Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

Příspěvek k počtu pravděpodobnosti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 5, 221--226

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109407

Příspěvek k počtu pravděpodobnosti.

Podává

Augustin Pánek.

Dvě osoby A a B se snaží, by jistou událost uskutečnili. Je-li počet případů příznivých, že tato událost nastane a, a nepříznivých, že táž událost nenastane b, je-li tedy počet všech jedině a rovně možných $a+b=s$, jest mathematická pravděpodobnost, že událost nastane $\frac{a}{s}$, a že nenastane $\frac{b}{s}$.

Osoba A začíná činiti pokusy neb pozorování a osoba B ji následuje; jest tudíž očekávání osoby A, že výjev nastane v případech lichých, a osoby B, že v týchž případech nenastane. Jaká jest pravděpodobnost obou osob, že ona událost v p pokusech se uskuteční?

Pravděpodobnost, že onen výjev v 1. pokusu nastane jest $\frac{a}{s}$, že ale nastane teprv v pokusu 2., jest pravděpodobnost složitá a rovná se $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{s}$, podobně, že v 3. pokusu nastane, když v předchozích nenastal, rovná se $\frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^2$, at.d., že tedy konečně v p-tém pokusu nastane, když v $(p-1)$-ních pokusech se neuskutečnil, bude $\frac{a}{b}\left(\frac{b}{s}\right)^{p-1}$.

Nazveme-li P a P' pravděpodobnost očekávaného výjevu osoby A a B, jest pak

$$P=\frac{a}{s}+\frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^2+\frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^4+\ldots+\frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{p-2}.$$

$$P'=\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{s}+\frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^3+\frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^5+\ldots+\frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{p-1}.$$

a dle vzorce součtového řady geometrické

$$P=\frac{a}{s}\cdot\frac{1-\left[\left(\frac{b}{s}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}}}{1-\left(\frac{b}{s}\right)^2}=\frac{a\,s}{s^2-b^2}\cdot\left[1-\left(\frac{b}{s}\right)^p\right], \quad (1)$$

$$P' = \frac{ab}{s^2} \cdot \frac{1 - \left[\left(\frac{b}{s}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}}}{1 - \left(\frac{b}{s}\right)^2} = \frac{ab}{s^2 - b^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^p\right]. \quad (2)$$

Nazveme-li pravděpodobnost, že onen výjev v p pokusech nastane J, a že nenastane J', jest

$$J = P + P' = \frac{a}{s-b}\left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^p\right], \quad (3)$$

$$J' = \left(\frac{b}{s}\right)^p. \quad (4)$$

Pro $p = \infty$ obdržíme ze vzorce (3) a (4),

$$J = \frac{a}{s-b} = 1, \quad J' = 0,$$

to jest pravděpodobnost, že onen výjev nastane, blíží se jednotce (symbolu jistoty) při vzrůstajícím počtu pokusů, kdežto pravděpodobnost protivná konverguje k nulle.

Ze vzorce (1) a (2) plyne

$$sP' = bP$$

aneb

$$\frac{P}{P'} = \frac{s}{b}, \quad (5)$$

to jest pravděpodobnosti očekávaného výjevu osob A a B mají se k sobě jako jednotka k pravděpodobnosti, že týž výjev nenastane.

Zároveň pak poznáváme, že počet pokusů jest v tomto případě bez vlivu.

Případ tento platí vůbec tehdáž, je-li počet pokusů sudý aneb ∞.

Je-li p číslo liché, pak může osoba A o jeden pokus více provésti, a pravděpodobnost (1) obdrží tvar

$$P = \frac{as}{s^2 - b^2}\left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^{p+2}\right], \quad (6)$$

kdežto pravděpodobnost pro osobu B se nezmění jsouc vyjádřena vzorcem (2); poměr obou jest pak

$$\frac{P}{P'} = \frac{s}{b} \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{s}\right)^{p+2}}{1 - \left(\frac{b}{s}\right)^p},$$

to jest pravděpodobnost očekávaného výjevu osoby A jest tím větší, čím menší jest počet pokusů.

