# Úlohy.

## I. Z mathematiky.

### Řešení úlohy 62.

(Zaslal *Augustin Pánek.*)

Považujeme-li krychlový obsah původního diamantu za jedničku a nazveme-li obsahy kusů $x$ a $y$, bude

$$x + y = 1. \tag{1}$$

Cena těchto kusů jest $ax^2$, $ay^2$, a tedy cena diamantu zlomeného

$$a(x^2 + y^2). \tag{2}$$

Pravděpodobnost, že obsah kusu $x$ nalezá se v mezích $x$ a $x + \Delta x$, jest $\Delta x$, pročež bude *naděje mathematická* klenotníka

$$a(x^2 + y^2) . \Delta x$$

aneb, odstraníme-li $y$ pomocí vzorce (1),

$$a(2x^2 - 2x + 1) . \Delta x. \tag{3}$$

Naděje tato může se považovati v mezích 0 a 1, neboť 0 jest symbol nemožnosti a 1 symbol jistoty, proto bude pravá cena diamantu zlomeného

$$a \sum_0^1 (2x^2 - 2x + 1) \Delta x.$$

Položíme-li

$$z = 2x^2 - 2x + 1,$$

značí rovnice tato parabolu v rovině $XZ$, jejíž vrchol *) má souřadnice ($^1/_2$, $^1/_2$), a tedy kvadraturu její od 0 do 1 rovná se $\frac{2}{3}$, protož

$$a \sum_0^1 (2x^2 - 2x + 1) . \Delta x = \frac{2}{3} a,$$

z čehož patrno, že diamant na dva kusy zlomený ztrácí $\frac{1}{3}$ své ceny.

---

*) Viz „Elementární spůsob vyšetřování křivek v rovině. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Roč. IV.

Rozlomí-li se diamant na 3 kusy, vypočte se podobným spůsobem, že ztrácí $\frac{11}{12}$ své ceny. *)

## Úloha 65.

Dána jest rovnice

$$\sin\frac{x}{a} = \cos\frac{y}{b};$$

má se vyzpytovati její geometrický význam a křivka, kterou rovnice tato určuje, zobraziti.**)

### Řešení

(podal *Jan Pastorček*, posluchač c. k. české techniky).

Sinus lze vyjádřit cosinusem, takže

$$\sin\frac{x}{a} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{a}\right).$$

Poněvadž se funkce goniometrické nemění, zvětší-li se úhel o $2n\pi$, může se psáti všeobecně

$$\sin\frac{x}{a} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{a} + 2n\pi\right),$$

čímž se předložená rovnice promění v

$$\cos\frac{y}{b} = \cos\left(\frac{1+4n}{2}\pi - \frac{x}{a}\right).$$

Stejným cosinusům odpovídají stejné úhly, mimo to cosinus úhlu záporného rovná se cosinusu úhlu kladného, bude tedy

$$\pm\frac{y}{b} = \frac{1+4n}{2}\pi - \frac{x}{a}.$$

Když se nyní $\frac{x}{a}$ převede na levou stranu a celá rovnice vyrazem $\frac{1+4n}{2}\pi$ se dělí, bude nejjednodušší algebraický tvar její

$$\frac{x}{\frac{1+4n}{2}\pi a} \pm \frac{y}{\frac{1+4n}{2}\pi b} = 1$$

---

*) Srovnej „Laurent„ Traité du calcul des Probabilités." Paris, 1873. pag. 135.

**) Za nejlepší řešení úlohy této posluchačům I. ročníku české polytechniky předložené udělil prof. *G. Blažek*, t. č. rektor, cenu 1 dukátu.

Funkce takového tvaru patří přímce. Ku každé úsečce $x$ náleží zde dvě stejné pořadnice $\pm y$ t. j. rovnice představuje nám dvě od osy úseček $X$ symetricky odchýlené přímky. Poněvadž se v rovnici také $n$ může měniti v číslové řadě od $-\infty \ldots\ldots + \infty$, představuje nám funkce tato dvě neomezená pásma rovnoběžných přímek, kteréžto křižujíce se v podobě sítě rovinu vyplňují.

