenovitě výrazy (15) a (18), z nichž prvý slouží k redukci částečných splátek z počátku občasí τ na konec n občasí, druhý pak k témuž účeli v případě, když splátky se dějí na konci občasí τ.

Jsou-li však splátky C_k splatny po časích $t_k+\tau_k$, kdež $\tau_k<1$, užijeme k ustanovení summy redukované C splatné po čase $t+\tau$ principu vysloveného v odstavci 3. *d)*, načež obdržíme

$$\frac{C}{q^t\left(1+\frac{p\,\tau}{100}\right)}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{C_k}{q^{t_k}\left(1+\frac{p\,\tau_k}{100}\right)}\,. \tag{19}$$

Lépe však učiníme, převedeme-li veškeré hodnoty peněžné na konec času T většího než $t+\tau$ i $t_k+\tau_k$.

Čas, přes který C_k převedeme, bude

$$(T - t_k - 1) + (1 - \tau_k),$$

pročež

$$C q^{T-t-1}\left(1 + \frac{p(1-\tau)}{100}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} C_k q^{T-t_k-1}\left(1 + \frac{p(1-\tau_k)}{100}\right)$$

a tudíž

$$C \frac{1 + \frac{p(1-\tau)}{100}}{q^t} = \sum_{k=1}^{k=1} C_k \frac{1 + \frac{p(1-\tau_k)}{100}}{q^{t_k}}. \qquad (20)$$

Vzorec tento jest s (19) rovnomocný. Ze zvláštních případů vytkneme dva.

a) Stejné splátky C_1 činěny na počátku každé n-tiny doby. Jakou budou míti hodnotu C ua konci této doby? Jelikož

$$C_k = C_1, \quad t = 1, \quad \tau = 0, \quad t_k = 0$$

a

$$\tau_k = \frac{k-1}{n},$$

přejde rovnice (20) v následující

$$C = C_1 \sum_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{p\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{100}\right),$$

jež vede k výsledku

$$C = C_1\left(n + \frac{p}{200}(n+1)\right). \qquad 21)$$

b) Stejné splátky C_1 činěny na konci každé n-tiny doby. Hodnota jejich na konci doby budiž C. Tento případ se liší od předešlého jedině tím, že $\tau_k = \frac{k}{n}$ a tím obdrží rovnice (20) tvar

$$C = C_1 \sum_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{p\left(1 - \frac{k}{n}\right)}{100}\right),$$

jenž vede k výsledku

$$C = C_1\left(n + \frac{p}{200}(n-1)\right). \qquad (22)$$

6. Úroky zúročeny jinými procenty.

Zúročíme-li kapitál C_0 stále p procenty, avšak úroky z něj vzešlé p_1 procenty, vzroste za čas t na C_t, jenž se bude skládati z původního C_0 a ze součtu úroků v jednotlivých dobách vzešlých a na konec času t převedených. Označíme-li J_k úrok vzešlý za k-tou dobu, bude hodnota jeho na konec času t převedená $J_k q_1^{t-k}$, kdež

$$q_1 = 1 + \frac{p_1}{100}.$$

Nápotom obdržíme

$$C_t = C_0 + \sum_{k=1}^{k=t} C_0 \frac{p}{100} \cdot q_1^{t-k}$$

$$= C_0 \left(1 + \frac{p}{100} (q_1^{t-1} + q_1^{t-2} + \ldots + q_1^{t-t})\right)$$

$$= C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \frac{q_1^t - 1}{q_1 - 1}\right)$$

aneb

$$C_t = C_0 \left(1 + \frac{p}{p_1} (q_1^t - 1)\right). \tag{23}$$

Učiníme-li $p = p_1$, obdržíme

$$C_t = C_0 q^t.$$

7. Ukládání kapitálu po dobách.

Uložíme-li na počátku část peněžitou A_0, po uplynutí prvé doby A_1, druhé A_2, až po uplynutí t dob A_t, bude C, hodnota součtu všech vložek na konci času t, rovna součtu všech vložek na tento konec převedených, t. j.

