Emil Schoenbaum

Příspěvek k matematické theorii invalidního pojištění. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 4-5, 287--294

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109393

Příspěvek k matematické theorii invalidního pojištění.

Dr. Emil Schoenbaum. — (Dokončení.)

3. Předpokládali jsme dosud ve shodě s obvyklými způsoby řešení naší úlohy, že úmrtnost invalidů závisí pouze na stáří, což jevilo se tím, že pravděpodobnost $p^i(s, x)$, že s letý invalida dožije se stáří x let, byla vyjádřena zlomkem

$$p^i(s, x) = \frac{l^i(x)}{l^i(s)}.$$

Byla však od počátku theorie invalidního pojišťování z důvodů na snadě jsoucích vyslovována domněnka, že úmrtnost invalidů závisí mimo na stáří též na době, která od přiznání invalidity uplynula, tedy na trvání invalidity. Tato domněnka potvrzena a doložena jest četnými statistickými pracemi z novější doby, které dovolují učiniti si o oné závislosti číselný obraz.

Tak ku př. dle zkušeností německého říšského invalidního pojišťování dělníků [1]) umírá z 1000 60letých invalidů, kteří se právě stali invalidy, před dosažením 61. roku stáří 172, kdežto z 1000 60letých invalidů, kteří se stali invalidy před 5 roky, umírá během roku pouze 74.[2])

Zmíněné práce podávají přímo nebo dovolují odvoditi dvojitě odstupněnou tabulku pravděpodobností $p^i(x, \xi)$, že invalida, který byl prohlášen invalidou ve stáří ξ, t. j. během roku ξ až $\xi + 1$, dožije se ve stavu invalidity (po $x - \xi$ letech) stáří x roků [3]) Otázka, jak vyvoditi tabulku čísel $l^{aa}(x)$, známe-li veličiny $l(x)$, $i(x)$ a $p^i(x, \xi)$, vyžaduje nyní jiných úvah než v odst. 1.

Je sice opět možno postupně vypočísti hodnoty $l^{aa}(x_0)$, $l^{aa}(x_0 + 1)$, $l^{aa}(x_0 + 2)$, . . . , vycházíme-li od nejnižšího stáří

---

1) Das Ausscheiden der Invalidenrentenempfänger der Jahre 1891 bis 1899 aus dem Rentengenuss, 1906.

2) Jiné tabulky viz ve výtahu v mém cit. pojednání.

3) Zde mají tedy veličiny $p^i(x, \xi)$ poněkud jiný význam než v odst. 1. a zvláště neplatí rovnost

$$p^i(x, \xi) = \frac{l^i(x)}{l^i(\xi)}.$$

x_0, v němž není ještě invalidů, pomocí systému rovnic:

$$
\begin{aligned}
l(x_0) &= l^{aa}(x),\\
l(x_0+1) &= l^{aa}(x_0)\,.\,i(x_0)p^i(x_0+1,\,x_0) + l^{aa}(x_0+1),\\
l(x_0+2) &= l^{aa}(x_0)\,.\,i(x_0)p^i(x_0+2,\,x_0) + l^{aa}(x_0+1)\\
&\qquad p^i(x_0+2,\,x_0+1) + l^{aa}(x_0+2).\\
&\;\vdots\\
l(x) &= l^{aa}(x_0)\,i(x_0)\,p^i(x,\,x_0) + l^{aa}(x_0+1)\,.\,i(x_0+1)\,.\\
&\qquad p^i(x,\,x_0+1) + \ldots + l^{aa}(x),
\end{aligned}
$$

který dá se psáti obecně ve tvaru

$$
l(x) = l^{aa}(x) + \sum_{k=x_0}^{x-1} l^{aa}(k)\,K(x,\,k), \tag{10}
$$

kdež k vůli krátkosti položeno

$$
K(x,\,k) = i(k)\,p^i(x,\,k).
$$

Protože determinant z koeficientů je roven 1, jest

$$
l^{aa}(x) = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 \ldots\ldots & l(x_0)\\
K(x_0+1,\,x_0) & 1 & 0 \ldots\ldots & l(x_0+1)\\
K(x_0+2,\,x_0), & K(x_0+2,\,x_0+1) & 1 \ldots\ldots & l(x_0+2)\\
\vdots & \vdots & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
K(x,\,x_1), & K(x,\,x_0+1) & \ldots\ldots\ldots & l(x)
\end{vmatrix}
$$

což dává nezávislý výraz pro $l^{aa}(x)$. (11)

