Quido Vetter

Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kuželoseček. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 4-5, 279--286

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109388

kladní trojinu mezi rovnoběžkami n a p v poloze $N_1 S_0 P_0$ a učiníme pak $S_0 S \parallel p$.

Sestrojíme-li soustavu rovnoběžek s jedním průměrem, možno takto ellipsu danou dvojinou sdružených průměrů rychle vytvořiti.

Je li přímka p polohy obecné (Obr. 8.), sestrojíme základní polohu kružnice k_1 a středem ellipsy přímku $v \parallel p$, jež jest trajektorií pro základní polohu $V_1 \equiv v \,.\, k_1$; dále použijeme ještě pohybu bodu U, jehož základní poloha $U_1 \equiv k_1 \,.\, V_1 P_1$, na trajektorii u. Nyní jest umístiti trojinu VUP resp. na přímkách v, u, p. Umístíme zase základní trojinu mezi rovnoběžkami v a p v poloze $V_1 U_0 P_0$, $V_1 P_0 = V_1 P_1$, $V_1 U_0 = V_1 U_1$, a učiníme pak $U_0 U \parallel p$, čímž určí se bod $U \equiv U'$ na u; sestrojíme-li $UP = UP' = U_1 P_1$, jsou průsečíky P a P' přímky p s ellipsou určeny.

Sem náleží také úloha: *Sestrojiti trojúhelník MNP daného tvaru a velikosti tak, aby jeho vrcholy nacházely se resp. na daných přímkách m, n, p.* Zvolí se na př. přímky m a n za základní trajektorie pohybu elliptického o středu $O_1 \equiv m \,.\, n$, sestrojí se jedna poloha $M_1 N_1$ a kružnice k_1 opsaná trojúhelníku $O_1 M_1 N_1$ a určí se průsečíky přímky p s ellipsou vytvořenou pohybem třetího vrcholu P_1 základního trojúhelníka, opět pomocnými trajektoriemi u a v, kde $v \parallel p$.

Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kuželoseček.

Dr. Q. Vetter. — (Dokončení.)

§ 8. *Vedeme-li ke každé kuželosečce $\Sigma_1 \nu$ v průsečících s H_1 tečny, prochází z nich jedna vždy bodem z_1 a druhá z'_1; podobně i tečny v průsečících s H'_1 procházejí vždy bodem z_1 a z'_1.* (Steiner, l. c. 475.)

Nechť rovina přímkou H_1 (obr. 1.) kolmo na půdorysnu vedená protíná plochu α v kuželosečce Θ. Kužel ϑ, dotýkající se α podél této křivky, má vrchol v a', pólu přímky H_1 vzhledem k A. Tečná rovina ϱ ke kuželi γ podél Q protíná Θ ve dvou bodech, v nichž vedeme tečné roviny ke kuželi ϑ. Průsečnice těchto rovin s ϱ promítají se ve zmíněné tečny. Lze ukázati, že tyto průsečnice vytvoří dvě zborcené plochy 4. stupně

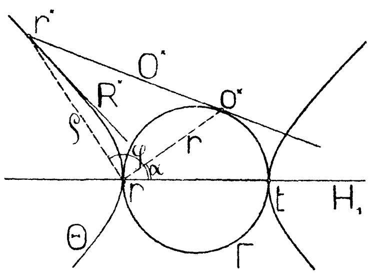
Rovina, v níž Θ leží, protíná kužel γ v kuželosečce Γ. Pro jednoduchost výpočtu transformujme kuželosečky ty tak, aby ve společném jich polárním trojúhelníku dvě strany stály na sobě kolmo a třetí byla v nekonečnu čili aby obě kuželosečky byly souosými (obr. 5.), přímka Q protínejž tuto rovinu v bodě o^*, rovina ϱ v tečně O^* a tečná rovina kužele v přímce R^*. Její dotyčný bod Θ budiž r^*. Položíme-li polárnou osu do společné osy kuželoseček a počátek do r, jsou jejich rovnice:

$$\Gamma \equiv \varrho = \frac{2a \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + c \,.\, \sin^2 \varphi}, \tag{1}$$

$$\Theta \equiv \varrho = \frac{2a \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + b \,.\, \sin^2 \varphi}, \tag{2}$$

kdež $2a = \overline{rt}$ a b a c jsou příslušné konstanty. Jsou-li polárné souřadnice bodu o^* r a α, zní rovnice tečny O^*:

$$O^* \equiv r\varrho \cos \alpha \cos \varphi - \varrho a \cos \varphi - ar \cos \alpha + cr\varrho \sin \alpha \sin \varphi = 0. \tag{3}$$



Obr. 5.