$$C = \sum_{k=0}^{k=t} A_k q^{t-k} = A_0 q^t + \sum_{k=1}^{k=t} A_k q^{t-k}. \tag{24}$$

V praxi se vyskytují následující zvláštní případy.

a) Počáteční vklad jest A_0 a ostatní vklady jsou vesměs rovny A. Nápotom pomocí vzorce (18) pro $\tau = 1$ obdržíme

$$C = A_0 q^t + A \frac{q^t - 1}{q - 1}. \tag{25}$$

b) Počáteční vklad $A_0 = 0$, t. j. veškeré stejné vklady činěny na konci dob. Tím vznikne vzorec

$$C = A\frac{q^t-1}{q-1}.\ ^{*)} \tag{26}$$

c) Je-li však $A_0 = A$, t. j. máme-li kromě toho vklad počáteční rovný ostatním, bude

$$C = A\left(q^t + \frac{q^t-1}{q-1}\right)$$

a tudíž

$$C = A\frac{q^{t+1}-1}{q-1}. \tag{27}$$

d) Vložíme-li na počátku prvé doby A_0 a každé následující doby A, bude dle vzorce (24)

$$C = A_0\, q^t + A\,(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q)$$

čili

$$C = A_0\, q^t + A\frac{q^t-q}{q-1}. \tag{28}$$

e) Je-li však $A_0 = 0$, bude

$$C = A\frac{q^t-q}{q-1}. \tag{29}$$

f) Kdyby konečně $A_0 = A$, t. j. veškeré stejné vklady činěny na počátku dob, obdrželi bychom

$$C = A\frac{q^{t+1}-q}{q-1}. \tag{30}$$

Poslední výraz plyne též bezprostředně ze vzorce (15). Zvlášť důležité pro svůj užitek v praktickém počítání jsou vzorce (26) a (30), jelikož obyčejně stejné vklady buď vesměs na konci aneb vesměs na počátku dob přicházejí. Stává se též, že místo na počátku aneb na konci doby ukládáme stejné části na počátku aneb na konci každé n-tiny doby.

Nápotom lze s prospěchem užiti vzorců (21) a (22). Ukládáme-li na počátku každé n-tiny doby část a, budeme na konci celé doby míti

$$A = a\left(n + \frac{p}{200}(n+1)\right).$$

Ukládáme-li však tutéž část a na konci každé n-tiny doby, vznikne

*) Jiné odůvodnění tohoto vzorce viz v roč. IV. tohoto časopisu na str. 283. v článku prof. dr. G. Blažka „Poznámka k složitému počtu úrokovému.“

$$A = a\left(n + \frac{p}{200}(n-1)\right).$$

Konečný kapitál po čase t bude pak

$$C = A\frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

8. Ukládání ve lhůtách libovolných.

Činíme-li vklady $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$ po uplynutí $t_1, t_2, t_3, \ldots t_m$ dob, budou po čase t míti úhrnnou hodnotu C, kterou dle vzorce (11) ustanovíme

$$C = \sum_{k=1}^{k=m} A_k q^{t-t_k}. \tag{31}$$

Stanou-li se tytéž vklady po časích

$$t_1 + \tau_1, \; t_2 + \tau_2, \; t_3 + \tau_3, \ldots . \; t_m + \tau_m,$$

bude úhrnná hodnota jejich C po čase $t + \tau$ stanovena dle vzorce (20)

$$C = \sum_{k=1}^{k=m} A_k \frac{1 + \frac{p(1-\tau_k)}{100}}{1 + \frac{p(1-\tau)}{100}} q^{t-t_k}$$

aneb

$$C = \frac{q^t}{1 + \frac{p(1-\tau)}{100}} \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1 + \frac{p(1-\tau_k)}{100}}{q^{t_k}}. \tag{32}$$