Další rozklad tohoto determinantu dle prvků posledního sloupce a sestavení rekurrentních vzorců pro příslušné subdeterminanty nemá pro nás zajímavosti a je mimo to provedeno úplně v knize Volterrově: Leçons sur les équations intégrales[1]), na kterou odkazuji.

Jak patrno, je řešení naší úlohy nyní povahy zcela jiné než v odst. 1.), což ještě lépe vysvitne z odstavce následujícího.

4. Přejdeme-li opětně k methodě spojité, máme určiti funkci $l^{aa}(x)$, dány-li zase funkce $\mu(x)$ $\nu(x)$ a $\mu^i(x,\,\xi)$, o nichž

[1]) Paříž 1913, str. 40 až 44.

předpokládáme, že jsou konečné a integrace schopné v intervallu $x_0 \leqq \xi \leqq x \leqq \omega$, kde x_0 je nejnižší a ω nejvyšší stáří tabulky. Při tom značí $\mu^i(x, \xi)$ intensitu úmrtnosti $x$letého invalidy, který se stal invalidou ve stáří ξ let[1], a tedy součin

$$l^i(x, \xi)\, \mu^i(x, \xi)\, dx,$$

kolik zemřelo x letých invalidů v intervallu $(x, x + dx)$, kteří se stali invalidy ve věku ξ let; tudíž jest

$$dl^i(x, \xi) = - l^i(x, \xi)\, \mu^i(x, \xi)\, dx,$$

a odtud

$$\frac{l^i(x, \xi)}{l^i(\xi, \xi)} = e^{-\int\limits_{\xi}^{x} \mu^i(s, \xi) ds} = p^i(x, \xi),$$

kde $p^i(x, \xi)$ je tedy pravděpodobnost, že invalida, který se stal invalidním ve věku ξ let, dožije se stáří x let.

Z odst. 2. víme již, že jest podobně

$$l(x) = l(\xi)\, e^{-\int\limits_{\xi}^{x} \mu(s) ds}$$

a můžeme považovati tudíž za dané též funkce

$$l(x),\ \nu(x) \text{ a } p^i(x, \xi).$$

Určení funkce $l^{aa}(x)$ *vyžaduje nyní řešení integrální rovnice Volterrovy druhého způsobu*, kterou můžeme přímo napsati:

$$l(x) = l^{aa}(x) + \int\limits_{x_0}^{x} l^{aa}(\xi)\, \nu(\xi)\, p^i(x, \xi)\, d\xi, \tag{12}$$

čili píšeme-li

$$K(x, \xi) = \nu(\xi)\, p^i(x, \xi),$$

$$l(x) = l^{aa}(x) + \int\limits_{x_0}^{x} l^{aa}(\xi)\, K(x, \xi)\, d\xi.$$

Z theorie *Volterrových* integrálních *rovnic*[2]) plyne, že rovnice (12) má určité a jediné řešení konečné a spojité, které jest

---

[1]) V odborné literatuře značí se $\mu^i(x, \xi)$ symbolem $(\mu^i[\xi] + x - \xi)$, který se pro psaní differenciálních rovnic nehodí.