Dosadíme-li do rovnice 3. za r výraz, jejž obdržíme z rovnice 1., když jsme nahradili ϱ a φ veličinami r a α, zní rovnice 3.:

$$O^* \equiv \varrho = \frac{2a \cos \alpha}{\cos^2 \alpha \cos \varphi + 2c \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi - c \sin^2 \alpha \cos \varphi}. \tag{4}$$

Srovnáme-li rovnice 2. a 4. a zavedeme-li funkci tg a hodnotu $c = kb$, obdržíme po úpravě vztah:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - 2k \operatorname{tg} \varphi \,.\, \operatorname{tg} \alpha + k \operatorname{tg}^2 \alpha = 0. \tag{5}$$

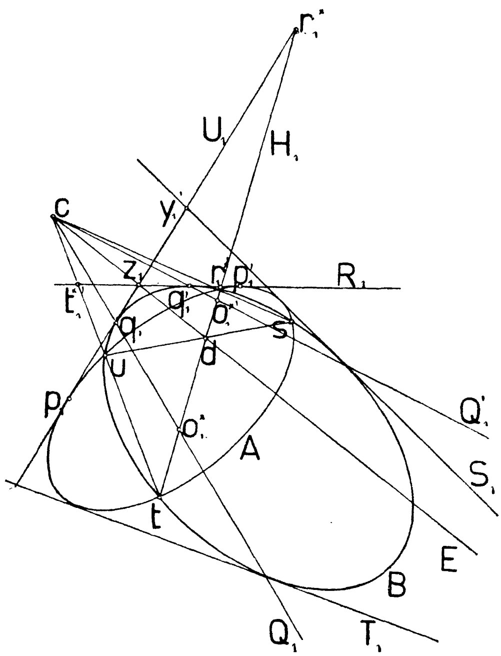
Řešíme-li tuto rovnici dle $\operatorname{tg} \varphi$, obdržíme dva výsledky, totiž:

$$\operatorname{tg} \varphi = (k + \sqrt{k^2 - k}) \,.\, \operatorname{tg} \alpha \tag{6}$$

a

$$\operatorname{tg} \varphi = (k - \sqrt{k^2 - k}) \,.\, \operatorname{tg} \alpha. \tag{7}$$

Svazky paprsků, jimiž z bodu r jsou promítnuty body o^* a r^*, jsou projektivné a proto i povrchové přímky, podle nichž se tečné roviny sobě příslušné dotýkají, jsou projektivné. Proto, jak známo, vytvořují v obou případech zborcenou plochu čtvrtého stupně. Zabývejme se zborcenou plochou určenou rovnicí 6. a předpokládejme na př., že A a B jsou elipsy a α jednoplochý, dle půdorysny souměrný hyperboloid. Pak jest Γ elipsou a Θ hyperbolou a konstanta k záporná. Úhly φ i α mění se vždy od 0 do 180°. Za našich předpokladů mají tangenty obou úhlů různá znaménka. Jsou-li proto úsečky bodů o^* i r^* obě menší než úsečka bodu t, mají jejich pořadnice znaménka souhlasná, je-li ale jedna z nich větší a druhá menší než úsečka bodu t, mají jejich pořadnice znaménka různá. Bodům o^* dle polárné osy souměrně položeným přísluší také souměrně položené body r^*. Proto jsou všecky povrchové přímky zborcené plochy souměrny dle půdorysny, která zborcenou plochu protíná ve dvojné křivce a to stupně 2., neboť průsek rovinný musí býti stupně 4., tedy dvojnásobný stupně 2. Ježto dvojná křivka zborcené plochy 4. stupně jest stupně 3., degeneruje se v našem případě na kuželosečku v půdorysně a na přímku k půdorysně kolmou. Při dvou dle půdorysny souměrných polohách roviny ϱ degeneruje se kuželosečka $\Sigma_1\gamma$ v tečny U_1 a T_1 (obr. 6.). Uvažujmež tu polohu, při které z, promítající se v z_1, leží nad půdorysnou. Přímka U, promítající se do U_1, jest povrchovou přímkou plochy zborcené, neboť U_1 jest jednou z tečen k $\Sigma_1\gamma$ vedených v průsečících s H_1. Do T_1 promítá se povrchová přímka T druhé zborcené plochy. Z poloh, při nichž se $\Sigma_1\gamma$ degeneruje v R_1 a S_1, volíme zase tu, kdy z leží nad půdorysnou. Poněvadž α jest jednoplochým hyperboloidem, protínají se U a R v z, U a S v y'. Lze ukázati, že zborcené ploše, které přísluší U, přísluší také R a nikoli S. V poloze, kdy $\Sigma\gamma$ se degeneruje v U a T, jsou body $o_1{}^*$ a $r_1{}^*$, průměty bodů o^* a r^*, bodem t neděleny, pročež body o^* a r^* leží oba nad půdorysnou a nesmí proto býti děleny ani q_1 a r^* stopou přímky U, dotyčným to bodem p_1 přímky U_1 na A. Naší zborcené ploše přísluší proto U a nikoli T. Degeneruje li se $\Sigma\gamma$ do R a S, jsou q'_1 a $r_1{}^*$ průsečíky R_1 s H_1 a Q'_1 buď oba dotyčným bodem přímky R_1 s A, stopou p''_1, a bodem $t^*{}_1{}'$ děleny nebo nikoli, pročež i R přísluší téže zborcené ploše. Bod z jest tedy dvojným bodem zborcené plochy a promítací paprsek $\overline{zz_1}$ dvojnou přímkou. Poněvadž každá povrchová přímka zborcené plochy 4. stupně dvojnou křivku 4. stupně protíná ve dvou bodech, protíná povrchová přímka uvažované zborcené plochy i dvojnou kuželosečku v půdorysně i dvojnou přímku do z_1 se promítající, pročež jedna z tečen kuželosečky $\Sigma_1 r$, sestrojených v průsečíku této kuželosečky s H_1,