Je-li $\tau = 0$, t. j. tážeme-li se po hodnotě C všech vkladů po čase t, bude

$$\frac{C}{q^{t-1}} = \sum_{k=1}^{k=m} A_k \frac{1 + \frac{p(1-\tau_k)}{100}}{q^{t_k}}. \tag{33}$$

Kdyby $A_k = A$ a $\tau_k = \tau$, obdrželi bychom

$$C = A\left(1 + \frac{p(1-\tau)}{100}\right) \sum_{k=1}^{k=m} q^{t-t_k-1}. \tag{34}$$

Učiníme-li $t_k = k\frac{t}{m}$, t. j. ukládáme-li vždy na konci stejného občasí $\frac{t}{m}$, bude

$$\sum_{k=1}^{k=m} q^{t-t_k-1} = \sum_{k=1}^{k=m} q^{t-\frac{kt}{m}-1} = \frac{q^t-1}{q\left(q^{\frac{t}{m}}-1\right)}$$

a tudíž

$$C = A\left(1+\frac{p(1-\tau)}{100}\right)\frac{q^t-1}{q\left(q^{\frac{t}{m}}-1\right)}. \tag{35}$$

Kdyby konečně $\tau = 0$, přešel by tento vzorec ve vzorec (15).

9. Vybírání kapitálu po dobách.

Z uloženého kapitálu vyberme na začátku R_0, po prvé době R_1, po druhé R_2, atd. až po t dobách R_t. Úhrnná hodnota C' všech vybraných částí převedených na konec času t bude

$$C' = \sum_{k=0}^{k=t} R_k q^{t-k} = R_0 q^t + \sum_{k=1}^{k=t} R_k q^{t-k}. \tag{36}$$

Vzorec (24) stanoví kapitál uložený C. Zbytek K z tohoto kapitálu bude tedy

$$K = C - C'.$$

V praxi přicházejí hlavně případy následující:

a) Uložený kapitál záleží z jediného vkladu $A_0 = C_0$ a vybírá se po stejných částech R vždy na konci každé doby. Uložený kapitál převedený na konec času t činí

$$C = C_0 q^t$$

a vybraný

$$C' = R\frac{q^t-1}{q-1}$$

dle vzorce (26), pročež

$$K = C_0 q^t - R\frac{q^t-1}{q-1}. \tag{37}$$

b) Vybíráme-li části R vždy na počátku každé doby, budeme se říditi co do hodnoty částí vybraných dle vzorce (30), načež obdržíme

$$K = C_0 q^t - R\frac{q^{t+1}-q}{q-1}. \tag{38}$$

c) Děje-li se vybírání po částech r vždy na počátku každé n-tiny doby, ustanovíme hodnotu vybraných částí na konci každé doby dle vzorce (21)

$$R = r\left(n + \frac{p}{200}(n+1)\right).$$

Děje-li se však toto vybírání koncem každé n-tiny doby, bude dle (22)

$$R = r\left(n + \frac{p}{200}(n-1)\right).$$

V obou těchto zvláštních případech platí co do zbytku K vzorec (37).

10. Vybírání ve lhůtách libovolných.

Vybereme-li na konec času t_1' část R_1, po čase t_2' část R_2, atd. až konečně po čase t_n' část R_n, ustanovíme hodnotu C' částí vybraných po čase t dle vzorce (31)

$$C' = \sum_{k=1}^{k=n} R_k q^{t-t_k}. \tag{39}$$

Zbytek $K = C - C'$ ustanovíme za pomocí vzorce (31) jak následuje

$$K = \sum_{k=1}^{k=m} A_k q^{t-t_k} - \sum_{k=1}^{k=n} R_k q^{t-t'_k}. \tag{40}$$