[2]) Viz ku př. Volterra cit. kniha nebo *Goursat*: Cours d'analyse 2. vydání, sv. III., 2. seš. 1914.

dáno rovnicí:
$$l^{aa}(x) = l(x) + \int_{x_0}^{x} S(x, \xi)\, l(\xi)\, d\xi, \tag{13}$$
kdež řada iterovaných jader
$$S(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} K^{(i)}(x, \xi)$$
je stejnoměrně a absolutně konvergentní v intervallu $x_0 \leqq \xi \leqq x \leqq \omega$ a má za majorantní funkci řadu
$$M + M^2(x - \xi) + M^3\frac{(x-\xi)^2}{2!} + \ldots = Me^{M(x-\xi)}.$$
Při tom jsou iterovaná jádra dána rekurrentními vzorci:
$$\begin{aligned} K^{(1)}(x, \xi) &= -K(x, \xi), \\ K^{(2)}(x, \xi) &= \int_{\xi}^{x} K^{(1)}(x, z),\ K^{(1)}(z, \xi)\, dz, \\ K^{(3)}(x, \xi) &= \int_{\xi}^{x} K^{(1)}(x, z)\, K^{(2)}(z, \xi)\, dz, \\ &\ \ \vdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K^{i}(x, \xi) &= \int_{\xi}^{x} K^{(1)}(x, z)\, K^{(i-1)}(z, \xi)\, dz. \end{aligned} \tag{14}$$
V našem případě jest
$$K^{(1)}(x, \xi) = \nu(\xi)\, p^i(x, \xi),$$
$$K^{(2)}(x, \xi) = \int_{\xi}^{x} \nu(z)\, p^i(x, z)\, \nu(\xi)\, p^i(z, \xi)\, dz,$$
$$K^{(3)}(x, \xi) = -\int_{\xi}^{x} \nu(z)\, p^i(z, x)\, dz \int_{\xi}^{z} \nu(z_1)\, p^i(z, z_1)$$
$$\nu(\xi)\, p^i(z, \xi)\, dz, \text{ atd.}$$
Máme tedy pro hledanou funkci toto, na předchozích hodnotách $l^{aa}(x)$ nezávislé vyjádření pomocí rychle konvergující nekonečné řady.
$$l^{aa}(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) - \ldots, \tag{15}$$
kdež $\varphi(x) = l(x)$
$$\varphi_1(x) = -\int_{x_0}^{x} l(\xi)\, \nu(\xi)\, p^i(x, \xi)\, dz,$$
$$\varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x} l(\xi)\, \nu(\xi)\, d\xi \int_{\xi}^{x} \nu(z)\, p^i(x, z)\, p^i(z, \xi)\, dz \quad \text{atd.}$$

Smysl těchto postupných aprocimací je zcela jasný: V prvém přiblížení klademe $l^{aa}(x) = l(x)$, v druhém přiblížení odečítáme invalidy ve stáří x, kteří by tu byli, kdyby všichni $l(\xi)$ podlehali invaliditě, v třetím bereme ohled na to, že invalidové vznikající do stáří x byli vzati v počet dvakráte, atd.

Pro výpočet je důležita rychlá konvergence řady a okolnost, že funkce $p^i(x, \xi)$ dle empirických dat stává se závislou na jediné proměnné, jeli $x - \xi > m$, kde m je určité číslo (v cit. tabulce $m = 11$, v jiných $m = 5$).

Není bez zajímavosti, odvoditi z rovnice (13) specielní případ odst. 2.), v němž byla předpokládána pro $p^i(x, \xi)$ zvláštní forma závislosti funkční

$$p^i(x, \xi) = \frac{l^i(x)}{l^i(\xi)}.$$

Pro tento případ jest, jak se snadno přesvědčíme,

$$K^{(1)}(x, \xi) = -\frac{l^i(x) \cdot \nu(\xi)}{l^i(\xi)},$$

$$K^{(2)}(x, \xi) = \int_\xi^x \frac{\nu(z)\, l^i(x)}{l^i(z)} \cdot \frac{\nu(\xi)\, l^i(z)}{l^i(\xi)}\, dz = \frac{\nu(\xi) \cdot l^i(x)}{l^i(\xi)} \int_\xi^x \nu(z)\, dz,$$