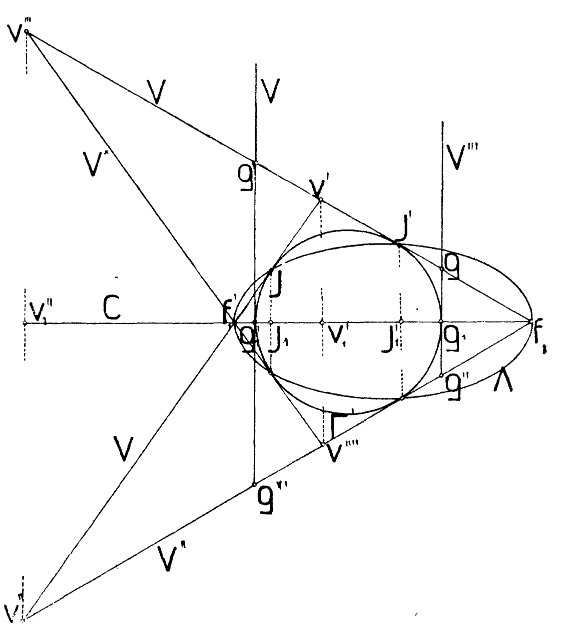


Obr. 6.

bodem z_1 prochází. Stejnou úvahu mohli bychom provésti pro jiné předpoklady. Vyjdeme-li z výrazu 7., obdržíme druhou zborcenou plochu a bod z'_1.

§ 9. *Dvě kuželosečky $\Sigma_1 r$ dotýkají se daných kuželoseček A a B v 8 bodech, jimiž lze proložiti kuželosečku.* (Steiner, l. c. 472.)

Jsou-li ϱ a ϱ' roviny, jež obě kuželosečky vytvoří, pak označíme jejich stopy P^{ϱ}_1 a $P^{\varrho}_1{}'$ a dotykové povrchové přímky na kuželi γ Q a Q'. Promítací rovinu přímky C protíná γ v kuželosečce Γ', přímky $P_1\varrho$, Q a Q' v bodech f_1, j a j' (obr. 7.). Body f_1, j a j' lze proložiti kuželosečku Λ dle C souměrnou. Obě kuželosečky stanoví svazek, který na C určuje involuci g_1, g'_1; f_1, f'_1; j_1, j'_1. Protože ale body f_1, g_1, j_1, g'_1 jsou harmonické, musí i jim involucí přiřaděné body f'_1, g'_1, j'_1, g_1 býti harmonické, pročež f'_1 musí ležeti na $P_1\varrho'$. Kuželosečku Λ lze



Obr. 7.

promítnouti z c kuželem, který protíná plochu α ve křivce čtvrtého stupně dle půdorysny souměrné, promítající se proto do půdorysny do kuželosečky procházející 8 dotyčnými body obou kuželoseček $\Sigma_1\gamma$ s A a B.