Stanou-li se však vklady

$$A_1,\ A_2,\ \ldots.\ A_m$$

po uplynutí časův

$$t_1 + \tau_1,\ t_2 + \tau_2,\ \ldots.\ t_m + \tau_m$$

a vybíráme-li části

$$R_1,\ R_2,\ \ldots.\ R_n$$

po časích

$$t_1' + \tau_1',\ t_2' + \tau_2',\ \ldots.\ t_n' + \tau_n'$$

počítaných vesměs od téhož počátku, ustanovíme hodnoty C a C' částí uložených i vybraných po čase $t + \tau$ na základě vzorce (32) a zbytek

$$K = C - C'$$

bude nápotom stanoven vzorcem

$$K = \sum_{k=1}^{k=m} A_k \frac{1 + \frac{p}{100}(1-\tau_k)}{1 + \frac{p}{100}(1-\tau)} q^{t-t_k} - \sum_{k=1}^{k=n} R_k \frac{1 + \frac{p}{100}(1-\tau_k')}{1 + \frac{p}{100}(1-\tau)} q^{t-t'_k}$$

aneb

$$K = \frac{q^t}{1+\frac{p}{100}(1-\tau)}\left\{\sum_{k=1}^{k=m} A_k \frac{1+\frac{p}{100}(1-\tau_k)}{q^{t_k}}\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{k=n} R_k \frac{1+\frac{p}{100}(1-\tau'_k)}{q^{t'_k}}\right\}. \qquad (41)$$

Je-li $\tau = 0$, bude

$$\frac{K}{q^{t-1}} = \sum_{k=1}^{k=m} A_k \frac{1+\frac{p}{100}(1-\tau_k)}{q^{t_k}} - \sum_{k=1}^{k=n} R_k \frac{1+\frac{p}{100}(1-\tau'_k)}{q^{t'_k}}. \quad (42)$$

Jsou-li veškeré vklady rovny A a veškeré části vybrané rovny R, jakož i $\tau_k = \tau$ a $\tau_k' = \tau'$, obdržíme

$$\frac{K}{q^{t-1}} = A\left(1+\frac{p}{100}(1-\tau)\right)\sum_{k=1}^{k=m}\frac{1}{q^{t_k}} - R\left(1+\frac{p}{100}(1-\tau')\right)\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{q^{t'_k}}.$$

Jelikož

$$\frac{1}{q^{t_k}} = \frac{1}{q^{t_m}}\left(q^{t_m-t_k}\right),$$

bude

$$\frac{K}{q^{t-1}} = A\,\frac{1+\frac{p}{100}(1-\tau)}{q^{t_m}}\sum_{k=1}^{k=m} q^{t_m-t_k}$$

$$- R\,\frac{1+\frac{p}{100}(1-\tau')}{q^{t'_n}}\sum_{k=1}^{k=n} q^{t'_n-t'_k}. \qquad (43)$$

Děje-li se ukládání i vybírání každé v určitém občasí, t. j. je-li

$$t_k = t_1 + (k-1)\,s$$

a

$$t'_k = t_1' + (k-1)\,s',$$

kdež s a s' značí občasí, musí

$$\sum_{k=1}^{k=m} q^{t_m-t_k} = \sum_{k=1}^{k=m} q^{t_m-t_1-(k-1)s}$$

$$= q^{t_m-t_1+s}\cdot\sum_{k=1}^{k=m}\frac{1}{q^{ks}}$$

$$= q^{t_m - t_1 - (m-1)s} \sum_{k=0}^{k=(m-1)} q^{ks}$$

$$= q^{t_m - t_1 - (m-1)s} \frac{q^{ms} - 1}{q^s - 1}$$

a tudíž

$$\frac{K}{q^{t-1}} = A \cdot \frac{q^{ms} - 1}{q^s - 1} \cdot \frac{1 + \frac{p}{100}(1-\tau)}{q^{t_1 + (m-1)s}}$$

$$- R \cdot \frac{q^{ns'} - 1}{q^{s'} - 1} \cdot \frac{1 + \frac{p}{100}(1-\tau')}{q^{t'_1 + (n-1)s'}} \,. \quad (44)$$

Abychom užitek tohoto výrazu poznali, proveďme následující příklad:

Ku konci května každého roku uložíme část A, načež 1. listopadu každého pátého roku vybereme část R. Počítáme-li p procent při pololetní kapitalisaci úroků, jak velký bude zbytek K z uloženého kapitálu na konci patnáctého roku?