$$K^{(3)}(x, \xi) = -\frac{\nu(\xi)\, l^i(x)}{l^i(\xi)} \int_\xi^x \nu(z_1)\, dz_1 \int_\xi^{z_1} \nu(z_2)\, dz_2$$

a obecně

$$K^{(n)}(x, \xi) = (-1)^n \frac{\nu(\xi)\, l^i(x)}{l^i(\xi)} \int_\xi^x \nu(z_1)\, dz_1 \int_\xi^{z_1} \nu(z_2)\, dz_2 \ldots \int_\xi^{z_{n-2}} \nu(z_{n-1})\, dz_{n-1}$$

O $(n-1)$-násobném integrálu v pravo dá se dokázati zajímavý vztah platný pro libovolnou funkci $f(x)$; je totiž

$$A_n(\xi, x) = \int_\xi^x f(z_1)\, dz_1 \int_\xi^{z_1} f(z_2)\, dz_2 \ldots \int_\xi^{z_{n-1}} f(z_n)\, dz_n = \frac{\left[\int_\xi^x f(z)\, dz\right]^n}{n!}. \tag{16}$$

Důkaz dá se lehce provésti úplnou indukcí. Pro $n = 1$ jest věta samozřejma, pro $n = 2$ jest

$$A_2(\xi, x) = \int_\xi^x f(z_1)\,dz_1 \int_\xi^{z_1} f(z_2)\,dz_2 = \int_\xi^x F'(z_1)\,.\,F(z_1)\,dz_1,$$

klademe-li

$$\int_\xi^{z_1} f(z_2)\,dz_2 = F(z_1) \quad \text{a tedy} \quad f(z_1) = F'(z_1)$$

a tudíž

$$A_2(\xi, x) = \frac{[F(x)]^2 - [F(\xi)]^2}{2} = \frac{[F(x)]^2}{2} = \frac{\left[\int_\xi^x f(z)\,dz\right]^2}{2}.$$

Dokážeme, že, platí-li vztah (15) pro $n - 1$, platí i pro n. Vskutku je

$$A_n(\xi, x) = \int_\xi^x f(z_1)\, A_{n-1}(\xi, z_1)\,dz_1 = \int_\xi^x f(z_1)\,dz_1 \frac{\left[\int_\xi^{z_1} f(z)\,dz\right]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

a položíme-li opět

$$\int_\xi^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1), \quad f(z_1) = F'(z_1),$$

bude

$$A_n(\xi, x) = \int_\xi^x \frac{F'(z_1)\,[F(z_1)]^{n-1}_{dz_1}}{(n-1)!} = \frac{[F(x)]^n}{n!} = \frac{\left[\int_\xi^x f(z)\,dz\right]^n}{n!}$$

jak bylo dokázati. [1]

---

[1]) Pan Dr. *Hostinský* sdělil mi jiný zajímavý důkaz vztahu (16), který s jeho svolením reprodukuji:

Jestliže ve výraze $A_n(\xi, x)$ permutujeme $z_1\, z_2 \ldots z_n$ na všechny možné způsoby, dostaneme $n!$ výrazů $P, P', P'' \ldots P^{(n!-1)}$, které mají

Použitím tohoto vztahu a dosazením hodnot za $K^{(i)}(x, \xi)$ vypočítaných nahoře obdržíme z rovnice (13) pro $l^{aa}(x)$ výraz

$$l^{aa}(x) = l(x) - l^i(x)\int_{x_0}^{x}\frac{l(\xi)\,v(\xi)}{l^i(\xi)}\left[1 - \int_{\xi}^{x} v(z)\,dz + \frac{\left[\int_{\xi}^{x} v(z)\,dz\right]^2}{2!} - \frac{\left[\int_{\xi}^{x} v(z)\,dz\right]^3}{3!} + \ldots + \right] \text{čili}$$

$$l^{aa}(x) = l(x) - l^i(x)\int_{x_0}^{x}\frac{l(\xi)\,v(\xi)}{l^i(\xi)}\,e^{-\int_{\xi}^{x} v(z)\,dz}\,d\xi,$$

který je totožný s výrazem (9) odvozeným přímým řešením linearní differentialní rovnice prvého řádu.