§ 10. *Všechny kuželosečky $\Sigma_1\gamma$ mají v C a c poláru a pól*; *ze společných sečen dvou kuželoseček $\Sigma_1\gamma$ procházejí vždy dvě pólem c, dělíce harmonicky G_1 a G'_1*. (Steiner, l. c. 472.).

Ve čtyřrohu $p_1p'_1q_1q'_1$ jsou vždy C a c diagonálnou stranou a diagonálným rohem, čímž prvá část věty dokázána.

Nechť leží dvě z kuželoseček $\Sigma\gamma$ v rovinách ϱ a ϱ'. Obě tyto roviny se dotýkají kužele γ, pročež prochází jejich průsečnice, jež se promítá do jedné ze společných sečen obou kuželoseček $\Sigma_1\gamma$, vrcholem c kužele γ. Rovina ϱ'' s ϱ' dle půdorysny souměrná určuje kuželosečku $\Sigma\gamma$, mající týž průmět s kuželosečkou v ϱ'. Proto se průsečnice rovin ϱ a ϱ'', procházející také c, rovněž promítá do jedné společné sečny. Použijeme zase promítací roviny přímky C jako v § 9., jež protíná γ v Γ' (Obr. 7.). Rovina ta protíná roviny ϱ, ϱ', ϱ'' a promítací roviny přímek G_1 a G'_1 v tečnách V, V', V'', V''', V'''' a jejich průsečnice v bodech v', v'', g, g', g'' a g'''. Připojíme ještě tečnu V^* a průsečíky v''' a v''''. Řady $gv'g'v'''$ a $g''v''''g'''v''$ na tečnách V' a V'' jsou projektivné jakož i jejich průměty na C. Poněvadž se ale souměrně položené body promítají do týchž bodů přímky C, tvoří soumístné řady na C involuci o dvojných bodech v g_1 a g'_1, dělících harmonicky v'_1 a v_1'', a proto jsou také společné sečny dvou kuželoseček $\Sigma_1\gamma$ přímkami G_1 a G'_1 harmonicky děleny.

§ 11. Polárnou reciprocitou na př. dle kuželosečky A dostaneme z vět §§ 4.—7. a 9. věty polárné; věta § 8. jest si sama polárnou. Tyto věty také Steiner (l. c. 474 a 475) uvádí.

1. Degeneruje-li se A ve dvě přímky, změní se plocha α v kužel o vrcholu c, totožný s kuželem γ. $\Sigma\gamma$ změní se v dotykovou povrchovou přímku Q a $\Sigma_1\gamma$ v její průmět Q_1. (Steiner, l. c. 479.)

2. Degeneruje-li se B ve dva body na C ležící, změní se válec β v promítací rovinu přímky C, křivka 4. stupně v kuželosečku Γ' a $\Sigma_1\gamma$ v dvojice tečen k A z bodů přímky C vedené, kužely δ a ε v C, pročež $\Sigma_1\delta$ a $\Sigma_1\varepsilon$ procházejí dvojicí bodů B. (Steiner, l. c. 479.)

3. Degeneruje-li se A i B ve dvě dvojice přímek, změní se α v kužel γ a β ve dvě na půdorysně kolmé roviny, křivka 4. stupně ve dvě kuželosečky v rovinách na půdorysnu kolmých. $\Sigma_1\gamma$ i $\Sigma_1\delta$ mění se v přímky průsečíkem dvou přímek A a průsečíkem dvou přímek B procházejících z týchž důvodů jako v případě 1., $\Sigma_1\varepsilon$ v řadu kuželoseček daným přímkám vepsaným. (Steiner, l. c. 480.)

4. Degenerují-li se A i B ve dvě dvojice bodů na C a D, lze případ ten polárně převésti na 3. (Steiner, l. c. 480.)

5. Degeneruje-li se A ve dvě přímky a B ve dva body na C, změní se α v kužel, β ve dvě na půdorysně kolmé přímky, jež kužel protínají ve čtyřech bodech. Kužely δ a ε degenerují se vždy ve dvě přímky, průsečíky těmi procházející, a proto jsou $\Sigma_1{}^\delta$ a $\Sigma_1{}^\varepsilon$ kuželosečky procházející body B a dotýkající se přímek A. Kuželosečky $\Sigma_1\gamma$ změní se v přímky Q_1 jako v případě 1. (Steiner, l. c 480.)