V tomto příkladě jest pololetí časovou jednotkou čili dobou kapitalisační. Máme tedy

$$t = 30, \quad t_1 = 0, \quad t_1' = 9, \quad s = 2, \quad m = 15,$$

$$\tau = \frac{5}{6}, \quad \tau' = \frac{4}{6}, \quad s' = 10, \quad n = 3,$$

a dosazením do vzorce (44) obdržíme

$$\frac{K}{q^{29}} = A \frac{q^{30} - 1}{q^2 - 1} \cdot \frac{1 + \frac{p}{600}}{q^{28}} - R \frac{q^{30} - 1}{q^{10} - 1} \cdot \frac{1 + \frac{2p}{600}}{q^{29}}$$

a zkrácením

$$K = A \frac{q^{31} - q}{q^2 - 1} \left(1 + \frac{p}{600}\right) - R \frac{q^{30} - 1}{q^{10} + 1} \left(1 + \frac{p}{300}\right).$$

Z tohoto vzorce lze kteroukoliv z veličin A, R, p, K ustanoviti, jsou-li ostatní dány. Kdyby na př.

$$p = 3, \quad R = 1000 \text{ a } K = 0,$$

obdrželi bychom

$$q = 1{\cdot}03, \quad q^2 = 1{\cdot}0609, \quad q^{10} = 1{\cdot}3439163,$$

$$q^{30} = 2{\cdot}4272624 \text{ a } q^{31} = 2{\cdot}5000803.\ ^{*})$$

*) Koëfficienty q^t nalezáme v tabulkách dle argumentů p a t srovnaných v každé téměř příslušné knize učebné. Viz na př. *Haberl* Politische Arithmetik, p. 348 neb *Spitz*, Lehrbuch d. allg. Arithm. 1. Theil p. 494.

Dosazením těchto hodnot číselných do posledního vzorce obdržíme

$$A = 172{\cdot}77\,,$$

to jest uložíme-li pokaždé 31. května 172 zl. a 77 kr., můžeme po 15 let vybírati vždy 1. listopadu každého pátého roku část 1000 zl.

Podobně, kdybychom měli 1. listopadu každého pátého roku složiti 1000 zl. během 15 let za sebou jdoucích, mohli bychom místo toho složiti 1. května každého roku část 172 zl. a 77 kr.

11. Počítání renty dočasné.

Rentou čili důchodem nazýváme hodnotu peněžitou, kterou v určitém občasí čili periodicky po jistý čas vybíráme, až kapitál z počátku uložený úplně vyčerpáme. Kapitál uložený C_0 slove vklad aneb francouzským slovem „mise“. Trvání renty R budiž t. Měrou času nechať doba kapitalisace úroků. Renta R se obyčejně vyplácí buď na počátku aneb na konci každé doby. Takové renty, jichž trvání obmezeno, slovou dočasnými. Máme též renty doživotné, jejichž výpočet se zakládá na počtu pravděpodobnosti. Zde se tedy jedná pouze o rentě dočasné.

Hodnotou renty před časem t rozumíme kapitál, jenž byv na počátku času t uložen a po částích R vybírán bude za čas t právě vyčerpán. Hodnotou renty po čase t rozumíme součet všech částí R převedených na konec času t. Prvou hodnotu můžeme též nazvati nynější aneb hotovou, druhou pak konečnou hodnotou renty. Prvou označme C_0 a druhou C. Konečná hodnota C musí se rovnati hotové hodnotě C_0 převedené na konec času t,

$$C = C_0\, q^t.$$

a) Vyplácí-li se renta R vždy na počátku každé doby, bude dle vzorce (30)