Kolik pokusů neb pozorování musí býti provedeno, aby byla pravděpodobnost rovna $\frac{m}{n}$ a aby nastal výjev, jehož absolutní pravděpodobnost jest $\frac{a}{s}$?

Tu máme dle vzorce (3)

$$1-\left(\frac{b}{s}\right)^p=\frac{m}{n}. \tag{7}$$

Příklady.

1. Je-li pravděpodobnost, že je jakýsi rok suchý $\frac{1}{4}$, ve které době nastane nejméně jednou jeden rok suchý.

Zde jest

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{2}, \quad \frac{b}{s}=\frac{3}{4},$$

tedy dle (7)

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^p=\frac{1}{2},$$

z čehož

$$p=\frac{\log 2}{\log 4-\log 3}=\frac{30103}{12492}=2{\cdot}4098\ldots,$$

tedy jeden rok suchý nastane během dvou neb tří let.

2. Pravděpodobnost, že vrhneme kostkou určité číslo, jest $\frac{1}{6}$ a že nevrhneme $\frac{5}{6}$; kolik vrhů p musíme vykonati, by byla pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že se totiž toto určité číslo nejméně jednou objeví, a kolik, má-li pravděpodobnost býti $\frac{3}{4}$.

V prvním případě jest

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^p=\frac{1}{2}$$

a tedy

$$p=\frac{\log 2}{\log 6-\log 5}=3{\cdot}8018\ldots,$$

což znamená, že jest výhodno vsaditi na určité číslo na čtyři vrhy. Totéž platí pro paš, vrhá-li se dvěma kostkama.

V druhém případě jest

$$p = \frac{log\, 4}{log\, 6 - log\, 5} = 7 \cdot 6 \ldots,$$

tedy při osmi vrzích jest dotčená pravděpodobnost větší než $\frac{3}{4}$.

3. Vrhneme-li dvěma kostkama a má-li se na př. objeviti dvojnásobná 6, jest

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^p = \frac{1}{2},$$

tedy

$$p = 24 \cdot 614 \ldots,$$

což znamená, že jest výhodněji vsaditi na 25 než na 24 vrhů pro jedno objevení se dvojnásobné 6.*)

Osoba A vykoná po sobě pokusů α, potom osoba B pokusů β, což opakují v témž pořádku obě osoby r-krát.

Nazveme-li pravděpodobnost, že osobě A v α pokusech splní se očekávání P'_1, tedy dle (3)

$$P'_1 = 1 - \left(\frac{b}{s}\right)^\alpha,$$

a pravděpodobnost osoby B, že v týchž α pokusech kýžený výjev nenastane, nýbrž v následujících β pokusech, P_1'', bude

$$P_1'' = \frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^\alpha + \frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{\alpha+1} + \frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{\alpha+2} + \ldots + \frac{a}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^\beta\right] \cdot \left(\frac{b}{s}\right)^\alpha.$$

Podobně obdržíme pro druhou řadu pokusů obou osob

$$P_2' = \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^\alpha\right]\left(\frac{b}{s}\right)^{\alpha+\beta},$$

*) Srovnej „*Cournot*, Exposition de la théorie des chances et des probabilités, pag. 48. Paris, 1843."

Zachariae „De mindste Quadraters-Methode pag. 39. Nyborg, 1871."