---

stejné hodnoty. Je tedy též

$$P = \frac{1}{n!}\left[P + P', + P'' + \ldots P^{n!-1}\right].$$

Jelikož ve všech integralech na pravo je integrovaná funkce $f(z_1)$, $f(z_2) \ldots f(z_n)$ symmetrická, jest, považujeme-li P za n-násobný integral

$$P = \frac{1}{n!}\underbrace{\int\int \ldots\ldots \int}_{\Sigma} f(z_1)\,f(z_2) \ldots f(z_n)\,dz_1 dz_2 \ldots dz_n,$$

kdež se integrace vztahuje k součtu všech oborů integračních

$\xi \leqq x_1 \leqq x_2 \ldots \leqq x_{n-1} \leqq x$ (obor integralu P)

$\xi \leqq x_2 \leqq x_1 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq x$ (obor integralu P')

$\xi \leqq x_n \leqq x_{n-1} \ldots \leqq x$ (obor integralu $P^{(n!-1)}$)

Patrně je Σ, n dimensialní krychle o hraně $x - \xi$ a tedy

$$P = \frac{1}{n!}\int_{\xi}^{x}\int_{\xi}^{x} \ldots \int_{\xi}^{x} f(z_1)\,f(z_2) \ldots f(z_n)\,dz_1 \ldots dz_n$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\int_{\xi}^{x} f(z)\,dz\right]^n.$$

Tato shoda je samozřejma, neboť je známo, že řešení linearní rovnice differentialní libovolně vysokého řádu je equivalentní řešení integralní rovnice Volterrovy druhého způsobu, na niž se dá převésti také řešení differentialních rovnic nekonečného řádu za jistých podmínek.[1]

O étheru.

Napsal Dr. Frant. Záviška.

(Dokončení.)

II. Éther v theorii elektromagnetického pole.

Theorie elektřiny a magnetismu byla vybudována fysiky v druhé polovici osmnáctého a v první polovici století minulého z představy, že všechny elektrické, magnetické a elektrodynamické zjevy jsou způsobeny silami, jimiž účinkují na sebe jednotlivé náboje elektrické nebo magnetické, po případě proudové elementy. Byly to tedy síly působící akcí in distans. Je zajímavo, že první pokusy vyložiti přitažlivé síly, jimiž účinkuje zelektrisované těleso na tělesa okolní, byly založeny na představách docela jiných. Gilbert, který první ukázal, že nejen jantar přitahuje lehká tělíska, byl-li třen, ale mnoho jiných látek se chová stejně, vykládal tuto vlastnost tím, že se třením uvolní z tělesa jemná látka, která vytvoří kol něho jakousi atmosféru. Tato látka se pak vrací do tělesa zpět a při tom strhuje i lehké předměty s sebou. Podobně ostatně byl tehdy často vykládán i fakt, že tělesa padají k zemi; úlohu oné jemné látky zastupoval vzduch. Gilbert tedy hledal původ přitažlivých sil ne v zelektrisovaných tělesích, ale v jich okolí, docela podobně, jak činí i dnešní theorie elektrostatického pole zásluhou Faraday ovou; ovšem mezi primitivními a částečně i naivními názory Gilbertovými a přesnými ideami Faraday-ovými je podstatný rozdíl.

Správný výklad volného pádu byl podán pokusy Galilei-ho a vyvrcholen Newtonovou formulací gravitačního zákona. Jím byla poprve zavedena do fysiky představa, že hmota může působiti do dálky, že tedy může účinkovati i tam, kde sama není.

---

[1]) Viz ku př. *Lalesco*: Introduction à la théorie des equations intégrales str. 13.