$$C = R\frac{q^{t+1} - q}{q - 1}$$

a tudíž

$$C_0\, q^t = R\frac{q^{t+1} - q}{q - 1}\,. \tag{45}$$

Tato rovnice slove rentovou, jelikož slouží k řešení všech úloh renty se týkajících. Plynouť z ní rovnice následující

$$C_0 = R \frac{q^t - 1}{q^t - q^{t-1}}, \tag{46}$$

$$R = C_0 \frac{q^t - q^{t-1}}{q^t - 1}, \tag{47}$$

$$t = \frac{log\, q - log\left(1 - \frac{p\,a}{100}\right)}{log\, q}, \tag{48}$$

$$q^t - b\, q^{t-1} + b - 1 = 0, \tag{49}$$

značí-li

$$q = 1 + \frac{p}{100}, \quad a = \frac{C_0 - R}{R}, \quad b = \frac{a+1}{a}.$$

Na základě těchto rovnic lze kteroukoliv z veličin C_0, R, p, t ustanoviti, jsou-li ostatní dány.

Ovšem dlužno, aby t bylo celistvé, jinak by zůstal zbytek kapitálu, o němž promluvíme později.

Co se dotýče řešení rovnice (49), jež slouží k výpočtu q a tudíž i p, poukazujeme k methodě vyložené v článku prof. dra Fr. J. Studničky „Příspěvek k arithmetice národohospodářské“ obsaženém v III. roč. tohoto časopisu na str. 102, 103 a 104.

b) Vyplácí-li se renta R vždy na konci každé doby kapitalisační, užijeme výrazu (27) a obdržíme rovnici rentovou

$$C_0\, q^t = R \frac{q^t - 1}{q - 1}. \tag{50}$$

Veličiny C_0, R, t, q ustanovíme dle vzorců z této rovnice odvozených

$$C_0 = R \frac{q^t - 1}{q^{t+1} - q^t}, \tag{51}$$

$$R = C_0 \frac{q^{t+1} - q^t}{q^t - 1}, \tag{52}$$

$$t = \frac{log\, a - log\left(a - \frac{p}{100}\right)}{log\, q}, \tag{53}$$

$$q^{t+1} - (a+1)\, q^t + a = 0, \tag{54}$$

značí-li

$$a = \frac{R}{C_0},$$

Rovnice tyto nalezají se též v článku výše podotknutém jmenovitě k němu poukazujeme vzhledem k řešení rovnice (54).

Chceme-li rentu R vybírati v stejných n lhůtách a sice vždy na počátku každé n-tiny doby část r, musí dle výrazu (21)

$$R = r\left(n + \frac{p}{200}(n+1)\right)$$

aneb

$$R = \frac{r}{2}\left[(n-1) + q(n+1)\right], \tag{55}$$

kdež R značí součet hodnot částečných r převedených na konec doby, tudíž dlužno v ostatním se říditi dle vzorců (51) až (54).

Vyplácí-li se části r vždy na konci každé n-tiny doby, bude na základě vzorce (22)

$$R = r\left(n + \frac{p}{200}(n-1)\right)$$

aneb

$$R = \frac{r}{2}\left[(n+1) + q(n-1)\right], \tag{56}$$

v kterémžto výraze má R týž význam co prvé a tudíž platí vzhledem k ostatním veličinám vzorce (51) až (54).

(Dokončení.)

Geometrie kruhu.

Pro žáky středních škol sestavil

Dr. **Karel Zahradník.**

(Dokončení části prvé.)

XVIII. Svazek kruhů.

30. Shledali jsme, že kruh třemi body úplně jest určen a že čtvrtý bod již určité podmínce vyhověti musí, má-li ležeti na kruhu, tedy že čtyřmi body kruh obecně neprochází. Dány-li jsou pouze dva body, opět kruh úplně určen není, neb dvěma body prochází kruhů celá řada a souhrn všech kruhů, jež dvěma body procházejí, nazýváme *svazek kruhů.*

Rovnice takého svazku najdeme takto:

Budiž $K_1 = 0$ zkrátka psaná rovnice kruhu