Tato úloha jest jedna z prvních, kterou řešil *Pascal* a *Fermat*.

$$P'' = \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^{\beta}\right]\left(\frac{b}{s}\right)^{2\alpha+\beta}$$

Podlé toho dostaneme pro třetí řadu pokusů

$$P_3' = \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^{\alpha}\right]\left(\frac{b}{s}\right)^{2(\alpha+\beta)}$$

$$P_3'' = \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^{\beta}\right]\left(\frac{b}{s}\right)^{3\alpha+2\beta}$$

atd., tedy pravděpodobnost pro r-tou řadu pokusův

$$P_r' = \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^{\alpha}\right]\left(\frac{b}{s}\right)^{(r-1)(\alpha+\beta)}$$

$$P_r'' = \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^{\beta}\right]\left(\frac{b}{s}\right)^{r\alpha+(r-1)\beta}$$

Spojíme-li tyto pravděpodobnosti, obdržíme pravděpodobnost pro osobu A,

$$L = \sum_{r=1}^{r} P_r' = s^{\beta} \cdot \frac{s^{\alpha} - b^{\alpha}}{s^{\alpha+\beta} - b^{\alpha+\beta}}\left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^{r(\alpha+\beta)}\right] \quad (8)$$

a pro osobu B

$$L' = \sum_{r=1}^{r} P_r' = b^{\alpha} \cdot \frac{s^{\alpha} - b^{\beta}}{s^{\alpha+\beta} - b^{\alpha+\beta}}\left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^{r(\alpha+\beta)}\right]. \quad (9)$$

Budiž počet pokusů $p = \infty$, tedy jsou pravděpodobnosti osoby A a B,

$$L = s^{\beta} \cdot \frac{s^{\alpha} - b^{\alpha}}{s^{\alpha+\beta} - b^{\alpha+\beta}},$$

$$L' = b^{\alpha} \cdot \frac{s^{\beta} - b^{\beta}}{s^{\alpha+\beta} - b^{\alpha+\beta}},$$

a tudíž

$$\frac{L}{L'} = \frac{s^{\beta}}{b^{\alpha}} \cdot \frac{s^{\alpha} - b^{\alpha}}{s^{\beta} - b^{\beta}}, \quad (10)$$

z čehož poznáváme, že celkový počet pokusů nemá opět žádného vlivu na tento poměr, pouze počet pokusů v nepřetržité řadě vykonaných.

Vykoná-li A po sobě pokusů α, kolik pokusů musí B rovněž po sobě vykonati, by měl tutéž naději jako A?

Zde jest $L = L'$, tedy

$$s^{\beta}\,(s^{\alpha} - b^{\alpha}) = b^{\alpha}\,(s^{\beta} - b^{\beta}),$$

z čehož se snadno vypočítá

$$\beta = \frac{log\left[2 - \left(\frac{s}{b}\right)^{\alpha}\right]}{log\,\frac{b}{s}}. \tag{11}$$

Přisoudí-li se na př. osobě A, aby vrhla kostkou určité číslo v třech vrzích, jest $\alpha = 3$, $\frac{b}{s} = \frac{5}{6}$, a tedy dle (11)

$$\beta = 7{\cdot}14,$$

musí se tedy osobě B přiřknouti 7·14 vrhů, má-li býti hra shodná.

Je-li řadový počet pokusů stejný $\alpha = \beta$, pak plyne z (10)

$$\frac{L}{L'} = \frac{s^{\alpha}}{b^{\alpha}}$$

a opět pro $\alpha = 3$,

$$\frac{L}{L'} = \frac{216}{125},$$

t. j. osadí-li osoba A sumu 216, osadí osoba B 125, a hra jakož i sázka jest shodna.

Theorie duhy vedlejší.

Pro střední školy sepsal

prof. **Vilém Baudys.**

V ročníku IV. t. pag. 285 podal jsem theorii duhy hlavní pomocí nižší mathematiky; podobným spůsobem dá se vyložiti povstávání duhy vedlejší, při čemž se omezím na určení odchylky pro paprsky účinné.

Kdyby byl $ABCD$ průřez kapky vodní (obr. 1.) rovinou jdoucí paprskem slunečním a okem pozorovatele a XA jeden paprsek sluneční dopadající v úhlu α na kapku, zlomí se část jeho do B v úhlu β, zde opět část se odráží v úhlu stejném do C, odtud do D a zde vychází částečně ve směru Dy opět