K zobrazení přímky dostačí zobraziti polohu dvou bodů na ní.

Volme si soustavu souřadných os; buď bod $O$ počátkem, $OX$ osou úseček, $OY$ osou pořadnic.*)

Rovnice $\alpha$) přejde v rovnici dvou určitých přímek, když se za $n$ vřadí stálá hodnota.

Volme $n = 0$, pak máme zobraziti přímky, jichžto rovnice jest

$$\frac{x}{\frac{a\pi}{2}} \pm \frac{y}{\frac{b\pi}{2}} = 1.$$

Bod $A$ bude určen souřadnicemi

$$y_1 = 0, \quad x_1 = \frac{a\pi}{2};$$

bod $B$ souřadnicemi

$$x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{b\pi}{2}$$

a bod $C$ souřadnicemi

$$x_3 = 0, \quad y_3 = -\frac{b\pi}{2}.$$

Délky $2\pi a$ a $2\pi b$ (jsou to rektifikované kružnice) rozdělme na 4 stejné díly. Čtvrtinu $\frac{\pi a}{2}$ přenesme na osu $X$ z bodu $O$ směrem positivním, čímž obdržíme bod $A$; délkou $\frac{\pi b}{2}$ protneme osu $Y$ z bodu $O$ na hoře a dole, čímž dostaneme body $B$ a $C$. Spojením těchto bodů zobrazíme přímky $AB$ a $AC$. Ostatní přímky jsou s těmito rovnoběžné, pročež budou určeny již jedním bodem. Body na ose $X$ nalezají se ve vzdálenosti od bodu $O$.

*) Příslušný výkres si každý snadno sám vyvede.

$$d = \frac{1+4n}{2}\pi a\,.$$

Bod $A_2$ nalézá se ve vzdálenosti

$$OA_2 = 5\frac{a\pi}{2}$$

a t. d.

### Řešení úlohy 64.

(Zaslal *J. V. Králíček*, bohoslovec v Č. Budějovicích.)

Geometrické místo těžiska trojúhelníků do kruhu poloměru $r$ vepsaný nad tětivou, ve vzdálenosti $e$ od středu vedenou, jest *kružnice* poloměru $^1/_3\, r$, jejíž střed ve vzdálenosti $^1/_3\, e$ od půlícího bodu tětivy se nalezá a tudíž ve vzdálenosti $^2/_3\, e$ od středu kruhu původního leží.

(Tutéž úlohu řešili správně: *J. Pytlík* ve Vodňanech, *A. Kostěnec* v Praze, *M. Rambousek* v Čáslavi, *F. Jiřička* VIII. a *R. Helmessen* VII. r. g. v Táboře, *J. Kliment* VII. g. v Rychnově, *V. Pokorný* VII. g., *J. Brdyčka*, VII. g., *J. Bukovský* V. realky v Hradci Králové, *J. Nečesaný*, VII. r. v Pardubicích, *R. Parma* VIII. g., *J. Jursa*, VII. g., *K. Minařík* z VIII. g. v Olomouci, *V. Drda*, VI., *F. Vuršer* a *H. Švarcer* VII. r. g. v Plzni, *J. Gregora* a *J. Čečka*, VIII. g. v Č. Budějovicích, *K. Mráček*, *L. Lukáš* VII r., *K. Teige* VI. g., *J. Prokop*, *R. Pradl a Burda* V. r. na Malé Straně, *F. Mařík*, *J. Prokš* a *V. Vosa* VI. r. na Novém Městě, *J. Steinhauser*, VII. g. v J. Hradci, a *A. Bublič*, *V. Hübner*, technikové v Praze.)

## II. Z fysiky.

### Úloha 58.

Jak velký musí býti průměr ballonu vodíkem ($s = 0{\cdot}075$) naplněného, aby se udržel ve výši, kde tlak vzduchu měří jen $570^{mm}$, váží-li obálka i s břemenem, k jehož objemu se nebéře žádného zřetele, 180 kilogramů?

### Úloha 59.

Na nějaký bod, který povrch trojosého ellipsoidu opustiti nesmí, působí směrem hlavních os síly $A$, $B$, $C$; v které poloze bude v rovnováze.