§ 12. Jest sestrojiti kuželosečku dvojnásobně se dotýkající dvou daných kuželoseček a procházející daným bodem anebo dotýkající se dané přímky. (Steiner, l. c. 481.)

Sestrojení lze provésti tak, že daný bod promítneme na plochu α a proložíme jím roviny, dotýkající se kuželů γ, δ a ε.

V druhém případě proložíme danou přímkou promítací rovinu, která plochu α protíná v kuželosečce. Vedeme společné tečné roviny k této kuželosečce a kuželům γ, δ a ε.

Poněvadž útvary takto vzniklé jsou dle půdorysny souměrné, jest zřejmo, že obě úlohy mají šest řešení.

Steiner probírá případy, kdy A a B se degenerují. Omyly jsou v dodatcích opraveny.

§ 13. *Ke třem kuželosečkám lze vésti dvojnásobně se dotýkající kuželosečku, platí-li jedna z následujících podmínek:*

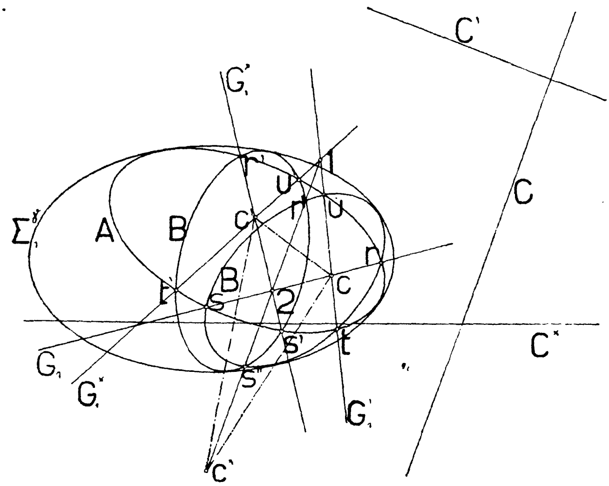
1. *Z každého ze tří polárních trojúhelníků, společných vždy dvěma daným kuželosečkám, lze vybrati jeden vrchol tak, aby trojúhelník z nich utvořený byl perspektivický s trojúhelníkem příslušných polár. Trojúhelníků těch je 27.*

2. *Z každého ze tří čtyřrohů, v jehož vrcholech se vždy dvě z daných kuželoseček protínají, lze vybrati po jedné straně tak, aby se všecky tři v jediném bodě protínaly.*

3. *Z každého ze tří čtyřstranů, jemuž jsou vždy dvě z daných kuželoseček vepsány, lze vybrati po jednom rohu tak, aby všecky tři ležely na jediné přímce.* (Steiner, l. c. 483.)

Nechť jsou dané kuželosečky A, B a B^* a kuželosečka všech tří dvojnásobně se dotýkající $\Sigma_1\gamma$. Průsečíky daných kuželoseček a jich diagonálné rohy označíme tak, aby dvojnásobně se dotýkající kuželosečka byla přidružena společným pólům c, c' a c^* (obr. 8.). Dle § 10. jsou c a C, c' a C', c^* a C^* póly a poláry kuželosečky $\Sigma_1\gamma$. Jak známo, musí pak trojúhelníky pólů a polár býti perspektivné.

Kuželosečkou A proložíme plochu α a kuželosečkami B a B^* válce β a β^*. Dle předešlých úvah stanoví nám plochy ty kužely γ a γ^*. Jen tehdy bude možno vésti ke všem třem



Obr. 8.

daným kuželosečkám dvojnásobně se dotýkající kuželosečku $\Sigma_1\gamma$, budou-li míti oba kužely dvě společné roviny tečné dle půdorysny souměrné, t. j. degeneruje-li se průsečná jejich křivka 4. stupně ve dvě kuželosečky v našem případě na rovinách na půdorysnu kolmých, promítající se tedy ve dvě přímky. Povrchové přímky kuželů γ a γ^* v půdorysně jsou G_1, G'_1 a $G_1{}^*$, $G'_1{}^*$, spojnice průsečíků *1* a *2* těchto přímek jsou půdorysy oněch kuželoseček. Válce β a β^* protínají tyto kuželosečky v těchže bodech, pročež i r'' a s'' na přímce té leží.

Podmínka 3. jest duálná k 2.